

# INTERPRÉTATION COMBINATOIRE DES MOMENTS NÉGATIFS DES VALEURS DE FONCTIONS $L$ AU BORD DE LA BANDE CRITIQUE

PAR EMMANUEL ROYER

---

RÉSUMÉ. – On donne une interprétation combinatoire des moments négatifs de la valeur au bord de la bande critique de fonctions  $L$  de formes modulaires de  $GL(2)$  et  $GL(3)$ . On en déduit des renseignements sur la taille de ces nombres.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – We give a combinatorial interpretation of the negative moments of the values at the edge of the critical strip of the  $L$  functions of modular forms of  $GL(2)$  and  $GL(3)$ . We deduce some results about the size of these numbers.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Introduction

Les fonctions  $L$  de formes automorphes,  $L(\varpi, s)$ , constituent un outil puissant d'étude d'objets algébriques ou géométriques par des méthodes analytiques. Ces méthodes, grâce aux travaux pionniers d'Iwaniec et Sarnak [8] connaissent un développement important. Si on normalise ces fonctions pour que la bande critique soit  $0 < \Re s < 1$ , la valeur  $L(\varpi, 1)$  recèle des informations de grand intérêt. Lorsque  $\varpi$  est un caractère de Dirichlet réel de module un discriminant fondamental, la relation de Dirichlet permet d'étudier le nombre de classes des corps quadratiques. Elle donne en particulier la minoration de Siegel : si  $h(D)$  est le nombre de classes d'un corps quadratique de discriminant  $-D < 0$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  on a  $D^{1/2-\varepsilon} \ll h(D) \ll D^{1/2} \ln D$ . Lorsque  $\varpi$  est la carré symétrique d'une forme modulaire primitive, la valeur  $L(\varpi, 1)$  permet d'étudier le degré des paramétrisations modulaires des courbes elliptiques : si  $E$  est une courbe elliptique sur  $\mathbb{Q}$ , grâce aux travaux de Wiles, Taylor, Diamond, Conrad et Breuil, on sait associer à  $E$  un entier  $N$  et une forme modulaire primitive  $f$  de poids 2 sur le sous-groupe de congruence  $\Gamma_0(N)$  telle que  $L(E, s) = L(f, s)$ . Le degré de la paramétrisation modulaire  $\Phi : X_0(N) \rightarrow E$  est alors [2],

$$\ln \deg \Phi = \ln N + \ln L(\text{sym}^2 f, 1) + 2h(E) + 2 \ln \frac{c}{2\pi}$$

où  $c$  est la constante de Manin et  $h(E)$  la hauteur de Faltings de  $E$ .

Une méthode d'appréhension des valeurs  $L(\varpi, 1)$  est l'étude des moments. Lorsque  $\varpi$  parcourt les caractères de Dirichlet, l'étude des moments positifs a été faite par Barban [1]. Lorsque  $\varpi$  parcourt l'ensemble des formes de Maass de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , l'étude des moments positifs

est due à Luo [12]. Dans [13], on a donné une expression des moments négatifs et positifs de  $L(\text{sym}^2 f, 1)$  lorsque  $f$  parcourt la base des formes modulaires primitives de poids fixé sur  $\Gamma_0(N)$ .

Les formules obtenues jusqu'à présent étaient compliquées, rendant délicates les estimations. Notamment, la présence de la fonction de Möbius dans l'expression des moments négatifs rendait impossible toute étude fine de ces moments.

L'objet de cet article est de décrire une interprétation nouvelle des valeurs au bord de la bande critique des fonctions  $L$  de formes modulaires de  $GL(2)$  et des formes de  $GL(3)$  associées par le carré symétrique, en termes de chemins du réseau  $\mathbb{Z}^2$ .

On donne notre résultat principal. Soit  $N \geq 1$  un entier sans facteur carré et  $k \geq 2$  un entier pair fixé. On note  $H(N)$  l'ensemble des formes primitives de poids  $k$  sur  $\Gamma_0(N)$ . On note  $L(\text{sym}^2 f, s)$  la fonction  $L$  du carré symétrique de la forme primitive  $f$ . Soit  $\kappa > 0$  un réel de  $]0, 1]$ , fixé dans tout l'article ; on définit l'ensemble  $\mathcal{N}_\kappa = \mathcal{N}$  comme l'ensemble des entiers  $N$  sans facteur carré de plus petit facteur premier  $p_1(N) \geq N^\kappa$ . On note enfin  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers. Notons  $R_n$  le nombre de chemins de Riordan d'arrivée  $n$ ,  $R_0 = 1$  et  $R_1 = 0$ . Un chemin de Riordan d'arrivée  $n$  est un chemin reliant  $(0, 0)$  à  $(n, 0)$  par des pas  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$  et restant sous l'axe des abscisses sauf éventuellement par des doubles pas  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$  (voir figure 2).

**THÉORÈME A.** – Soit  $n \in \mathbb{N}$  et, pour  $N \in \mathcal{N}$ ,

$$M_{-n}(N) = \frac{1}{H(N)} \sum_{f \in H(N)} L(\text{sym}^2 f, 1)^{-n-1}.$$

La suite  $(M_{-n}(N))_{N \in \mathcal{N}}$  admet, lorsque  $N$  tend vers l'infini, une limite  $M_{-n}$  valant

$$M_{-n} = \frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)^n} \prod_{p \in \mathcal{P}} \ell_n\left(\frac{p}{p^2 + p + 1}\right)$$

avec

$$\ell_n(x) = \sum_{h=0}^n (-1)^h \binom{n}{h} R_h x^h = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} [1 + x(1 - 4 \sin^2 \theta)]^n \cos^2 \theta \, d\theta.$$

Le théorème A résulte de la proposition 11 et du lemme 14.

*Remarque.* – On donne aussi une expression de  $\ell_n$  en termes de fonction hypergéométrique de Gauss :

$$\ell_n(x) = (1+x)^n F\left(-n, \frac{1}{2}, 2, \frac{4x}{1+x}\right)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1/3[$ . Ce résultat est prouvé au §2.3.

Pour prouver le théorème A, on exprime les moments négatifs de  $L(\text{sym}^2 f, 1)$  comme combinaison linéaire de cardinaux d'ensembles d'entiers. Alors qu'on s'attend à ce que la fonction de Möbius complique les calculs, elle permet ici de se ramener au calcul de cardinaux d'ensembles suffisamment simples pour être reliés à des ensembles de chemins de  $\mathbb{Z}^2$ . On peut alors calculer la série génératrice du nombre de tels chemins en fonction du nombre de chemins de Riordan.

Un des intérêts de l'expression combinatoire obtenue est de permettre l'étude de la taille des moments. On obtient le

COROLLAIRE A. – Pour tout  $n \geq 3$ ,

$$\ln M_{-n} = n \ln \ln n + n \ln \frac{e^\gamma}{\zeta(2)^2} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Ce corollaire résulte du théorème A via l'expression de  $\ell_n(x)$  comme une intégrale. Cette intégrale étant évaluée, il suffit d'utiliser les techniques standard d'évaluation des produits eulériens pour conclure. Dans [13], on obtenait, si  $M_n$  est la limite des moments positifs d'ordre  $n - 1$ , le développement

$$\ln M_n = 3n \ln \ln n + O(n)$$

en utilisant des arguments de positivité. Par cette méthode, il apparaissait difficile d'obtenir un terme d'erreur plus précis. Dans le cas des moments négatifs, l'expression combinatoire permet de préciser le terme d'erreur.

Goldfeld, Hoffstein & Lieman [3] et Iwaniec [9] ont montré la majoration

$$L(\text{sym}^2 f, 1) + L(\text{sym}^2 f, 1)^{-1} \ll \ln N.$$

On ne sait pas si cette majoration est optimale. Grâce au corollaire A, on démontre le

COROLLAIRE B. – Soit  $C > 0$ . Il existe  $N_C$  tel que pour tout  $N \in \mathcal{N}$  vérifiant  $N \geq N_C$ , il existe  $f \in H(N)$  tel que

$$\frac{1}{L(\text{sym}^2 f, 1)} \geq C.$$

*Remarque.* – Une analyse minutieuse des dépendances en tous les paramètres dans les termes d'erreurs de [13] permet de remplacer la constante  $C$  du lemme ci-dessus par une fonction  $f(N) \rightarrow +\infty$ . Les résultats seront donnés par ailleurs.

Dans [13], on a prouvé un résultat semblable à celui du corollaire B en remplaçant  $L(\text{sym}^2 f, 1)^{-1}$  par  $L(\text{sym}^2 f, 1)$ . Les techniques sont néanmoins radicalement différentes; l'expression des moments positifs fait intervenir des séries à termes positifs rendant le dénombrement plus accessible (il est aisé de minorer des séries à termes positifs en négligeant des termes). Au contraire, l'expression des moments négatifs fait intervenir la fonction de Möbius. Cette fonction, au signe très fluctuant empêche l'utilisation d'arguments de positivité. Mais, cette même fonction rend possible l'interprétation combinatoire. Il est remarquable, car rare en théorie des nombres, que la fonction de Möbius facilite les calculs. La raison est que le calcul des moments se ramenant à un décompte de cardinaux d'ensembles, la fonction de Möbius réduit drastiquement le nombre de cas à étudier (voir la remarque 9). Cette réduction permet notamment un calcul informatique nettement plus rapide pour les moments négatifs que pour les moments positifs.

On énonce maintenant l'interprétation combinatoire dans les cas des formes de  $GL(2)$ . Le poids harmonique  $\omega_N$  est un opérateur de moyenne classique en théorie des formes modulaires. Il est défini au paragraphe 3 en (10). On a, comme pour le carré symétrique une interprétation combinatoire de la valeur en 1 de la fonction  $L(f, s)$  associée à une forme  $f \in H(N)$ .

THÉORÈME B. – Soit  $n \in \mathbb{N}$  et, pour tout  $N \in \mathcal{N}$ ,

$$H_{-n}(N) = \sum_{f \in H(N)} \omega_N(f) L(f, 1)^{-n}.$$

La suite  $(H_{-n}(N))_{N \in \mathbb{N}}$  admet, lorsque  $N$  tend vers l'infini, une limite  $H_{-n}$  donnée par

$$H_{-n} = \frac{\zeta(2)^n}{\zeta(4)^n} \prod_{p \in \mathcal{P}} s_n \left( \frac{p}{p^2 + 1} \right)$$

avec

$$s_n(x) = \sum_{h=0}^{n/2} \binom{n}{2h} C_h x^{2h} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2x \sin \theta)^n \cos^2 \theta \, d\theta$$

où  $C_h = \frac{1}{h+1} \binom{2h}{h}$  est le nombre de Catalan d'indice  $h$ .

Le théorème B résulte de la proposition 20 et du lemme 22.

*Remarque.* – On a l'expression suivante pour  $s_n$  en termes de série hypergéométrique :

$$s_n(x) = (1 + 2x)^n F \left( -n, \frac{3}{2}, 3, \frac{4x}{2x + 1} \right)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1/2[$ . Ce résultat est prouvé dans le lemme 23.

On déduit du théorème B le

**COROLLAIRE C.** – Pour tout entier  $n \geq 3$ ,

$$\ln H_{-n} = 2n \ln \ln n + 2n \ln \frac{e^\gamma}{\zeta(2)} + O \left( \frac{n}{\ln n} \right).$$

*Remarque.* – Il est implicite dans [5] que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(1) \quad \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in \mathcal{N}}} \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi \pmod{N}} L(\chi, 1)^{-n} = 1.$$

En particulier, on ne peut pas déduire de (1) un résultat semblable à celui du corollaire B. En ce sens, l'exploration de la majoration de Siegel est plus subtile que celle de Goldfeld, Hoffstein & Lieman et Iwaniec.

### 1. Cadre

Les résultats nécessaires de la théorie des formes modulaires sont donnés dans [13, §2]. On ne le répète pas et on utilise les mêmes notations. En particulier les lettres grasses telles que  $\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{b}, \mathbf{d} \dots$  désignent des vecteurs. Leurs coordonnées seront numérotées en indice, ainsi  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ . Le déterminant – noté  $\det$  – d'un vecteur est le produit de ses coordonnées, ainsi  $\det \alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_m$ . La trace – notée  $\text{tr}$  – d'un vecteur désigne la somme de ses coordonnées, ainsi  $\text{tr} \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ . Le produit de deux vecteurs est le vecteur de même dimension obtenu en multipliant entre elles les coordonnées de même indice, ainsi  $\alpha\beta = (\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_m\beta_m)$ . Enfin, si  $\mathbb{P}$  est une proposition,  $\delta(\mathbb{P})$  vaut 1 ou 0 selon que  $\mathbb{P}$  est vraie ou fausse.

**1.1. Chemins de Motzkin**

Soit  $n \geq 0$ . On appelle chemin de Motzkin d'arrivée  $n$  un chemin de  $\mathbb{Z}^2$  reliant les points  $(0, 0)$  à  $(n, 0)$  par des pas de  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  ou  $(1, -1)$  et restant sous l'axe des abscisses.

Le nombre de chemins de Motzkin d'arrivée  $n$  est appelé nombre de Motzkin d'indice  $n$  et noté  $m_n$ . En définissant

$$\delta_i = \begin{cases} -1 & \text{si le pas reliant } i-1 \text{ à } i \text{ est } (1, -1); \\ 0 & \text{si le pas reliant } i-1 \text{ à } i \text{ est } (1, 0); \\ 1 & \text{si le pas reliant } i-1 \text{ à } i \text{ est } (1, 1) \end{cases}$$

on voit que l'entier  $m_n$  est le nombre de vecteurs  $\delta \in \{-1, 0, 1\}^n$  vérifiant les deux conditions

- (1) pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $\delta_1 + \dots + \delta_i \leq 0$ ,
- (2)  $\delta_1 + \dots + \delta_n = 0$ .

Les nombres de Motzkin ont l'agréable propriété d'avoir une série génératrice simple [14, ex. 6.37, 6.38] égale à

$$m(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} m_n x^n = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x^2}.$$

**1.2. Chemins de Riordan**

DÉFINITION 1. – Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle nombre de Riordan d'indice  $n + 2$  l'entier  $R_{n+2}$  défini comme le nombre de vecteurs  $\delta \in \{-1, 0, 1\}^n$  vérifiant les deux conditions

- (1) pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $\delta_1 + \dots + \delta_i \leq \max(\delta_i, 0)$ ,
- (2)  $\delta_1 + \dots + \delta_n = 0$ .

Les nombres de Riordan d'indice 0 et 1 sont définis par  $R_0 = 1$  et  $R_1 = 0$ .

Remarque 2. – Le nombre de Riordan  $R_{n+2}$  compte le nombre de chemins de Riordan d'arrivée  $n$ . Un chemin de Riordan d'arrivée  $n$  est un chemin reliant  $(0, 0)$  à  $(n, 0)$  par des pas  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$  et restant sous l'axe des abscisses sauf éventuellement par des doubles pas  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ . On appelle *pointe* du chemin un tel double pas et *abscisse* de la pointe l'entier  $i$  tel que la pointe relie  $i$  à  $i + 2$ . En particulier, un chemin de Motzkin est un chemin de Riordan sans pointe.

Les nombres de Riordan possèdent eux aussi une série génératrice simple donnée dans le

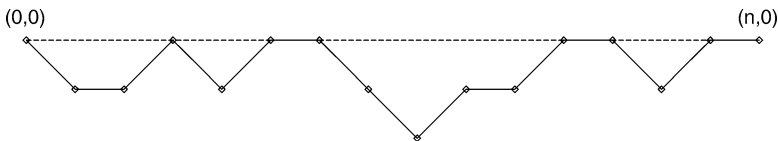


Fig. 1. Exemple de chemin de Motzkin.

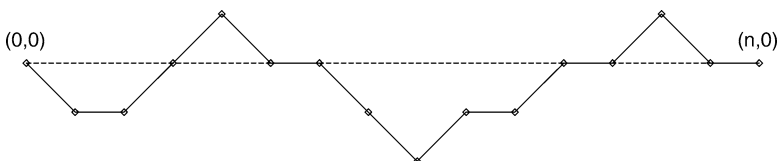


Fig. 2. Un chemin de Riordan avec deux pointes d'abscisse 3 et 12.

LEMME 3. – *La fonction génératrice des nombres de Riordan est*

$$R(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n = \frac{2}{1+x+\sqrt{1-2x-3x^2}}.$$

*Démonstration.* – La démonstration consiste à établir un lien très fort entre les nombres de Riordan et les nombres de Motzkin. On en déduit une relation entre les séries  $m$  et  $R$ . On note  $S_n = R_{n+2}$  de sorte que  $S_n$  compte le nombre de chemins de Riordan d'arrivée  $n$ . Étant donné un tel chemin ; soit il n'a pas de pointe et c'est un chemin de Motzkin d'arrivée  $n$ , soit il a au moins une pointe et, si  $i$  est le plus petit entier tel que  $i$  est l'abscisse d'une pointe, ce chemin se décompose en un chemin de Motzkin d'arrivée  $i$ , une pointe et un chemin de Riordan d'arrivée  $n - i - 2$ . On a donc

$$S_n = m_n + \sum_{i=0}^{n-2} m_i S_{n-i-2}.$$

Si  $S$  est la série génératrice de  $S_n$ , on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} S_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} m_n x^n + x^2 \sum_{i=0}^{+\infty} m_i x^i \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

d'où

$$S(x) = \frac{m(x)}{1-x^2 m(x)}.$$

On déduit finalement l'expression de  $R$  de la relation  $R(x) = 1 + x^2 S(x)$ .  $\square$

L'interprétation des nombres de Riordan en termes de chemins semble nouvelle. On déduit du lemme 3 une expression intégrale des nombres de Riordan dans le

LEMME 4. – *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a la relation*

$$R_n = \frac{1}{\pi} \int_0^2 (t^2 - 1)^n \sqrt{4 - t^2} dt.$$

*Démonstration.* – On a immédiatement la relation  $\frac{1}{\pi} \int_0^2 (t^2 - 1)^n \sqrt{4 - t^2} dt = O(3^n)$  de sorte qu'on peut considérer la fonction définie par la série

$$Q(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\pi} \int_0^2 (t^2 - 1)^n \sqrt{4 - t^2} dt.$$

D'après le lemme 3, il suffit alors de vérifier l'égalité  $Q(x) = R(x)$  pour tout  $x$  dans un voisinage de 0. Par interversion et calcul de la somme, on obtient pour  $|x| < \frac{1}{3}$  l'égalité

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^2 \frac{\sqrt{4 - t^2}}{1 + x - xt^2} dt$$

puis, par changement de variable  $t = 2 \cos \theta$  puis  $u = \tan \theta$ , on trouve

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{4}{\pi(1+x)} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)\left(\frac{1-3x}{1+x} + u^2\right)} du \\ &= \frac{2}{1+x} \frac{1-\sqrt{A}}{1-A} = R(x) \end{aligned}$$

avec  $A = \frac{1-3x}{1+x}$ .  $\square$

*Remarque 5.* – La démonstration du lemme 4 n'est efficace que parce qu'on connaît le résultat. On donne les grandes lignes d'une démonstration plus naturelle mais plus longue si on veut être rigoureux. La fonction  $R$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  privé des demi-droites  $]-\infty, -1]$  et  $[1/3, +\infty[$  si on prend pour  $\sqrt{\phantom{x}}$  la détermination principale. De plus,

$$(2) \quad R(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z} \sqrt{\frac{1-3z}{1+z}}.$$

C'est le fait que  $1+z$  divise  $1-2z-3z^2$  qui permet cette écriture et le calcul de  $R_n$ . On note  $C(r)$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Pour tout  $r < 1/3$ , on déduit de (2) l'égalité

$$R_n = -\frac{1}{4i\pi} \int_{C(r)} \sqrt{\frac{1-3z}{1+z}} \frac{dz}{z^{n+2}}.$$

Grâce au théorème des résidus, on remplace  $C(r)$  par un chemin contournant les demi-droites de coupures, à savoir le chemin constitué d'une composante reliant  $-\infty + i\varepsilon$ ,  $-1 + \varepsilon + i\varepsilon$ ,  $-1 + \varepsilon - i\varepsilon$  puis  $-\infty - i\varepsilon$  et d'une composante reliant  $+\infty - i\varepsilon$ ,  $1/3 - \varepsilon - i\varepsilon$ ,  $1/3 - \varepsilon + i\varepsilon$  et  $+\infty + i\varepsilon$ . On pose

$$A(u, \varepsilon) = \sqrt{\frac{4+3u+3i\varepsilon}{-u-i\varepsilon}}, \quad B(u, \varepsilon) = \sqrt{\frac{-u+i\varepsilon}{3u+4-3i\varepsilon}}.$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers  $0^+$ , on obtient

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{4i\pi} \int_0^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [A(u, \varepsilon) - A(u, -\varepsilon)] \frac{du}{(-1-u)^{n+2}} \\ &\quad + \frac{3}{4i\pi} \int_0^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [B(u, \varepsilon) - B(u, -\varepsilon)] \frac{du}{(1/3+u)^{n+2}} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{4+3u}{u}} \frac{du}{(-1-u)^{n+2}} + \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{u}{3u+4}} \frac{du}{(1/3+u)^{n+2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (t^2-1)^n \sqrt{4-t^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_1^2 (t^2-1)^n \sqrt{4-t^2} dt. \end{aligned}$$

**1.3. Chemin de Catalan**

On rappelle la définition du nombre de Catalan d'indice  $j$ ,

$$C_j = \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j}.$$

La fonction génératrice des nombres de Catalan est

$$(3) \quad C(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} C_j x^j = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Un chemin de Catalan d'arrivée  $2n$  est un chemin reliant  $(0, 0)$  à  $(2n, 0)$  par des pas  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$  et restant sous l'axe des abscisses.

Le nombre  $C_n$  compte les chemins de Catalan d'arrivée  $2n$  [14, ex. 6.19(i)]. De même que le lemme 3 implique le lemme 4, l'équation (3) implique le

LEMME 6. – Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On définit

$$\widetilde{C}_n = \begin{cases} C_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,

$$\widetilde{C}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 t^n \sqrt{4 - t^2} dt.$$

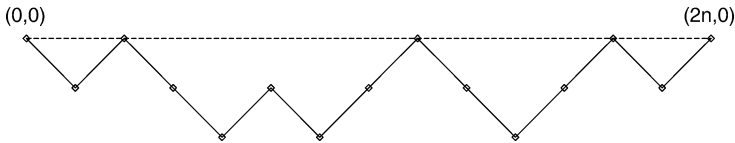


Fig. 3. Chemin de Catalan.

**2. Moments de  $L(\text{sym}^2 f, 1)$  et nombres de Riordan**

**2.1. Simplification de l'écriture des moments négatifs**

On tire de [13, Théorème C] le

LEMME 7. – Soit  $n \geq 1$  un entier. Soit

$$M_{-n}(N) = \frac{1}{\#H(N)} \sum_{f \in H(N)} L(\text{sym}^2 f, 1)^{-n-1}.$$

Alors, lorsque  $N$  parcourt  $\mathcal{N}$  il existe un réel  $M_n$  tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_{-n}(N) = M_{-n}.$$



On définit pour tout  $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$  l'ensemble

$$\mathcal{E}_n(\mathbf{b}) = \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{N}^{n-1}; d_i \mid \left( \frac{b_1 \cdots b_i}{d_1 \cdots d_{i-1}}, b_{i+1} \right)^2, \forall i \in [1, n-1] \right\}$$

puis pour tout  $r \geq 1$  entier

$$m_{-n}(r) = \sum_{\substack{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{N}^n \\ \det \mathbf{a} \mathbf{b}^2 \mathbf{c}^3 = r}} \mu(a_1 b_1 c_1) \cdots \mu(a_n b_n c_n) \mu(b_1) \cdots \mu(b_n) \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathcal{E}_n(\mathbf{a} \mathbf{b}) \\ \det \mathbf{d} = \det \mathbf{a} \mathbf{b}}} 1.$$

On a alors

$$M_{-n} = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{m_{-n}(r)}{r}.$$

Dans cet énoncé on a fait les conventions suivantes :  $\mathbb{N}^0 = \{1\}$ ,  $\mathcal{E}_1(\mathbf{b}) = \{1\}$  et  $d_1 \cdots d_0 = 1$ . On effectue une première simplification de l'expression de  $M_{-n}$  dans le

LEMME 8. – Soit  $n \geq 3$ . Pour tout entier  $\nu \geq 0$  on définit  $a_n(\nu)$  comme le cardinal de l'ensemble des quadruplets de vecteurs  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  de  $\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \times \{0, 1, 2\}^{n-1}$  vérifiant

- (1) pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $0 \leq \alpha_i + \beta_i + \gamma_i \leq 1$ ,
- (2) pour tout  $i \in [1, n-1]$ ,

$$\delta_i \leq 2 \min(\alpha_1 + \beta_1 + \cdots + \alpha_i + \beta_i - \delta_1 - \cdots - \delta_{i-1}, \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}),$$

- (3)  $\text{tr}(\alpha + 2\beta + 3\gamma) = \nu$ ,
- (4)  $\text{tr} \delta = \text{tr}(\alpha + \beta)$ .

Soit  $f_n$  le polynôme

$$f_n(X) = \sum_{\nu=0}^{3n} a_n(\nu) X^\nu.$$

On a alors l'égalité

$$M_{-n} = \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p \in \mathcal{P}} f_n\left(\frac{-1}{p}\right).$$

Démonstration. – Par multiplicativité, on a

$$M_{-n} = \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\nu=0}^{+\infty} m_{-n}(p^\nu) p^{-\nu}$$

et il suffit de calculer  $m_{-n}(p^\nu)$ . En posant  $a_i = p^{\alpha_i}$ ,  $b_i = p^{\beta_i}$ ,  $c_i = p^{\gamma_i}$  et  $d_i = p^{\delta_i}$ , la présence de la fonction de Möbius  $\mu(a_i b_i c_i) \mu(b_i)$  implique que seules les valeurs vérifiant

$$0 \leq \alpha_i + \beta_i + \gamma_i \leq 1$$

interviennent dans le calcul de  $m_{-n}(p^\nu)$ . On a alors pour  $m_{-n}(p^\nu)$  la valeur

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}^n \\ 0 \leq \alpha_i + \beta_i + \gamma_i \leq 1 \\ \text{tr}(\alpha + 2\beta + 3\gamma) = \nu}} (-1)^{\text{tr}(\alpha + 2\beta + \gamma)} \sum_{\substack{\delta \in \{0,1,2\}^{n-1} \\ \delta_i \leq 2 \min(\alpha_1 + \beta_1 + \dots + \alpha_i + \beta_i - \delta_1 - \dots - \delta_{i-1}, \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}) \\ \text{tr}(\delta) = \text{tr}(\alpha + \beta)}} 1. \tag{1}$$

Grâce à l'égalité

$$(-1)^{\text{tr}(\alpha + 2\beta + \gamma)} = (-1)^{\text{tr}(\alpha + 2\beta + 3\gamma)} = (-1)^\nu,$$

on déduit  $m_{-n}(p^\nu) = (-1)^\nu a_n(\nu)$ . Enfin, si  $\nu > 3n$ , alors  $a_n(\nu) = 0$  puisque

$$\text{tr}(\alpha + 2\beta + 3\gamma) \leq 3 \text{tr}(\alpha + \beta + \gamma) \leq 3 \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i). \quad \square$$

*Remarque 9.* – Ce lemme est à comparer à son équivalent pour les moments positifs obtenu dans le lemme 6 de [13]. La différence essentielle est le point (1) qui n'a pas d'équivalent pour les moments positifs. Si cette différence n'explique pas, à elle seule, l'interprétation combinatoire, elle explique néanmoins qu'on ait affaire à des chemins à trois pas.

*Remarque 10.* – On calcule aisément  $M_{-n}$  pour les petites valeurs de  $n$  :

$$M_0 = \frac{1}{\zeta(2)}, \quad M_{-1} = \frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)} \quad \text{et} \quad M_{-2} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left( 1 - \frac{4}{p^3} + \frac{4}{p^5} - \frac{1}{p^8} \right).$$

On calcule ensuite le polynôme  $f_n$  pour obtenir la

**PROPOSITION 11.** – *Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\ell_n$  le polynôme*

$$\ell_n(X) = \sum_{h=0}^n (-1)^h \binom{n}{h} R_h X^h.$$

On a alors

$$M_{-n} = \frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)^n} \prod_{p \in \mathcal{P}} \ell_n \left( \frac{p}{p^2 + p + 1} \right).$$

*Démonstration.* – Dans la définition de  $a_n(\nu)$ , notons  $j$  le nombre d'indices  $i$  tels que  $\gamma_i = 1$ . Pour ces indices, on a  $\alpha_i = \beta_i = 0$  et donc  $\delta_{i-1} = 0$ . La contribution à  $a_n(\nu)$  est

$$\begin{cases} \delta(\nu = 3n) & \text{si } j = n; \\ n\delta(\nu = 3n - 3) & \text{si } j = n - 1; \\ \binom{n}{j} b_{n,j}(\nu) & \text{si } j < n - 1 \end{cases}$$

en ayant défini  $b_{n,j}(\nu)$  comme le nombre de triplets de vecteurs  $(\alpha, \beta, \delta)$  de  $\{0, 1\}^{n-j} \times \{0, 1\}^{n-j} \times \{0, 1, 2\}^{n-j-1}$  vérifiant

- (1) pour tout  $i \in [1, n - j], 0 \leq \alpha_i + \beta_i \leq 1,$
- (2) pour tout  $i \in [1, n - j - 1],$

$$\delta_i \leq 2 \min(\alpha_1 + \beta_1 + \dots + \alpha_i + \beta_i - \delta_1 - \dots - \delta_{i-1}, \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}),$$

$$(3) \operatorname{tr}(\alpha + 2\beta) = \nu - 3j,$$

$$(4) \operatorname{tr} \delta = \operatorname{tr}(\alpha + \beta).$$

On a alors

$$a_n(\nu) = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j} b_{n,j}(\nu) + n\delta(\nu = 3n - 3) + \delta(\nu = 3n).$$

Dans la définition de  $b_{n,j}(\nu)$ , soit  $k$  le nombre d'indices  $i$  tels que  $\alpha_i + \beta_i = 1$ . On a alors  $\beta_i = 1 - \alpha_i$ . Si  $k = 0$ , la contribution à  $b_{n,j}(\nu)$  est  $\delta(\nu = 3j)$ . Si  $k = 1$ , la contribution est nulle, en raison de l'incompatibilité des conditions

$$\delta_i \leq 2 \min(\alpha_1 + \beta_1 + \dots + \alpha_i + \beta_i - \delta_1 - \dots - \delta_{i-1}, \alpha_{i+1} + \beta_{i+1})$$

qui impliquent pour tout  $i \in [1, n - j - 1]$  que  $\delta_i = 0$  avec la condition

$$\delta_1 + \dots + \delta_{n-j-1} = 1.$$

Si  $k \geq 2$ , la contribution à  $b_{n,j}(\nu)$  est

$$\#\{\alpha \in \{0, 1\}^k, \delta \in \{0, 1, 2\}^{k-1} : \operatorname{tr} \alpha = 2k + 3j - \nu, \delta_i \leq 2(i - \delta_1 - \dots - \delta_{i-1}), \\ \forall i \in [1, k - 1] \operatorname{tr} \delta = k\} = \binom{k}{2k + 3j - \nu} \lambda(k)$$

où  $\lambda(k)$  compte les vecteurs  $\delta \in \{0, 1, 2\}^{k-1}$  tels que, pour tout  $i$  dans  $[1, k - 1]$ ,

$$(4) \quad \delta_i \leq 2(i - \delta_1 - \dots - \delta_{i-1})$$

et

$$(5) \quad \operatorname{tr} \delta = k.$$

On étend cette définition à  $\mathbb{N}$  en posant  $\lambda(0) = 1$  et  $\lambda(1) = 0$ . On a alors

$$a_n(\nu) = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} \binom{k}{\nu - 3j - k} \lambda(k) + n\delta(\nu = 3n - 3) + \delta(\nu = 3n).$$

Les conventions habituelles sur les coefficients binomiaux permettent alors d'écrire

$$f_n(x) = \sum_k \binom{n}{k} \lambda(k) \sum_j \binom{n-k}{j} \sum_\nu \binom{k}{\nu - 3j - k} x^\nu$$

grâce à la relation  $\binom{n}{j} \binom{n-j}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{j}$ . On a donc

$$f_n(x) = \sum_k \binom{n}{k} \lambda(k) \sum_j \binom{n-k}{j} x^{3j+k} \sum_\ell \binom{k}{\ell} x^\ell \\ = \sum_k \binom{n}{k} \lambda(k) [x(1+x)]^k (1+x^3)^{n-k}.$$

On a finalement

$$\begin{aligned}
 M_{-n} &= \frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)^n} \prod_p \sum_k \binom{n}{k} \lambda(k)(-1)^k \left[ \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^3}\right)^{-1} \right]^k \\
 &= \frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)^n} \prod_p \sum_k \binom{n}{k} \lambda(k)(-1)^k \left( \frac{p}{p^2 + p + 1} \right)^k.
 \end{aligned}$$

Il reste à prouver que  $\lambda(k) = R_k$ , ce qu'on fait dans le lemme suivant.  $\square$

LEMME 12. – Soit  $k \geq 0$  un entier. On définit  $\lambda(k)$  comme en (4) et (5). Alors,  $\lambda(k) = R_k$ .

Démonstration. – Pour  $k \leq 2$ , c'est évident. Pour  $i = k - 1$ , l'équation (4) est équivalente à

$$2(\delta_1 + \dots + \delta_{k-1}) - \delta_{k-1} \leq 2k - 2$$

et compte tenu de (5), on en déduit que  $\delta_{k-1} = 2$ . Il faut donc compter les vecteurs  $\delta \in \{0, 1, 2\}^{k-2}$  telle que (4) est vérifiée pour tout  $i$  de  $[1, k - 2]$  et vérifiant

$$\text{tr } \delta = k - 2.$$

En posant  $\delta'_i = \delta_i - 1$  pour tout  $i$ , on est ramené à compter les vecteurs  $\delta' \in \{-1, 0, 1\}^{k-2}$  vérifiant les deux conditions

(1) pour tout  $i \in [1, k - 2]$ ,

$$\delta'_1 + \dots + \delta'_i \leq \frac{1 + \delta'_i}{2},$$

(2)  $\delta'_1 + \dots + \delta'_{k-2} = 0$ .

Par définition, il y a  $R_k$  tels vecteurs.  $\square$

Remarque 13. – D'après des calculs effectués par le rapporteur de cet article, les polynômes  $\ell_n$  sont irréductibles pour  $n \leq 14$ . Pour  $n \leq 11$ , le groupe de Galois associé est le groupe symétrique; le discriminant du corps de nombre correspondant n'est divisible que par des nombres premiers  $p \leq 2n$  et, en particulier, toujours par le plus grand de ceux-ci.

### 2.2. Expression analytique des moments négatifs

On déduit immédiatement du lemme 4 et de la proposition 11 le

LEMME 14. – Pour tout  $x \in [0, \frac{1}{3}]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 \ell_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 [1 + (1 - t^2)x]^n \sqrt{4 - t^2} dt \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} [1 + x - 4x \sin^2 \theta]^n \cos^2 \theta d\theta.
 \end{aligned}$$

Remarque 15. – Il résulte immédiatement de ce lemme que  $\ell_n(x) > 0$  pour tout  $x \in [0, \frac{1}{3}]$ .

### 2.3. Expression hypergéométrique des moments négatifs

On donne une expression de  $\ell_n$  en fonction d'une série hypergéométrique. Commençons par rappeler la définition des séries hypergéométriques. Soit  $\xi \in \mathbb{C}$ ; on définit pour tout naturel entier  $n$  le complexe

$$(\xi)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0; \\ \prod_{i=0}^{n-1} (\xi + i) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Soient alors  $a, b$  et  $c$  trois complexes avec  $-c \notin \mathbb{N}$ . La série hypergéométrique associée à  $a, b, c$  est

$$F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Cette série est convergente pour  $|z| < 1$ . Si  $\Re c > \Re b > 0$  et  $z \notin [1, +\infty[$ , on a l'expression intégrale suivante [4, 9.111]

$$(6) \quad F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-b-1} (1-uz)^{-a} du$$

qui fournit un prolongement analytique de  $z \mapsto F(a, b, c, z)$  à  $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ . On aura aussi besoin de l'égalité [4, 9.131.1]

$$(7) \quad F(a, b, c, z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b, c, \frac{z}{z-1}\right).$$

On montre alors le

LEMME 16. – Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, \frac{1}{3}]$ . Alors

$$\ell_n(x) = (1+x)^n F\left(-n, \frac{1}{2}, 2, \frac{4x}{1+x}\right).$$

*Démonstration.* – En remarquant que

$$\ell_n(x) = (1+x)^n \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left(1 - \frac{4x}{1+x} u\right)^n (1-u)^{1/2} u^{-1/2} du$$

on a l'expression donnée dans le lemme grâce à (6).  $\square$

### 2.4. Estimation asymptotique des moments

Dans cette partie, on montre le corollaire A puis le corollaire B.

On note  $x_p = \frac{p}{p^2+p+1}$  avec  $p$  premier. Ainsi, pour tout premier  $p$  on a

$$x_p \leq \frac{2}{7} < \frac{1}{3}.$$

De l'expression

$$\ell_n(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1+x-4x\sin^2\theta)^n \cos^2\theta \, d\theta$$

on déduit

$$\ell_n(x_p) \leq (1+x_p)^n$$

puis

$$(8) \quad \ln \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ nx_p > 1}} \frac{\ell_n(x_p)}{(1+x_p)^n} \leq 0.$$

On fixe

$$\delta = \sqrt{\frac{1+x_p}{8(n+1)x_p}}.$$

On a donc, pour  $nx_p > 1$ ,

$$\delta \leq \frac{3}{\sqrt{56}} < \frac{\pi}{2}.$$

On a alors, toujours pour  $nx_p > 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\ell_n(x_p)}{(1+x_p)^n} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{4x_p}{1+x_p} \sin^2\theta\right)^n \cos^2\theta \, d\theta \\ &\geq \left(1 - \frac{4x_p}{1+x_p} \sin^2\delta\right)^n \frac{4}{\pi} \int_0^{\delta} \cos^2\theta \, d\theta \\ &\geq \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{4x_p}{1+x_p} \delta^2\right)^n \delta \\ &\geq \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)^n \sqrt{\frac{1+x_p}{4x_p}} \sqrt{\frac{1}{2(n+1)}}. \end{aligned}$$

En notant  $q_n(p)$  le membre de droite de la dernière inégalité, on a

$$(9) \quad \ln \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ nx_p > 1}} q_n(p) = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ nx_p > 1}} \left[ \ln \frac{1}{\pi\sqrt{2}} + n \ln \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) \right] \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ nx_p > 1}} \left[ \ln \left(p + 2 + \frac{1}{p}\right) - \ln(n+1) \right] = O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

grâce au théorème des nombres premiers. On déduit de (8), (9) et de

$$\ln \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ nx_p > 1}} (1+x_p)^n = n \ln \ln n + n \ln \frac{\zeta(3)e^\gamma}{\zeta(2)^2} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

que

$$\ln \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ nx_p > 1}} \ell_n(x_p) = n \ln \ln n + n \ln \frac{\zeta(3)e^\gamma}{\zeta(2)^2} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Enfin, on estime la contribution des grands premiers. Puisque  $\ell_n(0) = 1$ , on a, pour tout réel  $x$  tel que  $0 \leq nx \leq 1$ , les égalités

$$\begin{aligned} \ell_n(x) - 1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 \{[1 + (1 - t^2)x]^n - 1\} \sqrt{4 - t^2} dt \\ &= \frac{nx}{\pi} \int_0^2 (1 - t^2) \sqrt{4 - t^2} dt + O(n^2 x^2). \end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^2 (1 - t^2) \sqrt{4 - t^2} dt = 0$$

donc

$$\ln \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ nx_p < 1}} \ell_n(x_p) = \sum_{p \geq n} \ln \left[ 1 + O\left(\frac{n^2}{p^2}\right) \right] = O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Le développement

$$\ln M_{-n} = n \ln \ln n + n \ln \frac{e^\gamma}{\zeta(2)^2} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

résulte de la proposition 11 et la preuve du corollaire A est achevée.

Le corollaire B résulte, par l'absurde, de la minoration : s'il était faux, on pourrait construire une sous-suite de  $(M_{-n}(N))_{N \in \mathbb{N}}$  dont la limite serait majorée par  $C^n$  et serait donc différente de  $M_{-n}$ .

### 3. Moments de $L(f, 1)$ et nombres de Catalan

Si  $f \in H(N)$ , si  $\hat{f}(n)$  est son  $n^e$  coefficient de Fourier, on définit  $\lambda_f(n) = \hat{f}(n)n^{(1-k)/2}$ . La fonction  $L$  de  $f$  est définie par

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_f(n)n^{-s}.$$

Cette série, définie sur  $\Re s > 1$ , admet un prolongement en fonction entière et vérifie une équation fonctionnelle qui confère à la bande  $\{s \in \mathbb{C} : \Re s \in ]0, 1[ \}$  le statut de bande critique. On appelle facteur harmonique le réel

$$(10) \quad \omega_N(f) = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}(f, f)} = \frac{12}{(k-1)N} \frac{\zeta(2)}{L(\text{sym}^2 f, 1)}$$

où  $(f, f)$  est la norme de Petersson de  $f$  [13, §2.1]. On a alors la formule de Petersson (voir, par exemple, [13, Proposition 1]) : pour tout entier  $m$  premier à  $N$ ,

$$(11) \quad \sum_{f \in H(N)} \omega_N(f) \lambda_f(m) = \delta(m = 1) + O\left((mN)^\varepsilon m^{1/4} N^{-1} + \frac{2\omega(N)}{p_1(N)} \delta(m = 1)\right).$$

Le choix de  $m = 1$  montre que le facteur harmonique permet de définir un opérateur de moyenne. En particulier, si  $n \in \mathbb{Z}$ , on appelle moment harmonique d'ordre  $n$  de  $L(f, 1)$  le réel

$$H_n(N) = \sum_{f \in H(N)} \omega_N(f) L(f, 1)^n.$$

*Remarque 17.* – L'étude des moments harmoniques est naturelle dans le cadre de l'analyse. Des techniques ont été développées pour passer des moyennes harmoniques aux moyennes naturelles (voir en particulier [10] et [7]) et semblent prouver que l'introduction du poids harmonique est neutre.

On a alors le

LEMME 18. – Soit  $n \geq 1$  un entier. La suite  $(H_{-n}(N))_{N \in \mathbb{N}}$  admet, lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ , une limite  $H_{-n}$ . Soit  $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ , on définit

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{a}) = \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{N}^{n-1} : d_i \mid \left( \frac{a_1 \cdots a_i}{(d_1 \cdots d_{i-1})^2}, a_{i+1} \right), \forall i \in [1, n-1] \right\}$$

puis, pour tout  $r \in \mathbb{N}$ ,

$$h_n(r) = \sum_{\substack{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n \\ \det \mathbf{a} \mathbf{b}^2 = r}} \prod_{i=1}^n \mu(a_i) \mu(a_i b_i)^2 \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathcal{F}_n(\mathbf{a}) \\ \det \mathbf{a} = \det \mathbf{d}^2}} 1.$$

On a alors,

$$H_{-n} = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{h_{-n}(r)}{r}.$$

*Démonstration.* – La preuve suivant pas à pas celle de [13, Théorème 1], on omet les détails. Si  $\eta > 0$  est un paramètre réel fixé suffisamment petit, on définit l'ensemble  $H^+(N; \eta)$  par

$$\{f \in H(N); L(f, s) \neq 0, \forall s = \sigma + it, \sigma > 1 - \eta, |t| \leq \ln^3 N\}$$

et  $H^-(N; \eta) = H(N) \setminus H^+(N; \eta)$ . Grâce à un théorème de Kowalski & Michel (généralisant un résultat de Linnik pour les caractères de Dirichlet) [11, théorème 1], il existe  $b > 0$  absolue telle que  $\#H^-(N; \eta) \ll N^{b\eta}$ . Cela permet de ne calculer les moments que sur un ensemble de formes primitives respectant une *quasi* hypothèse de Riemann. Pour tous  $\alpha$  et  $\varepsilon$  réels positifs assez petits, on a alors, pour  $f \in H^+(N; \eta)$ ,

$$L(f, 1)^{-n} = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\lambda_f^{(-n)}(r)}{r} \exp(-r/N^\alpha) + O(N^{\varepsilon - \alpha\eta/2})$$



où  $\lambda_f^{(-n)}$  est défini par

$$L(f, s)^{-n} = \sum_{r=1}^{+\infty} \lambda_f^{(-n)}(r) r^{-s},$$

autrement dit (voir, par exemple, [10, lemme 9]),

$$\lambda_f^{(-n)}(r) = \sum_{\substack{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n \\ \det \mathbf{a} \mathbf{b}^2 = r \\ (b_1, N) = \dots = (b_n, N) = 1}} \prod_{i=1}^n \mu(a_i) \mu(a_i b_i)^2 \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathcal{F}_n(\mathbf{a}) \\ (d_1, N) = \dots = (d_{n-1}, N) = 1}} \lambda_f \left( \frac{\det \mathbf{a}}{\det \mathbf{d}^2} \right).$$

On achève la démonstration grâce à (11).  $\square$

On obtient alors le

LEMME 19. – Soit  $n \geq 1$  un entier. Pour tout entier  $\nu \geq 0$  on définit  $a_n(\nu)$  comme le cardinal de l'ensemble des triplets de vecteurs  $(\alpha, \beta, \delta)$  de  $\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^{n-1}$  vérifiant

- (1) pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $0 \leq \alpha_i + \beta_i \leq 1$ ,
- (2) pour tout  $i \in [1, n - 1]$ ,

$$\delta_i \leq \min(\alpha_1 + \dots + \alpha_i - 2\delta_1 - \dots - 2\delta_{i-1}, \alpha_{i+1}),$$

- (3)  $\text{tr}(\alpha + 2\beta) = \nu$ ,
- (4)  $\text{tr} \alpha = 2 \text{tr} \delta$ .

On a alors

$$H_{-n} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{a_n(\nu)}{p^\nu}.$$

Démonstration. – Par multiplicativité, on obtient la formule énoncée avec

$$a_n(\nu) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \{0, 1\}^n \\ \text{tr}(\alpha + 2\beta) = \nu \\ 0 \leq \alpha_i + \beta_i \leq 1}} (-1)^{\text{tr} \alpha} \sum_{\substack{\delta \in \mathbb{N}^{n-1} \\ \delta_i \leq \min(\alpha_1 + \dots + \alpha_i - 2(\delta_1 + \dots + \delta_{i-1}), \alpha_{i+1}) \\ \text{tr} \alpha = 2 \text{tr} \delta}} 1.$$

La relation  $\text{tr} \alpha = 2 \text{tr} \delta$  implique  $(-1)^{\text{tr} \alpha} = 1$  d'où le résultat.  $\square$

On déduit du lemme précédent la

PROPOSITION 20. – Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $s_n$  le polynôme

$$s_n(X) = \sum_{j=0}^{n/2} \binom{n}{2j} C_j X^{2j}.$$

Alors

$$H_{-n} = \frac{\zeta(2)^n}{\zeta(4)^n} \prod_{p \in \mathcal{P}} s_n \left( \frac{p}{p^2 + 1} \right).$$

Démonstration. – Dans la définition de  $a_n(\nu)$ , on note  $j$  le nombre d'indices  $i$  tels que  $\alpha_i = 0$ . On a alors  $\alpha_i = 1$  pour les  $n - j$  indices restants. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 a_n(\nu) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \# \left\{ \beta \in \{0, 1\}^j : \text{tr } \beta = \frac{\nu - (n-j)}{2} \right\} \lambda(n-j) \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \# \left\{ \beta \in \{0, 1\}^{n-j} : \text{tr } \beta = \frac{\nu - j}{2} \right\} \lambda(j)
 \end{aligned}$$

avec

$$\lambda(j) = \# \{ \delta \in \{0, 1\}^{j-1} : \delta_i \leq \min(i - 2\delta_1 - \dots - 2\delta_{i-1}, 1), \forall i \in [1, j-1] \text{ tr } \delta = j \}.$$

En notant que  $\lambda(j) = 0$  si  $j$  est impair, on pose

$$\alpha(j) = \lambda(2j)$$

pour obtenir

$$a_n(2\nu) = \sum_{j=0}^{n/2} \binom{n}{2j} \binom{n-2j}{\nu-j} \alpha(j).$$

On a ensuite

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{a_n(2\nu)}{p^{2\nu}} = \left( 1 + \frac{1}{p^2} \right)^n \sum_{j=0}^{n/2} \binom{n}{2j} \alpha(j) \left( \frac{p}{p^2+1} \right)^{2j}.$$

Une fois qu'on a remarqué que  $a_n(\nu) = 0$  si  $\nu$  est impair, il reste à montrer que  $\alpha(j) = C_j$ . C'est l'objet du lemme suivant.  $\square$

LEMME 21. – Soit  $n \geq 1$  un entier et

$$\alpha(n) = \# \{ \delta \in \{0, 1\}^{2n-1} : \delta_i \leq i - 2(\delta_1 + \dots + \delta_{i-1}), \forall i \in [1, 2n-1] \text{ tr } \delta = n \}.$$

Alors  $\alpha(n) = C_n$ .

Démonstration. – On remarque que les conditions

$$\delta_{2n-1} \leq 2n-1 - 2(\delta_1 + \dots + \delta_{2n-2})$$

et

$$\delta_1 + \dots + \delta_{2n-1} = n$$

impliquent  $\delta_{2n-1} = 1$ . On a donc  $\alpha(1) = 1$  et, si  $n \geq 2$ ,

$$\alpha(n) = \# \{ \delta \in \{0, 1\}^{2n-2} : \delta_i \leq i - 2(\delta_1 + \dots + \delta_{i-1}), \forall i \in [1, 2n-2] \text{ tr } \delta = n-1 \}.$$

Par changement  $\delta'_i = 2\delta_i - 1$  (puis modification de notations) on obtient

$$\alpha(n) = \# \left\{ \delta \in \{-1, 1\}^{2n-2} : \delta_1 + \dots + \delta_i \leq \frac{1 + \delta_i}{2}, \forall i \in [1, 2n-2] \text{ tr } \delta = 0 \right\}.$$

Autrement dit, on compte les chemins  $\alpha$  vérifiant

- (1) le chemin relie  $(0, 0)$  à  $(2n-2, 0)$ ;
- (2) les pas sont  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ ;

(3) le chemin reste sous l'axe des abscisses ;

(4) la règle (3) peut être violée mais le chemin ne dépasse alors l'axe des abscisses que par des pointes  $(1, 1), (1, -1)$ .

Soit  $i$  un entier impair, il n'existe pas de chemin reliant  $(0, 0)$  à  $(i, 0)$  et respectant la règle (2). L'abscisse de la première pointe d'un chemin  $\alpha$  (lorsqu'elle existe) est donc paire et on a

$$\alpha(n) = C_n + \sum_{i=0}^{n-3} C_i \alpha(n-i-1) + C_{n-1}.$$

En notant

$$A(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha(i)x^i$$

et, puisque  $\alpha(0) = \alpha(1) = C_0 = C_1$  on a

$$A(x) = \frac{1}{1-xC(x)}.$$

Il résulte alors de la valeur de  $C$  que  $A = C$  puis que  $\alpha(n) = C_n$  pour tout  $n$ .  $\square$

On déduit immédiatement du lemme 6 et de la proposition 20 le

LEMME 22. – Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 (1+tx)^n \sqrt{4-t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+2x \sin \theta)^n \cos^2 \theta d\theta.$$

De ce lemme, on déduit le

LEMME 23. – Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1/2]$ ,

$$s_n(x) = (1+2x)^n F\left(-n, \frac{3}{2}, 3, \frac{4x}{2x+1}\right).$$

*Démonstration.* – Le changement de variable

$$\theta = \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{2+t}{2-t}}$$

conduit à

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 (1+tx)^n \sqrt{4-t^2} dt = \frac{16}{\pi} (1-2x)^n \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{4x}{2x-1} \sin^2 \theta\right)^n (1-\sin^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta.$$

On conclut grâce au changement de variable  $u = \sin^2 \theta$  et à (6) que

$$s_n(x) = (1-2x)^n F\left(-n, \frac{3}{2}, 3, \frac{4x}{2x-1}\right).$$

Enfin, le résultat énoncé est donné par (7).  $\square$

Le corollaire C se démontre alors comme le corollaire A (voir §2.4) avec

$$x_p = \frac{p}{p^2 + 1} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{\frac{3(1 + 2x_p)}{(2n + 3)x_p}}.$$

## Remerciements

Je remercie vivement Étienne Fouvry, Régis de la Bretèche et Karim Belabas pour leurs encouragements répétés et les fructueuses discussions que nous avons eues. Je remercie également Laurent Habsieger et Jie Wu pour leurs relectures attentives.

## RÉFÉRENCES

- [1] BARBAN M.B., The “large sieve” method and its application to number theory, *Uspehi Mat. Nauk* **21** (1) (1966) 51–102. Traduction anglaise disponible dans *Russian Math. Surveys* **21** (1) (1966) 49–103.
- [2] FREY G., On ternary equations of Fermat type and relations with elliptic curves, in: *Modular Forms and Fermat’s Last Theorem (Boston, MA, 1995)*, Springer, New York, 1997, pp. 527–548.
- [3] GOLDFELD D., HOFFSTEIN J., LIEMAN D., An effective zero-free region, *Ann. of Math. (2)* **140** (1) (1994) 177–181, Appendice de [6].
- [4] GRADSHTEYN I.S., RYZHIK I.M., *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 1980. Corrected and enlarged edition edited by A. Jeffrey, incorporating the fourth edition edited by Yu.V. Geronimus and M.Yu. Tseytlin. Translated from the Russian.
- [5] GRANVILLE A., SOUNDARARAJAN K., *The distribution of values of  $L(1, \chi)$* , Préimprimé, 2001.
- [6] HOFFSTEIN J., LOCKHART P., Coefficients of Maass forms and the Siegel zero, *Ann. of Math. (2)* **140** (1) (1994) 161–181, avec un appendice de D. Goldfeld, J. Hoffstein, D. Lieman.
- [7] IWANIEC H., LUO W., SARNAK P., Low lying zeros of families of  $L$ -functions, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **91** (2000) 55–131.
- [8] IWANIEC H., SARNAK P., Perspectives on the analytic theory of  $L$ -functions, *Geom. Funct. Anal. Special Volume, Part II* (2000) 705–741, GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999).
- [9] IWANIEC H., Small eigenvalues of Laplacian for  $\Gamma_0(N)$ , *Acta Arith.* **56** (1) (1990) 65–82.
- [10] KOWALSKI E., MICHEL P., The analytic rank of  $J_0(q)$  and zeros of automorphic  $L$ -functions, *Duke Math. J.* **100** (3) (1999) 503–542.
- [11] KOWALSKI E., MICHEL P., Zeros of families of automorphic  $L$ -functions close to 1 and applications, *Pacific J. Math.*, à paraître.
- [12] LUO W., Values of symmetric square  $L$ -functions at 1, *J. Reine Angew. Math.* **506** (1999) 215–235.
- [13] ROYER E., Statistique de la variable aléatoire  $L(\text{sym}^2 f, 1)$ , *Math. Ann.* **321** (3) (2001) 667–687.
- [14] STANLEY R.P., *Enumerative Combinatorics, Vol. 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

(Manuscrit reçu le 21 avril 2002 ;  
accepté, après révision, le 17 novembre 2002.)

Emmanuel ROYER  
 Université Montpellier 2,  
 I 3M-CC051,  
 F-34095 Montpellier cedex 5, France  
 Université Montpellier 3,  
 MIAp, Route de Mende,  
 F-34199 Montpellier cedex 5, France  
 E-mail : emmanuel.royer@polytechnique.org,  
 royer@darboux.math.univ-montp2.fr