Math. Ann. 321, 667–687 (2001) **Mathematische Annalen**

Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s002080100244

Statistique de la variable aléatoire $L(sym^2 f, 1)$

Emmanuel Royer

Received: 31 October 2000 / Accepted: 23 February 2001 /
Published online: 23 July 2001 –

Résumé. On étudie la statistique de la valeur en 1 de la fonction L de carré symétrique d'une forme primitive en calculant ses moments positifs et négatifs. On en déduit des propriétés de la répartition de ces valeurs.

Abstract. We study the statistic of the value at 1 of the L function of the symmetric square of a primitive form computing its postive and negative moments. We deduce properties of the distribution of these values.

Mathematics Subject Classification (2000): 11F11, 11F67, 60B10, 60E10

1 Introduction

Soit κ un réel, $0 < \kappa \leq 1$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des entiers sans facteur carré N de plus petit facteur premier $p_1(N) \geq N^\kappa$. On étudie dans cet article la variable aléatoire qui associe à une forme f de l'ensemble $H(N)$ des formes primitives de niveau N la valeur en 1 de la fonction L associée au carré symétrique de f, soit

$$\begin{aligned} L(sym^2, 1) : H(N) &\to \qquad \mathbb{R} \\ f \quad &\mapsto L(sym^2 f, 1) \end{aligned}$$

lorsque N parcourt $\mathcal{N}$. On montre que ces variables aléatoires admettent une variable aléatoire limite $L(sym^2, 1)_\infty$ dont on calcule les moments dans le

Théorème A *Soit $n \geq 1$ un entier. Soit*

$$M_n(N) = \frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f \in H(N)} L(sym^2 f, 1)^{n-1}.$$

Alors, lorsque N parcourt $\mathcal{N}$ il existe un réel M_n tel que

$$\lim_{N \to \infty} M_n(N) = M_n.$$

E. Royer
Université Paris-Sud, bâtiment 425, F-91405 Orsay cedex, France
(e-mail: emmanuel.royer@polytechnique.org

On définit pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ *l'ensemble*

$$\mathcal{E}_n(\mathbf{b}) = \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{N}^{n-1};\, d_i \,|\left(\frac{b_1 \cdots b_i}{d_1 \cdots d_{i-1}}, b_{i+1} \right)^2,\ 1 \leq i \leq n-1 \right\}$$

puis pour tout $r \geq 1$ *entier*

$$m_n(r) = \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n \\ \det \mathbf{b} = r}} \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathcal{E}_n(\mathbf{b}) \\ \det \mathbf{d} = \det \mathbf{b}}} 1.$$

On a alors

$$M_n = \zeta(2)^{n-1} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{m_n(r)}{r}.$$

La variable aléatoire $L(sym^2, 1)$ *admet lorsque* N *parcourt* $\mathcal{N}$ *une variable aléatoire limite* $L(sym^2, 1)_\infty$ *dont le moment d'ordre* $n-1$ *est* M_n*. En particulier, l'espérance de* $L(sym^2, 1)_\infty$ *est*

$$E[L(sym^2, 1)_\infty] = \zeta(2)^2$$

et sa variance

$$\mathrm{Var}[L(sym^2, 1)_\infty] = \zeta(2)^4 \left[\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} - 1 \right] \approx 6,908.$$

Dans cet énoncé, et dans toute la suite, $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et les lettres grasses telles que $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$... désignent des vecteurs. Leurs coordonnées seront numérotées en indice, ainsi $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Le déterminant – noté det – d'un vecteur est le produit de ses coordonnées, ainsi $\det \boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 \cdots \alpha_m$. La trace – notée tr – d'un vecteur désigne la somme de ses coordonnées, ainsi $\mathrm{tr}\, \boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$. Le produit de deux vecteurs est le vecteur de même dimension obtenu en multipliant entre elles les coordonnées de même indice, ainsi $\boldsymbol{\alpha\beta} = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_m\beta_m)$. Enfin, on a fait les conventions $\mathbb{N}^0 = \{1\}$, $\mathcal{E}_1(\mathbf{b}) = \{1\}$ et $d_1 \cdots d_0 = 1$.

La preuve utilise crucialement le fait, prouvé par Gelbart et Jacquet, que la fonction $L(sym^2 f, s)$ est la fonction L d'une forme automorphe de GL_3 et la théorie de la convolution de Rankin-Selberg pour ce groupe. Par des techniques dérivées du grand crible et utilisées par Luo et Kowalski-Michel on exprime $L(sym^2 f, 1)$ comme un polynôme de Dirichlet court en moyenne. Ce résultat est analogue et a été inspiré par les travaux de Luo [9] dans le cas des formes de Maaß pour $SL(2, \mathbb{Z})$. En particulier, les moments sont les mêmes. On obtient un encadrement plus précis des moments que celui obtenu par Luo dans le

Théorème B *Pour tout entier* $n \geq 2$ *on a*

$$\ln M_n = 3n \ln \ln n + O(n).$$

En fait, ces techniques permettent également le calcul (inspiré par un travail ultérieur de Luo [10]) des moments négatifs.

Théorème C *Soit $n \geq 1$ un entier. On définit pour tout $r \geq 1$ entier*

$$m_{-n}(r) = \sum_{\substack{\mathbf{a},\,\mathbf{b},\,\mathbf{c}\in\mathbb{N}^n \\ \det \mathbf{a}\mathbf{b}^2\mathbf{c}^3 = r}} \mu(a_1b_1c_1)\cdots\mu(a_nb_nc_n)\mu(b_1)\cdots\mu(b_n) \sum_{\substack{\mathbf{d}\in\mathcal{E}_n(\mathbf{ab}) \\ \det \mathbf{ab} = \det \mathbf{d}}} 1.$$

Le moment négatif d'ordre $-n-1$ de $L(sym^2, 1)_\infty$ est donné par

$$M_{-n} = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{m_{-n}(r)}{r}.$$

Remarque Avec la convention $\mathcal{E}_0(1) = \{1\}$, ce théorème reste valable pour $n = 0$. Voir la Remarque 2.

Enfin, soit q un nombre premier, on considére $L^{(q)}(sym^2, 1)$, la variable aléatoire obtenue de $L(sym^2, 1)$ par division par le q-ième facteur eulerien (voir Sect. 2.2) et on prouve le résultat d'indépendance

Proposition A *Soit q un nombre premier. Les variables aléatoires limites, lorsque N parcourt $\mathcal{N}$ en restant premier à q, des variables aléatoires*

$$\begin{aligned} \lambda(q) : H(N) &\to \quad \mathbb{R} \\ f \quad &\mapsto \lambda_f(q) \end{aligned}$$

et $L^{(q)}(sym^2, 1)$ sont indépendantes.

On rappelle que deux variables aléatoires sont indépendantes lorsque la fonction de distribution cumulative du couple qu'elles forment est le produit des fonctions de distribution cumulative de chacune d'elles.

Remerciements. Je remercie les Professeurs P. Michel et É. Fouvry pour leurs conseils et encouragements. Je remercie aussi R. De La Bretèche pour les nombreuses discussions bénéfiques que nous avons eues.

2 Cadre

2.1 Formes primitives

Soit N un entier strictement positif et k un entier pair strictement positif. On note $S(N)$ l'espace hermitien des formes paraboliques de poids k et de niveau N muni du produit scalaire de Petersson

$$(f, g) = \int_{D_0(N)} f(z)\overline{g(z)} y^k \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2} \quad \big(f, g \in S(N)\big)$$

où $D_0(N)$ est un domaine fondamental du quotient à gauche de $\mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ par $\Gamma_0(N)$ pour l'action homographique (voir par exemple [6, Sects. 2.7 et 3.3]).

Pour tout entier strictement positif n on note T_n le *n-ième opérateur de Hecke* (voir par exemple [6, ch. 6]) défini par

$$\begin{aligned} T_n : S(N) &\to S(N) \\ f &\mapsto \frac{1}{n} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0 \\ (a,N)=1}} a^k \sum_{b=0}^{d-1} f\Big(\frac{az+b}{d}\Big). \end{aligned}$$

On note $H(N)$ l'ensemble des formes primitives de poids k et de niveau N. C'est une base de l'espace des formes nouvelles par rapport à N de poids k et de niveau N. Il n'y a donc qu'un nombre fini de formes primitives de poids k et de niveau N. On note τ la fonction nombre de diviseurs. On a alors

$$\sharp H(N) = \frac{k-1}{12}\psi^{\mathrm{new}}(N) + O\big(N^{1/2}\tau^3(N)\big)$$

avec une constante absolue. Pour une définition de ψ^{new} et une preuve de ce résultat, on peut se reporter à [11, Sect. 5]. Il nous suffit de savoir que, si N est sans facteur carré alors $\psi^{\mathrm{new}}(N) = \varphi(N)$ avec φ la fonction d'Euler. Si f est primitive de niveau N, alors pour tout entier n (même non premier à N) elle est vecteur propre de T_n et on a

$$T_n f = \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} f \quad (f \in H(N),\ n \in \mathbb{N}^*).$$

Les valeurs $\lambda_f(n)$ sont reliées entre elles par une relation de multiplicativité. Pour tous m et n on a

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d\mid(m,n) \\ (d,N)=1}} \lambda_f\Big(\frac{mn}{d^2}\Big) \cdot$$

On a la majoration de Deligne

$$|\lambda_f(m)| \le \tau(m).$$

Pour p premier ne divisant pas N, on a en particulier

$$\lambda_f(p) = 2\,\Re e\,\alpha_f(p)$$

avec $|\alpha_f(p)| = 1$.

2.2 Fonction L de carré symétrique

Soit N un entier strictement positif sans facteur carré. La fonction L de carré symétrique d'une forme $f \in H(N)$ est définie pour $\Re e\, s > 1$ par

$$L(sym^2 f, s) = \zeta^{(N)}(2s) \sum_{r=1}^{+\infty} \lambda_f(r^2) r^{-s}$$

avec

$$\zeta^{(N)}(s) = \sum_{\substack{r=1 \\ (r,N)=1}}^{+\infty} r^{-s}.$$

Pour $\Re e(s) > 1$, la fonction $L(sym^2 f, s)$ admet le développement en produit eulerien

$$L(sym^2 f, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} L(sym_p^2 f, s)$$

où $L(sym_p^2 f, s)$ est défini par

$$[1 - \alpha_f(p)^2 p^{-s}]^{-1} [1 - \alpha_f(p)^{-2} p^{-s}]^{-1} (1 - p^{-s})^{-1} \text{ si } (p, N) = 1$$

et

$$(1 - p^{-1} p^{-s})^{-1} \text{ si } p | N.$$

On définit

$$L(sym_\infty^2 f, s) = \pi^{-3s/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right).$$

La fonction $L(sym_\infty^2 f, s) L(sym^2 f, s)$ est entière (ceci se prouve grâce aux travaux de Rankin et Shimura : Shimura a prouvé que $L(sym^2 f, s)$ a un prolongement holomorphe sauf en un éventuel pôle en $s = 0$ [12, theorem 1, theorem 2]. Mais, Rankin a prouvé que la fonction $\zeta^{(N)}(s) L(sym^2 f, s)$ est méromorphe avec comme seul pôle $s = 1$. Ainsi, $L(sym^2 f, s)$ est holomorphe aussi en $s = 0$). Grâce aux travaux de Li [8, Sect. 4], on sait qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle valable sur $\mathbb{C}$ donnée par

$$L(sym_\infty^2 f, s) L(sym^2 f, s) = (N^2)^{-s+1/2} L(sym_\infty^2 f, 1-s) L(sym^2 f, 1-s).$$

La définition de $L(sym^2 f, s)$ permet d'avoir le développement en série de Dirichlet de $L(sym^2 f, s)$ pour s tel que $\Re e\, s > 1$. Si

$$\rho_f^+(r) = \sum_{\substack{m^2 \ell = r \\ (m,N)=1}} \lambda_f(\ell^2)$$

alors

$$L(sym^2 f, s) = \sum_{r=1}^{+\infty} \rho_f^+(r) r^{-s}.$$

Pour tout entier $n \geq 0$ et tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$, on définit l'ensemble

$$\mathcal{E}_n(\mathbf{b}) = \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{N}^{n-1} ; d_i | \left(\frac{b_1 \cdots b_i}{d_1 \cdots d_{i-1}}, b_{i+1} \right)^2, \ 1 \leq i \leq n-1 \right\}$$

avec les conventions $\mathbb{N}^0 = \{1\}$, $\mathcal{E}_1(\mathbf{b}) = \{1\}$, $\mathcal{E}_0(1) = \{1\}$ et $d_1 \cdots d_0 = 1$. On a alors

$$L(sym^2 f, s)^n = \sum_{r=1}^{+\infty} \rho_f^{(+n)}(r) r^{-s}$$

avec

$$\rho_f^{(+n)}(r) = \sum_{\substack{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n \\ \det \mathbf{a}^2 \mathbf{b} = r \\ (a_1, N) = \cdots = (a_n, N) = 1}} \ \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathcal{E}_n(\mathbf{b}) \\ (d_1, N) = \cdots = (d_n, N) = 1}} \lambda_f \left[\left(\frac{b_1 \cdots b_n}{d_1 \cdots d_{n-1}} \right)^2 \right].$$

Enfin, par comparaison des développements euleriens pour tout s tel que $\Re e\, s > 1$, on a

$$L(sym^2 f, s)^{-1} = \sum_{r=1}^{+\infty} \rho_f^-(r) r^{-s}$$

avec $\rho_f^-(r)$ défini par

$$\rho_f^-(r') \rho_f^-(r'') \quad \text{si } r = r'r'', \ r' | N^\infty, \ (r'', N) = 1$$

et

$$\begin{cases} \mu(r) r^{-1} & \text{si } r | N^\infty \ ; \\ \mu(abc) \mu(b) \lambda_f(a^2 b^2) & \text{si } (r, N) = 1 \text{ et } r = ab^2c^3 \text{ avec } \mu(abc) \neq 0 \ ; \\ 0 & \text{si } (r, N) = 1 \text{ et } r \text{ a un facteur bicarré.} \end{cases}$$

On a alors, pour tout $n \geq 0$ entier

$$L(sym^2 f, s)^{-n} = \sum_{r=1}^{+\infty} \rho_f^{(-n)}(r) r^{-s}$$

avec, si $(r, N) = 1$, la définition

$$\rho_f^{(-n)}(r) = \sum_{\substack{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{N}^n \\ \det \mathbf{a}\mathbf{b}^2 \mathbf{c}^3 = r}} \mu(a_1 b_1 c_1) \cdots \mu(a_n b_n c_n) \mu(b_1) \cdots \mu(b_n)$$
$$\times \sum_{\mathbf{d} \in \mathcal{E}_n(\mathbf{ab})} \lambda_f \left[\left(\frac{a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_n}{d_1 \cdots d_{n-1}} \right)^2 \right].$$

Pour tout r et tout $\varepsilon > 0$, $\rho_f^{(\pm n)}(r) \ll r^{\varepsilon}$ avec une constante dépendant de ε et n.

Enfin, grâce aux travaux de Golfeld, Hoffstein et Lieman [3] on a

$$L(sym^2 f, 1) + L(sym^2 f, 1)^{-1} \ll \ln(kN) \tag{1}$$

et d'après le Lemme 2.5 de [5] on a, pour $f \in H(N)$ l'égalité

$$L(sym^2 f, 1) = 2^{2k-1}\pi^{k+1}\Gamma(k)^{-1}N^{-1}(f, f).$$

3 La variable aléatoire $L(sym^2, 1)$

3.1 Préliminaires probabilistes

Les notions de probabilités nécéssaires à ce préliminaire sont, par exemple, données dans [1]. Soit N un entier sans facteur carré. On considère la mesure définie pour toute partie A de $H(N)$ par

$$P_N(A) = \frac{\sharp A}{\sharp H(N)}\cdot$$

On étudie la variable aléatoire

$$\begin{aligned} L(sym^2, 1) : H(N) &\to \qquad \mathbb{R} \\ f \quad &\mapsto L(sym^2 f, 1). \end{aligned}$$

La fonction de répartition cumulative associée à cette variable aléatoire est définie pour tout réel x par

$$R_N(x) = \frac{1}{\sharp H(N)}\sharp\{f \in H(N)\ ;\ L(sym^2 f, 1) \le x\}\cdot$$

Les moments de la variable $L(sym^2, 1)$ sont donnés pout tout entier n par

$$M_n(N) = \frac{1}{\sharp H(N)}\sum_{f \in H(N)} L(sym^2 f, 1)^{n-1}.$$

On a, pour tout réel $\alpha > 0$ et tout entier positif n l'inégalité de Markov

$$\frac{1}{\sharp H(N)}\sharp\{f \in H(N)\ ;\ L(sym^2 f, 1) \ge \alpha\} \le \frac{M_{n+1}(N)}{\alpha^n}\cdot \tag{2}$$

Notre but est de montrer qu'il existe une fonction de répartition cumulative R qui soit limite faible des fonctions R_N lorsque N parcourt l'ensemble $\mathcal{N}$. On dit que R_N converge faiblement vers R lorsqu'on a

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = R(x)$$

en tout point de continuité x de R. On rappelle que toute fonction croissante, continue à droite de limite nulle en $-\infty$ et 1 en $+\infty$ est la fonction de répartition cumulative d'une variable aléatoire. On notera $L(sym^2, 1)_\infty$ la variable aléatoire de fonction de répartition cumulative R et de mesure de probabilité μ. Les moments de cette variable sont les réels

$$M_n = \int_{\mathbb{R}} x^{n-1}\,\mathrm{d}\mu.$$

Pour prouver l'existence de R on utilisera le critère donné par le

Lemme 1 *Soit $(R_N)_N$ une suite de fonctions de répartition cumulative de moments $(M_{n,N})_N$. On suppose qu'il existe une suite $(M_n)_n$ telle que $M_{n,N} \to M_n$ lorsque $N \to \infty$. On suppose que la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_{n+1}}{n!}(it)^n$$

a un rayon de convergence non nul. Alors il existe une fonction de répartition cumulative R telle qu'en tout point de continuité x de R on a

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = R(x).$$

D'autre part la suite $(M_n)_n$ est la suite des moments de R.

Remarque 1 Ce lemme résulte du critère d'unique détermination des fonctions de répartition cumulative par leurs moments (voir [1, théorème 30.1]), et du théorème de Helly (voir [1, corollaire du théorème 25.10]).

3.2 Moments

3.2.1 Calculs On calcule les moments positifs et négatifs de la variable aléatoire $L(sym^2, 1)$. Dans toute la suite, on considère des formes primitives de poids *fixé* et de niveau variable. En particulier, les majorations peuvent dépendre du poids sans que cela soit indiqué. On aura besoin de la formule de trace suivante due à Iwaniec, Luo et Sarnak [5, Corollary 2.10]. Si m et n sont deux entiers, on pose $\delta(m, n) = 1$ si $m = n$ et 0 sinon.

Proposition 1 *Soit N un entier sans facteur carré et m et n des entiers tels que $(m, N) = 1$ et $(n, N^2)|N$ alors*

$$\frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f\in H(N)} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{L(sym^2 f, 1)} = \frac{1}{\zeta(2)}\delta(m,n) + O\Big(N^{-1/2}\tau^4(N)\delta(m,n) + (mn)^{1/4}(n,N)^{-1/2}\tau^2(N)\varphi(N)^{-1}\tau_3\big((m,n)\big)\ln(2mnN)\Big).$$

Remarque 2 En choisissant $m = n = 1$, cette proposition donne le moment d'ordre -1 de $L(sym^2, 1)$ sans condition sur le plus petit facteur premier du niveau.

Pour tous entiers $r \geq 1$ et $n \geq 0$, on définit les entiers

$$m_n(r) = \sum_{\substack{\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n \\ \det \mathbf{a}^2\mathbf{b}=r}} \sum_{\substack{\mathbf{d}\in\mathcal{E}_n(\mathbf{b}) \\ \det \mathbf{d}=\det \mathbf{b}}} 1$$

et

$$m_{-n}(r) = \sum_{\substack{\mathbf{a},\,\mathbf{b},\,\mathbf{c}\in\mathbb{N}^n \\ \det \mathbf{a}\mathbf{b}^2\mathbf{c}^3=r}} \mu(a_1b_1c_1)\cdots\mu(a_nb_nc_n)\mu(b_1)\cdots\mu(b_n) \sum_{\substack{\mathbf{d}\in\mathcal{E}_n(\mathbf{ab}) \\ \det \mathbf{ab}=\det \mathbf{d}}} 1.$$

On pose ensuite

$$M_{\pm n} = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{m_{\pm n}(r)}{r}.$$

Remarque 3 Si $n \geq 0$, on a

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{m_n(r)}{r} = \zeta(2)^n \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\widehat{m}_n(r)}{r}$$

avec

$$\widehat{m}_n(r) = \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n \\ \det \mathbf{b}=r}} \sum_{\substack{\mathbf{d}\in\mathcal{E}_n(\mathbf{b}) \\ \det \mathbf{d}=r}} 1.$$

On a alors le

Théorème 1 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout entier $N \geq 2$ sans facteur carré et tout réel $0 < \varepsilon < \frac{1}{100}$ on a*

$$\frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f\in H(N)} L(sym^2 f, 1)^n = M_{n+1} + O\left(N^{-\varepsilon} + \frac{N^{\varepsilon}}{p_1(N)}\right).$$

La constante impliquée par O dépend de ε et n.

On énonce plusieurs lemmes dont découle la preuve du théorème. Si $\eta > 0$ est un paramètre fixé suffisament petit, on définit l'ensemble $H^+(N;\eta)$ par

$$\left\{f \in H(N);\, L(sym^2 f, s) \neq 0,\ \forall s = \sigma + it,\ \sigma > 1-\eta,\ |t| \leq \ln^3 N\right\}$$

puis le complémentaire $H^-(N;\eta) = H(N) - H^+(N;\eta)$. On a le lemme suivant dû à Luo dans le cas des formes de Maaß de niveau 1 et à Kowalski-Michel [7, Théorème 1] dans le cas général

Lemme 2 ([9], Lemma 1) *Il existe $b > 0$ tel que pour tous $N \geq 2$ sans facteur carré et $0 < \eta < \frac{1}{100}$ on a la majoration*

$$\sharp H^-(N;\eta) \ll N^{b\eta}$$

où la constante de majoration ne dépend que de η.

Si $0 < \alpha < 1$ est un paramètre fixé et si $x = N^\alpha$ on définit

$$\omega_f^{(\pm n)}(x) = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\rho_f^{(\pm n)}(r)}{r} \exp(-r/x).$$

On a alors le

Lemme 3 *Pour tout entier $N \geq 2$ sans facteur carré et tout entier $n \geq 1$; pour tous réels ε et η, $0 < \varepsilon, \eta < \frac{1}{100}$ et $x = N^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$; pour toute forme $f \in H^+(N;\eta)$ on a*

$$L(sym^2 f, 1)^{\pm n} = \omega_f^{(\pm n)}(x) + O(N^\varepsilon x^{-\eta/2}).$$

La constante impliquée par O dépend de ε, η, α et n.

Preuve. Si γ est le chemin reliant $1 - i\infty$, $1 - i \ln^2 N$, $-\frac{\eta}{2} - i \ln^2 N$, $-\frac{\eta}{2} + i \ln^2 N$, $1 + i \ln^2 N$ et $1 + i\infty$ on a pour $s \in \gamma$ la majoration

$$L(sym^2 f, s+1)^{\pm n} \ll N^\varepsilon$$

grâce à [9, Lemma 2] et [10, Lemma 6]. En remarquant que $\omega_f^{(\pm n)}(x)$ s'écrit

$$\omega_f^{(\pm n)}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(1)} L(sym^2 f, s+1)^{\pm n} \Gamma(s) x^s \, \mathrm{d}s$$

on conclut par le théorème des résidus le long du contour délimité par γ et la droite $\Re e(s) = 1$ et la majoration de Stirling. □

On déduit ensuite de la Proposition 1 le

Lemme 4 *Pour tout entier sans facteur carré $N \geq 1$ et tous entiers $r \geq 1$, $(r, N) = 1$ et $n \geq 0$, pour tout réel $\varepsilon > 0$ on a*

$$\frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f \in H(N)} \frac{\rho_f^{(\pm n)}(r)}{L(sym^2 f, 1)} = \frac{1}{\zeta(2)} m_{\pm n}(r) + O(N^{-1/2+\varepsilon} r^{1/2+\varepsilon}).$$

La constante impliquée par O dépend de n et ε.

On a aussi le

Lemme 5 *Pour tout entier sans facteur carré $N \geq 2$ et tout entier $n \geq 1$; pour tous réels $\varepsilon > 0$ et $0 < \alpha < 1/10$, si $x = N^\alpha$, on a*

$$\frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f \in H(N)} \frac{\omega_f^{(\pm n)}(x)}{L(sym^2 f, 1)} = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{m_{\pm n}(r)}{r} + O\left(N^\varepsilon \left(\frac{1}{p_1(N)} + x^{-1/8}\right)\right).$$

La constante impliquée par O dépend de α, ε et n.

Preuve. On a

$$\sum_{f \in H(N)} \frac{\omega_f^{(\pm n)}(x)}{L(sym^2 f, 1)} = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\exp(-r/x)}{r} \sum_{f \in H(N)} \frac{\rho_f^{(\pm n)}(r)}{L(sym^2 f, 1)}.$$

La contribution des r non premiers à N est majorée par

$$\sum_{p \mid N} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\exp(-pr/x)}{pr} \sum_{f \in H(N)} \frac{\rho_f^{(\pm n)}(rp)}{L(sym^2 f, 1)} \ll \sharp H(N) \frac{N^\varepsilon}{p_1(N)}.$$

Le Lemme 4 donne alors

$$\frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f \in H(N)} \frac{\omega_f^{(\pm n)}(x)}{L(sym^2 f, 1)} = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{(r,N)=1} \frac{\exp(-r/x)}{r} m_{\pm n}(r) + O\left(N^{-1/2+\varepsilon} x^{1/2} + \frac{N^\varepsilon}{p_1(N)}\right).$$

On réinsère les r non premiers à N car $m_{\pm n}(r) \ll r^\varepsilon$ et on termine grâce à

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\exp(-r/x)}{r} m_{\pm n}(r) = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{m_{\pm n}(r)}{r} + O(x^{-1/8})$$

qui résulte de ce que $m_{\pm n}(r) = 0$ s'il existe un nombre premier $p \| r$. □

On a alors, grâce à (1) et au Lemme 2

$$\frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f \in H(N)} L(sym^2 f, 1)^{\pm n} = \frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f \in H^+(N;\eta)} \frac{L(sym^2 f, 1)^{\pm n+1}}{L(sym^2 f, 1)} + O(N^{b\eta+\varepsilon-1})$$

puis, grâce au Lemme 3

$$\frac{1}{\sharp H(N)}\sum_{f\in H(N)} L(sym^2 f,1)^{\pm n} = \frac{1}{\sharp H(N)}\sum_{f\in H^+(N;\eta)} \frac{\omega_f^{(\pm n+1)}(x)}{L(sym^2 f,1)} + O\big(N^{\varepsilon}(N^{b\eta-1}+x^{-\eta/2})\big).$$

Grâce à la majoration $\omega_f^{(\pm n+1)}(x) \ll N^{\varepsilon}$ on peut réintroduire les formes de $H^-(N;\eta)$. On obtient alors grâce au Lemme 5

$$\frac{1}{\sharp H(N)}\sum_{f\in H(N)} L(sym^2 f,1)^{\pm n} = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{m_{\pm n+1}(r)}{r} + O\left(N^{\varepsilon}\left(N^{b\eta-1}+x^{-\eta/2}+\frac{1}{p_1(N)}\right)\right).$$

On a ainsi prouvé le Théorème 1.

3.2.2 Expression combinatoire des moments positifs Soit $n \geq 1$. La fonction $r \mapsto \widehat{m}_n(r)$ est multiplicative. Le moment M_n est donc déterminé par les coefficients $\widehat{m}_n(p^i)$. On ramène l'étude de ces coefficients à un problème combinatoire grâce à la récriture de la définition de $\widehat{m}_n(p^i)$ dans le

Lemme 6 *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $p \in \mathcal{P}$ et $i \in \mathbb{N}$. On a* $\widehat{m}_n(p^i) =$

$$\sharp\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{N}^n,\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{N}^{n-1}\,;\\ \operatorname{tr}\boldsymbol{\beta}=\operatorname{tr}\boldsymbol{\delta}=i,\\ \delta_\ell\leq 2\min(\beta_1+\cdots+\beta_\ell-\delta_1-\cdots-\delta_{\ell-1},\beta_{\ell+1}),\,1\leq\ell\leq n-1\end{array}\right\}.$$

De plus, $\widehat{m}_1(p^i) = \delta(i,0)$.

En particulier, $\widehat{m}_n(p^i)$ ne dépend pas de p et on définit

$$m_{n,i} = \widehat{m}_n(p^i)$$

de sorte que

$$M_n = \zeta(2)^{n-1}\prod_{p\in\mathcal{P}}\sum_{i=0}^{+\infty} m_{n,i}\,p^{-i}. \tag{3}$$

On déduit du Lemme 6 une majoration des coefficients $m_{n,i}$ donnée dans le

Lemme 7 *Soit $n \geq 2$ et $i \geq 0$ des entiers. On a*

$$m_{n,i} \leq \sum_{\substack{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{N}^n\\ \operatorname{tr}\boldsymbol{\beta}=i}} (2\beta_2+1)\cdots(2\beta_n+1).$$

Preuve. Il suffit de remarquer que, pour tout $1 \leq \ell \leq n-1$ on a $0 \leq \delta_\ell \leq 2\beta_{\ell+1}$. Il y a donc $(2\beta_2+1)\cdots(2\beta_n+1)$ choix possibles de vecteurs $\boldsymbol{\delta}$. □

Remarque 4 Pour ne pas briser la symétrie du rôle des coordonnées de $\boldsymbol{\beta}$ on utilisera plutôt la majoration (impliquée par le lemme)

$$m_{n,i} \leq \sum_{\substack{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{N}^n \\ \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\beta}=i}} (2\beta_1+1)\cdots(2\beta_n+1). \tag{4}$$

Cette majoration demeure pour $n=1$.

On obtient aussi une minoration dans le

Lemme 8 *Il existe une entier i_0 tel que pour tout entier $n \geq i_0$ et tout entier $i_0 \leq i \leq n$ on a $m_{n,i} \geq C_n^i 3^{i[1+O(1/\sqrt{i})]}$.*

Preuve. Soit $0 < i \leq n$. Dans la valeur de $m_{n,i}$ donnée au Lemme 6, on regroupe les vecteurs $\boldsymbol{\beta}$ en sous-ensembles de $\boldsymbol{\beta}$ ayant exactement k coordonnées nulles pour tout entier k. Grâce à la condition sur tr $\boldsymbol{\beta}$, on peut se restreindre à $n-i \leq k \leq n-1$. On obtient ainsi une partition de l'ensemble des $\boldsymbol{\beta}$ (cet ensemble étant la projection sur $\mathbb{N}^n$ de l'ensemble définissant $m_{n,i}$) en sous-ensembles notés $\mathcal{E}(n,i;k)$. À chaque vecteur $\boldsymbol{\beta}$ de $\mathcal{E}(n,i;k)$ on associe l'ensemble $\mathcal{F}(\boldsymbol{\beta},i)$ des vecteurs $\boldsymbol{\delta}$ associés à $\boldsymbol{\beta}$ ainsi que le vecteur $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ de $\mathcal{E}(n-k,i;0)$ formé à partir de $\boldsymbol{\beta}$ en supprimant toutes les coordonnées nulles. Chaque coordonnée β_ℓ nulle impose une coordonnée $\delta_{\ell-1}$ nulle (et $\beta_1=0$ impose $\delta_1=0$), ainsi, $\mathcal{F}(\boldsymbol{\beta};i)$ est en bijection avec $\mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{\beta}};i)$. Pour tout entier r, on note $m^*_{r,i}$ le cardinal de

$$\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\beta} \in (\mathbb{N}-\{0\})^r, \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{N}^{r-1}\,; \\ \beta_1+\cdots+\beta_r = i, \\ \delta_\ell \leq 2\min(\beta_1+\cdots+\beta_\ell-\delta_1-\cdots-\delta_{\ell-1}, \beta_{\ell+1}), 1 \leq \ell \leq r-1 \\ \delta_1+\cdots+\delta_{r-1} = i \end{array}\right\}.$$

On a alors

$$m_{n,i} = \sum_{k=n-i}^{n-1} C_n^k m^*_{n-k,i} = \sum_{r=1}^{i} C_n^r m^*_{r,i}.$$

Par positivité, on a

$$m_{n,i} \geq C_n^i m^*_{i,i}. \tag{5}$$

On minore maintenant $m^*_{i,i}$. Le seul vecteur $\boldsymbol{\beta}$ intervenant dans le calcul de $m^*_{i,i}$ est le vecteur dont toutes les coordonnées sont 1. On vérifie de plus que la condition sur tr $\boldsymbol{\delta}$ et la condition

$$0 \leq \delta_{i-1} \leq 2\min(\beta_1+\cdots+\beta_{i-1}-\delta_1-\cdots-\delta_{i-2}, \beta_i)$$

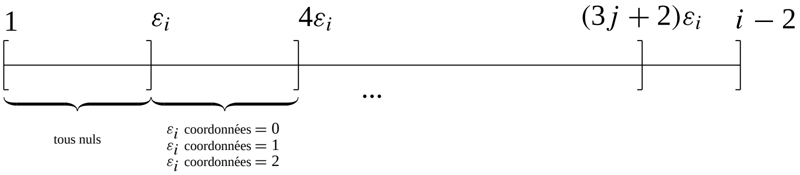
imposent $\delta_{i-1} = 2$. Pour tout vecteur $\boldsymbol{\delta}$ et tout entier ℓ on note $s_\ell = \ell - \delta_1 - \cdots - \delta_{\ell-1}$. Il nous faut donc trouver $\delta_1, \ldots, \delta_{i-2}$ tels que $s_{i-1} = 1$ et

$$0 \leq \delta_\ell \leq 2\min(s_\ell, 1), \quad 1 \leq \ell \leq i-2. \tag{6}$$

On a toujours $\delta_\ell \in \{0, 1, 2\}$. Les coordonnées $\delta_\ell = 0$ interviennent ≪positivement≫, les coordonnées $\delta_\ell = 1$ interviennent ≪de façon neutre≫, et les coordonnées $\delta_\ell = 2$ interviennent ≪negativement≫ au sens où l'on a les implications

$$\begin{array}{lcl} \delta_\ell = 0 & \Rightarrow & s_{\ell+1} = s_\ell + 1 \\ \delta_\ell = 1 & \Rightarrow & s_{\ell+1} = s_\ell \\ \delta_\ell = 2 & \Rightarrow & s_{\ell+1} = s_\ell - 1. \end{array}$$

On définit ε_i comme le plus petit entier supérieur à $\sqrt{i}$ et l'entier j tel que $(3j+2)\varepsilon_i < i - 2 \leq (3j+5)\varepsilon_i$. On place les coordonnées de $\boldsymbol{\delta}$ sur un axe et on résume la fin de la démonstration sur le schéma suivant.



On choisit $\delta_1 = \cdots = \delta_{\varepsilon_i} = 0$. On a alors $s_{\varepsilon_i+1} = \varepsilon_i + 1$. Puis, parmi $\delta_{\varepsilon_i+1}, \ldots, \delta_{4\varepsilon_i}$ on fixe ε_i coordonnées égales à 0, ε_i coordonnées égales à 1 et ε_i coordonnées égales à 2. La condition (6) est ainsi satisfaite pour ces coordonnées. On a $s_{4\varepsilon_i+1} = \varepsilon_i + 1$. On fixe $\delta_{4\varepsilon_i+1}, \ldots, \delta_{7\varepsilon_i}$ de la même façon puis on répète le processus jusqu'à avoir fixé $\delta_{\varepsilon_i}, \ldots, \delta_{(3j+1)\varepsilon_i}$. On a alors $s_{(3j+1)\varepsilon_i+1} = \varepsilon_i + 1$. On a alors à choisir $i - 2 - (3j+1)\varepsilon_i$ coordonnées dont la somme est $i - 2 - 3j\varepsilon_i$. On choisit alors ε_i coordonnées égales à 2 et les $i - 2 - (3j+2)\varepsilon_i$ restantes égales à 1. On a ainsi construit $(C_{3\varepsilon_i}^{\varepsilon_i} C_{2\varepsilon_i}^{\varepsilon_i})^j$ vecteurs $\boldsymbol{\delta}$ satisfaisants. Or d'après la formule de Stirling on a

$$C_{3\varepsilon_i}^{\varepsilon_i} C_{2\varepsilon_i}^{\varepsilon_i} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{3^{3\varepsilon_i}}{\varepsilon_i} \left[1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon_i} \right) \right]$$

d'où $m_{i,i}^* \geq 3^{i[1+O(1/\sqrt{i})]}$. Le résultat du lemme s'obtient alors grâce à la minoration (5). □

3.2.3 Encadrement La majoration (4) de $m_{n,i}$ donne la majoration suivante des moments

Proposition 2 *Pour tout entier* $n \geq 2$ *on a* $\ln M_n \leq 3n \ln \ln n + O(n)$.

Preuve. On déduit de (4) la majoration

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{m_{n,i}}{p^i} \leq \sum_{i=2}^{+\infty} \sum_{\substack{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}^n \\ \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\beta} = i}} \frac{(2\beta_1 + 1) \cdots (2\beta_n + 1)}{p^{\beta_1} \cdots p^{\beta_n}}.$$

D'autre part, $m_{n,1} = 0$ d'où

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{m_{n,i}}{p^i} \leq \left(\sum_{\beta=0}^{+\infty} \frac{2\beta + 1}{p^\beta} \right)^n - \frac{3n}{p}.$$

On déduit de (3) la majoration

$$M_n \leq \zeta(2)^{n-1} \prod_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{(1 + p^{-1})^n}{(1 - p^{-1})^{2n}} - \frac{3n}{p} \right].$$

On conclut grâce à

$$\prod_{p \leq n} \frac{(1 + p^{-1})^n}{(1 - p^{-1})^{2n}} \leq (\ln n)^{3n} e^{O(n)}$$

et

$$\prod_{p > n} \left[\frac{(1 + p^{-1})^n}{(1 - p^{-1})^{2n}} - \frac{3n}{p} \right] = \prod_{p > n} \left[1 + O\left(\frac{n^2}{p^2} \right) \right] = e^{O(n)}.$$

□

Le Lemme 8 donne alors la minoration des moments suivante.

Proposition 3 *Pour tout entier $n \geq 2$ on a $M_n \geq (\ln n)^{3n} e^{O(n)}$.*

Preuve. Grâce au Lemme 8 on a, pour n assez grand,

$$\begin{aligned} M_n &\geq \prod_{p \leq \sqrt{n}} \left(1 + \sum_{i=i_0}^{n} \frac{C_n^i}{p^i} 3^{i\left(1 + O(1/\sqrt{i})\right)} \right) \\ &\geq 3^{O(n)} \prod_{p \leq \sqrt{n}} \left(1 + \sum_{i=i_0}^{n} C_n^i \frac{3^i}{p^i} \right) \\ &\geq 3^{O(n)} \prod_{p \leq \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p^{i_0}} \right) \left(1 + \frac{3}{p} \right)^n \end{aligned}$$

d'où $M_n \geq (\ln n)^{3n} e^{O(n)}$. □

3.3 Distribution

Soit I et Z des applications de $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{R}^+$. L'inégalité de Markov (2) pour la variable $L(sym^2, 1)$ donne pour tout n entier positif

$$\frac{1}{\sharp H(N)}\sharp\{f \in H(N)\ ;\ L(sym^2 f, 1) \geq I(N)\} \leq \frac{M_{n+1}(N)}{I(N)^n}.$$

Cette même inégalité de Markov appliquée à la variable $L(sym^2, 1)^{-1}$ donne

$$\frac{1}{\sharp H(N)}\sharp\{f \in H(N)\ ;\ L(sym^2 f, 1) \leq Z(N)\} \leq M_{-n+1}(N)Z(N)^n$$

soit encore

$$\frac{1}{\sharp H(N)}\sharp\{f \in H(N)\ ;\ L(sym^2 f, 1) > Z(N)\} \geq 1 - M_{-n+1}(N)Z(N)^n.$$

On déduit de ces considérations la

Proposition 4 *Soit $Z, I : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^+$ des applications. Pour tout n entier positif, on a lorsque N parcourt $\mathcal{N}$*

$$\frac{1}{\sharp H(N)}\sharp\{f \in H(N)\ ;\ L(sym^2 f, 1) \geq Z(N)\} = 1 + O\big(Z(N)^n\big)$$

et

$$\frac{1}{\sharp H(N)}\sharp\{f \in H(N)\ ;\ L(sym^2 f, 1) \geq I(N)\} = O\big(I(N)^{-n}\big).$$

La minoration des moments positifs obtenue à la Proposition 3 permet de prouver la

Proposition 5 *L'ensemble $\{L(sym^2 f, 1)\ ;\ f \in H(N), N \in \mathcal{N}\}$ n'est pas borné.*

Preuve. On suppose par l'absurde qu'il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout $N \in \mathcal{N}$ la majoration $L(sym^2 f, 1) \leq C$. On obtiendrait alors, pour tout entier $n \geq 0$ la majoration sur les moments $M_{n+1} \leq C^n$. Cette majoration contredirait la minoration $M_{n+1} \geq (\ln n)^{3n} e^{O(n)}$ de la Proposition 3. □

La majoration des moments positifs de la Proposition 2 permet d'affirmer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M_{n+1}}{n!}(it)^n$$

a un rayon de convergence infini. Grâce au Lemme 1 on déduit alors la

Proposition 6 *Si N parcourt $\mathcal{N}$, il existe une fonction de répartition cumulative R telle qu'en tout point de continuité x de R on a,*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sharp H(N)} \sharp\{f \in H(N) \;;\; L(sym^2 f, 1) \leq x\} = R(x).$$

De plus, pour tout entier n, le moment d'ordre n de cette fonction de répartition cumulative est M_n.

Autrement dit, la variable aléatoire $L(sym^2, 1)$ converge en loi vers une variable aléatoire $L(sym^2, 1)_\infty$.

3.4 *Espérance et variance*

L'espérance de la variable aléatoire limite $L(sym^2, 1)_\infty$ est donnée dans la

Proposition 7 *L'espérance de la variable aléatoire $L(sym^2, 1)_\infty$ est*

$$E[L(sym^2, 1)_\infty] = \zeta(2)^2.$$

Preuve. L'espérance d'une variable aléatoire est son premier moment. On prouve donc $M_2 = \zeta(2)^2$. On a

$$\begin{aligned} \widehat{m}_2(r) &= \sharp\{(b_1, b_2) \in \mathbb{N}^2 \;;\; b_1 b_2 = r,\; b_1 b_2 | (b_1, b_2)^2\} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ est un carré ;} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

d'où $M_2 = \zeta(2)^2$. □

L'espérance d'une variable aléatoire est la meilleure constante d'approximation quadratique. L'erreur commise est donnée par la variance.

Proposition 8 *La variance de la variable aléatoire $L(sym^2, 1)_\infty$ est*

$$\mathrm{Var}[L(sym^2, 1)_\infty] = \zeta(2)^4 \left[\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} - 1 \right] \approx 6,908.$$

Preuve. Il faut montrer

$$M_3 = \zeta(2)^2 \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1 + p^{-3}}{(1 - p^{-2})^3}.$$

On commence par calculer $m_{3,i}$. Grâce au Lemme 6 la valeur de $m_{3,i}$ est le cardinal de l'ensemble des $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \delta_1, \delta_2) \in \mathbb{N}^5$ satisfaisant aux conditions

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = i \tag{7a}$$

$$\delta_1 \leq 2\min(\beta_1, \beta_2)$$

$$\delta_2 \leq 2\min(\beta_1 + \beta_2 - \delta_1, \beta_3) \tag{7b}$$

$$\delta_1 + \delta_2 = i. \tag{7c}$$

On a nécessairement $\delta_1 = i - 2\beta_3$: en effet si $\beta_1 + \beta_2 - \delta_1 \neq \beta_3$ alors la condition (7b) implique $\delta_1 + \delta_2 < \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ ce qui contredit les conditions (7a) et (7c) ; ainsi $\delta_1 = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = i - 2\beta_3$. On déduit alors de (7c) que $\delta_2 = 2\beta_3$. Ainsi a-t-on

$$m_{3,i} = \left\{ \begin{array}{c} (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{N}^3 \,; \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = i \\ 0 \leq i - 2\beta_3 \leq 2\min(\beta_1, \beta_2) \end{array} \right\}.$$

Si $m_{3,i}^{=}$ est la contribution à $m_{3,i}$ des triplets $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ tels que $\beta_1 = \beta_2$ et si $m_{3,i}^{<}$ est la contribution à $m_{3,i}$ des triplets $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ tels que $\beta_1 < \beta_2$ on a

$$m_{3,i} = m_{3,i}^{=} + 2m_{3,i}^{<}.$$

On a

$$m_{3,i}^{=} = \sharp\left\{\beta_3 \in \mathbb{N} \,;\, \beta_3 \leq \frac{i}{2}, \frac{i-\beta_3}{2} \in \mathbb{N}\right\}$$

donc

$$m_{3,i}^{=} = \sharp\left[\frac{i}{4}, \frac{i}{2}\right] \cap \mathbb{N}.$$

D'autre part,

$$m_{3,i}^{<} = \sharp \left\{ \begin{array}{c} (\beta_1, \beta_3) \in \mathbb{N}^2 \,; \\ \frac{i}{2} - \beta_3 \leq \beta_1 < \frac{i-\beta_3}{2} \\ \beta_3 \leq \frac{i}{2} \end{array} \right\}$$

soit

$$m_{3,i}^{<} = \sum_{\beta \leq \frac{i}{2}} \sharp \left[\frac{i}{2} - \beta, \frac{i-\beta}{2}\right[\cap \mathbb{N}.$$

On en déduit

$$\begin{cases} m_{3,4i} &= 2i^2 + 3i + 1 \\ m_{3,4i+1} &= 2i^2 + i \\ m_{3,4i+2} &= 2i^2 + 5i + 3 \\ m_{3,4i+3} &= 2i^2 + 3i + 1. \end{cases}$$

On calcule alors

$$M_3 = \zeta(2)^2 \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1 + p^{-3}}{(1 - p^{-2})^3} = \zeta(2)^5 \frac{\zeta(3)}{\zeta(6)}.$$

□

3.5 Dépendance avec les valeurs propres de Hecke

Si q est un nombre premier ne divisant pas N, on étudie la dépendance de $L(sym^2 f, 1)$ et $\lambda_f(q)$. Pour cela, on va montrer que cette dépendance n'est due qu'au q-ième facteur eulerien de $L(sym^2 f, s)$. À cet effet on définit

$$\begin{aligned} L^{(q)}(sym^2 f, s) &= \prod_{p\neq q} L(sym_p^2 f, s) \\ &= L(sym^2 f, s) L(sym_q^2 f, s)^{-1}. \end{aligned}$$

Soit $X : H(N) \to \mathbb{C}$ une application, on définit $M_N^h(X)$ par

$$M_N^h(X) = \frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f\in H(N)} \frac{\zeta(2)}{L(sym^2 f, 1)} X(f).$$

La Proposition 1 permet de voir M_N^h comme un opérateur de moyenne puisque

$$M_N^h(1) = 1 + O\big(N^{-1/2}\tau^4(N)\big).$$

On a alors la

Proposition 9 *Soit q un nombre premier, deux entiers $m \geq 0$ et $n > 0$. Lorsque N parcourt $\mathcal{N}$ on a*

$$\lim_{\substack{N\to+\infty \\ (N,q)=1}} \frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f\in H(N)} \frac{\zeta(2)}{L(sym^2 f, 1)} L^{(q)}(sym^2 f, 1)^m \lambda_f(q^n) = 0.$$

Preuve. On note ε_q la fonction caractéristique des entiers premiers à q. On peut voir $L^{(q)}(sym^2 f, s)$ comme la fonction L de carré symétrique de la forme parabolique $f \otimes \varepsilon_q$ de poids k et de niveau Nq^2 (qui n'est plus sans facteur carré !). Les coefficients de cette forme vérifient la majoration de Deligne et la formule de multiplicativité de Hecke. Le calcul des moments se récrit donc ligne à ligne dans ce cas (c'est-à-dire en remplaçant $\lambda_f(n)$ par $\varepsilon_q(n)\lambda_f(n)$ et en insérant un facteur ε_q lorsque la formule de multiplicativité intervient). On obtient alors le même résultat en remplaçant $m_n(r)$ par $m_{m,n}(r)$ où

$$m_{m,n}(r) = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{\det \mathbf{a}^2\mathbf{b}=r} \varepsilon_q(\det \mathbf{b}) \sharp\big\{\mathbf{d} \in \mathcal{E}_m(\mathbf{b}); q^n \det \mathbf{d}^2 = \det \mathbf{b}^2\big\}.$$

Or pour que la somme soit non vide, il faut que pour chaque i on ait $(q, b_i) = 1$. Mais si $n \neq 0$, cela implique que l'ensemble intervenant dans la définition de $m_{m,n}(r)$ est vide. On a alors $m_{m,n}(r) = 0$ et

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ (N,q)=1}} \frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f\in H(N)} \frac{L^{(q)}(sym^2 f, 1)^m}{L(sym^2 f, 1)} \lambda_f(q^n) = 0.$$

$\square$

On en déduit la

Proposition 10 *Soit q un nombre premier, $m \geq 0$ et $n \geq 0$ deux entiers. Lorsque N parcourt $\mathcal{N}$ on a*

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{N\to+\infty\\(N,q)=1}} \frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f\in H(N)} \frac{\zeta(2)}{L(sym^2 f,1)} L^{(q)}(sym^2 f,1)^m \lambda_f(q)^n \\
&= \lim_{\substack{N\to+\infty\\(N,q)=1}} \frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f\in H(N)} \frac{\zeta(2)}{L(sym^2 f,1)} \lambda_f(q^n) \\
&\times \lim_{\substack{N\to+\infty\\(N,q)=1}} \frac{1}{\sharp H(N)} \sum_{f\in H(N)} \frac{\zeta(2)}{L(sym^2 f,1)} L^{(q)}(sym^2 f,1)^m .
\end{aligned}$$

On en déduit en particulier le

Corollaire 1 *Soit q un nombre premier. Dans les espaces probabilisés munis de la moyenne $\frac{M_N^h}{M_N^h(1)}$, les variables aléatoires limites, lorsque N parcourt $\mathcal{N}$ en restant premier à q, des variables aléatoires*

$$\begin{aligned}
\lambda(q) : H(N) &\to \mathbb{R} \\
f &\mapsto \lambda_f(q)
\end{aligned}$$

et $L^{(q)}(sym^2,1)$ sont indépendantes.

Preuve (de la Proposition 10). Pour tout entier $n \geq 0$ on a

$$\lambda_f(q)^n = \sum_{i=0}^{n} h_n(i)\lambda_f(q^i)$$

avec

$$h_n(i) = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^\pi \cos^n\theta \sin(i+1)\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$

(voir, par exemple, [2, Lemma 3]). Ainsi, grâce à la Proposition 9 on obtient

$$\lim_{\substack{N\to+\infty\\(N,q)=1}} M_N^h[L^{(q)}(sym^2,1)^m\lambda(q)^n] = h_n(0) \lim_{\substack{N\to+\infty\\(N,q)=1}} M_N^h[L^{(q)}(sym^2,1)^m].$$

En prenant $m = 0$ dans cette dernière équation, on obtient

$$h_n(0) = \lim_{\substack{N\to+\infty\\(N,q)=1}} M_N^h[\lambda(q)^n]$$

ce qui permet de conclure. □

Remarque 5 Les travaux d'Iwaniec, Luo et Sarnak, et notamment une formule à la Eichler-Shimura [5, Proposition 2.13] permettent, en reprenant pas à pas les calculs du Paragraphe 3.2.1 de remplacer la moyenne M_N^h par la moyenne naturelle et ainsi de prouver la proposition annoncée en introduction.

Références

1. Patrick Billingsley. Probability and Measure. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 3e édition, 1995
2. J.Brian. Conrey, William Duke et David W. Farmer, The distribution of the eigenvalues of Hecke operators. Acta Arith. **LXXVIII** (1997), 405–409
3. Dorian Goldfeld, Jeffrey Hoffstein et Daniel Lieman, An effective zero-free region, appendice de [4], Ann. of Math.(2) **140** (1994), 177–181
4. Jeffrey Hoffstein et Paul Lockhart, Coefficients of Maass forms and the Siegel zero, Ann. of Math.(2) **140** (1994), 161–181
5. Henryk Iwaniec, Wenzhi Luo et Peter Sarnak, Low Lying Zeros of Families of L-Functions, Publications Mathématiques de l'IHES **91** (2001), 55–131
6. Henryk Iwaniec. Topics in Classical Automorphic Forms, volume 17 de Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997
7. Emmanuel Kowalski et Philippe Michel, Zeros of families of automorphic L-functions close to 1 and applications, en préparation
8. Wen-Ch'ing Winnie Li, Newforms and Functionnal Equations, Math. Ann. **212** (1975), 285–315
9. Wenzhi Luo, Values of symmetric L-functions at 1, J. Reine Angew. Math. **506** (1999), 215–235
10. Wenzhi Luo, Nonvanishing of L-values and the strong Weyl law, préimprimé (2000)
11. Jean-Pierre Serre, Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 75–102
12. Gorô Shimura, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc. (3) **31** (1975), 79–98