

# Fonction $\zeta$ et matrices aléatoires

*Emmanuel Royer\**

*Institut de mathématiques et modélisation de Montpellier, UMR5149  
Université Montpellier II  
Case courrier 051  
F-34095 Montpellier cedex 5  
France  
email : royer@math.univ-montp2.fr*

**Résumé.** Depuis Euler puis Riemann, de nombreux liens ont été établis entre le comportement des nombres premiers et les propriétés analytiques de la fonction  $\zeta$  de Riemann. Les points où  $\zeta$  s'annule ont une importance particulière justifiant leur étude fine. Depuis les années 70, un angle d'attaque de ces points d'annulation est apparu *via* les propriétés statistiques du spectre des matrices unitaires, qui se présentent comme un modèle de  $\zeta$ . L'objet de ce texte de présentation est d'expliquer cet angle d'attaque et ses extensions à l'étude des fonctions  $L$ .

**Abstract.** Since Euler and Riemann, various links have been established between the behaviour of prime numbers and the analytical properties of the Riemann  $\zeta$  function. The zeroes of  $\zeta$  have a great importance that justifies their fine study. Since seventies, a rich tool has appeared for the study of zeroes: the statistical spectral properties of the unitary matrices that are a model for  $\zeta$ . The aim of this survey is to explain the link between unitary matrices and  $\zeta$ , and its extension to the  $L$ -functions.

## Table des matières

1	Le théorème de Montgomery . . . . .	166
2	Corrélations d'ordres supérieurs . . . . .	180
3	Le lien avec les matrices aléatoires . . . . .	182
4	Moments de $\zeta$ . . . . .	194
5	Fonctions $L$ et matrices aléatoires . . . . .	199
6	Détermination du type de symétrie . . . . .	217

---

\*Partiellement financé par l'ACI jeunes chercheurs « arithmétique des fonctions  $L$  » et le réseau européen *Arithmetic Algebraic Geometry network*.

## 1 Le théorème de Montgomery

L'objet de cette partie est de rappeler les propriétés importantes de la fonction  $\zeta$  de Riemann. Pour les détails, on renvoie à [75].

La fonction  $\zeta$  de Riemann est définie, pour  $\operatorname{Re} s > 1$  par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

et cet objet analytique est relié à l'arithmétique de  $\mathbb{Q}$  par le développement en produit eulérien

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (1.1)$$

en désignant par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers. On sait prolonger cette fonction en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  dont le seul pôle est simple et situé en  $s = 1$ . Le prolongement satisfait à une équation fonctionnelle

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s) \quad (1.2)$$

où

$$\Lambda(s) = \zeta_{\infty}(s)\zeta(s) \quad \text{avec} \quad \zeta_{\infty}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$$

avec

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

La fonction  $\zeta$  s'annule en les entiers pairs strictement négatifs, ces points d'annulation sont appelés *zéros triviaux de  $\zeta$* . Le développement eulérien (1.1) et l'équation fonctionnelle (1.2) impliquent que tous les autres points d'annulation de  $\zeta$  sont dans la bande  $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$  appelée *bande critique*. Grâce à l'équation fonctionnelle, les points d'annulation de  $\zeta$  sont symétriques par rapport à la droite  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$  appelée *droite critique* et Riemann a conjecturé l'hypothèse suivante.

**Hypothèse de Riemann.** *Les points d'annulation non triviaux de  $\zeta$  sont sur la droite critique.*

Cette hypothèse est vérifiée<sup>1</sup> par Gourdon & Demichel *via* un calcul informatique pour les  $10^{13}$  premiers points d'annulation classés par parties imaginaires positives croissantes [34]. D'autre part, Conrey a montré [13] que 40 % au moins des points d'annulation de  $\zeta$  sont situés sur l'axe critique :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\#\{\rho \in \zeta^{-1}(\{0\}) : 0 < \operatorname{Im} \rho < T, \operatorname{Re} \rho = 1/2\}}{\#\{\rho \in \zeta^{-1}(\{0\}) : 0 < \operatorname{Im} \rho < T\}} \geq 40\%.$$

<sup>1</sup> « En plus des erreurs possibles concernant la validité des résultats et algorithmes utilisés, [le calcul] est sujet à des erreurs qui ne sont pas aisément détectables (erreur humaine de codage, erreur de compilation, erreur de système, erreur de processeur *etc.*). Il est donc difficile de considérer un tel résultat comme “démonstré” au sens fort de démonstration purement mathématiques. » (X. Gourdon *in* [34].)

L'hypothèse de Riemann équivaut au résultat suivant de distribution des nombres premiers : il existe  $c > 0$  tel que

$$|\pi(x) - \text{Li}(x)| \leq cx^{1/2} \log(x) \quad (1.3)$$

pour tout  $x \geq 2$  avec

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathcal{P} : p \leq x\} \quad \text{et} \quad \text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

En conséquence, l'hypothèse de Riemann implique l'existence de  $c > 0$  tel que tout intervalle

$$[x, x + cx^\theta \log^2(x)] \quad (1.4)$$

avec  $x \geq 2$  et  $\theta = 1/2$  contient au moins un nombre premier. Un moyen d'obtenir le résultat avec  $1/2 < \theta < 1$  est de remplacer  $x^{1/2}$  dans le terme de droite de (1.3) par  $x^\theta$ . L'évaluation obtenue de  $\pi$  est alors équivalente à la « quasi-hypothèse de Riemann » affirmant que les points d'annulation non triviaux de  $\zeta$  sont dans la bande  $1 - \theta \leq \text{Re } s \leq \theta$ . Aucun résultat de ce type n'est connu mais il est remarquable que l'on sache démontrer que  $\theta = 0,525$  est admissible dans (1.4) [2] (voir aussi la proposition 1.17 ci-dessous et [70]). Les premiers résultats sont dûs à Hoheisel en 1930 [39] (voir [46, §10.5]). Pour de plus amples informations concernant l'hypothèse de Riemann, on renvoie aux exposés de Bombieri [7] et Sarnak [73] et aux textes d'Ivic [44], [45]. Dans cet exposé, essentiellement pour simplifier l'exposition, on supposera que cette hypothèse est démontrée. La plupart des énoncés restent vrais si on ne fait pas cette hypothèse en prenant des fonctions de localisation (voir la définition 1.1) d'argument complexe.

Puisque  $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$ , les points d'annulation de  $\zeta$  sont symétriques par rapport à l'axe  $\text{Im } s = 0$ . Le point  $s = 1/2$  n'annule pas  $\zeta$  puisque, par exemple à l'aide de la formule de Taylor-Mac Laurin, on a

$$\zeta(1/2) = -1,4603545088095868128894991525152980124672293310126 \dots$$

On note

$$Z(\zeta) = \{\beta_n + i\gamma_n, n \in \mathbb{Z}^*\}$$

l'ensemble des points d'annulation de  $\zeta$  qui ne sont pas des zéros triviaux avec les conventions que  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$  croît et  $\gamma_{-n} = -\gamma_n$  pour  $n \in \mathbb{Z}^*$ . Un éventuel point d'annulation multiple (on conjecture qu'il n'en existe pas) est répété autant de fois que sa multiplicité.

Notons

$$N(\zeta, T) = \#\{\gamma \in Z(\zeta) : 0 \leq \text{Im } \gamma \leq T\}.$$

Alors

$$N(\zeta, T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi e}\right) + O(\log T)$$

pour tout  $T \geq 3$  (la première ordonnée positive d'un point d'annulation de  $\zeta$  est

$$\gamma_1 = 14, 1347251417346937904572519835624702707842571156 \dots).$$

Pour  $T \geq 15$ , on a donc

$$T = \frac{\gamma_T}{2\pi} \log\left(\frac{\gamma_T}{2\pi e}\right) + O(\log \gamma_T)$$

et, en posant

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{\gamma_n}{2\pi} \log\left(\frac{|\gamma_n|}{2\pi e}\right)$$

on obtient

$$\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} (\tilde{\gamma}_{n+1} - \tilde{\gamma}_n) = 1 + O\left(\frac{\log N}{N}\right). \quad (1.5)$$

Les points  $\beta_n + i\tilde{\gamma}_n$  sont appelés *zéros normalisés* de  $\zeta$  et (1.5) exprime qu'asymptotiquement, l'écart moyen entre zéros normalisés est 1. On note  $\tilde{Z}(\zeta)$  l'ensemble des zéros normalisés de  $\zeta$ . On va étudier la corrélation des zéros normalisés. Cette étude va dévoiler un lien prometteur entre les très mystérieux points d'annulation de  $\zeta$  et les beaucoup moins mystérieuses valeurs propres de matrices unitaires. Pour la suite, on définit la notion de fonction de localisation.

**Définition 1.1.** Une *fonction de localisation* est une fonction de Schwartz sur  $\mathbb{R}$  dont la transformée de Fourier est à support compact.

Pour construire une telle fonction, il suffit de prendre la transformée de Fourier inverse d'une fonction  $C^\infty$  à support compact.

**Remarque 1.2.** On choisit la normalisation suivante pour la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}[t \mapsto f(t)](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e(-\xi t) dt$$

avec

$$e(x) = \exp(2i\pi x).$$

La transformée de Fourier inverse est alors

$$\mathcal{F}^{-1}[\xi \mapsto \hat{f}(\xi)](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e(\xi t) d\xi.$$

En 1973, Montgomery [64] a démontré un théorème qu'on énonce maintenant de la façon suivante [71].

**Théorème 1.3.** Soit  $h$  la transformée de Fourier inverse d'une fonction  $C^\infty$  à support compact et  $\phi$  une fonction de localisation telle que  $\text{Supp } \hat{\phi} \subset ]-1, 1[$ . Alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N(\zeta, T) \|h\|_2^2} \sum_{\substack{(j,k) \in \mathbb{Z}^*2 \\ j \neq k}} h\left(\frac{\gamma_j}{T}\right) h\left(\frac{\gamma_k}{T}\right) \phi\left[\frac{\log T}{2\pi}(\gamma_j - \gamma_k)\right] = \text{COR}(2, \phi, \text{univ})$$

avec

$$\text{COR}(2, \phi, \text{univ}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \left[1 - \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2\right] dt.$$

**Remarque 1.4.** Le théorème 1.3 étudie la façon dont se répartissent les écarts entre zéros normalisés dans les intervalles de longueur environ 1. Voir la partie 2.

**Remarque 1.5.** Dans [71], le théorème 1.3 est énoncé avec  $f\left(\frac{\log T}{2\pi}\gamma_j, \frac{\log T}{2\pi}\gamma_k\right)$  au lieu de  $\phi\left[\frac{\log T}{2\pi}(\gamma_j - \gamma_k)\right]$ , où  $f$  est symétrique et vérifie  $f(x_1 + t, x_2 + t) = f(x_1, x_2)$  pour tout  $t$  réel. Pour  $f$ , on a pris  $f(x_1, x_2) = \phi(x_2 - x_1)$  et il faudrait se restreindre à  $\phi$  paire. Cependant, lorsque  $\phi$  est impaire, le théorème 1.3 reste valable puisque les deux membres de l'égalité sont nuls. En écrivant une fonction  $\phi$  quelconque comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, on déduit donc qu'on peut enlever l'hypothèse de parité de  $\phi$ .

On notera  $\text{dCOR}(2, \text{univ})$  la densité de corrélation représentée figure 1 et définie par :

$$\text{dCOR}(2, \text{univ})(t) = 1 - \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2.$$

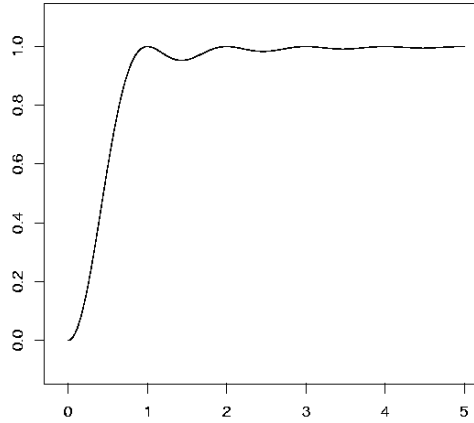


Figure 1.  $x \mapsto \text{dCOR}(2, \text{univ})(x)$ .

Le théorème 1.3 a été l'objet de nombreux travaux dans les années qui ont suivi sa publication. On peut, par exemple, se reporter à la bibliographie de [25].

**Remarque 1.6.** En prenant les mêmes hypothèses pour  $\phi$  que dans l'énoncé du théorème 1.3, on peut montrer [71, Theorem 1.2] que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} \phi(\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_k) = \text{COR}(2, \phi, \text{univ}) \quad (1.6)$$

**Remarque 1.7.** Supposons que, dans l'équation (1.6), on puisse choisir pour  $\phi$  la fonction caractéristique de  $[-\delta, \delta]$ . On obtient alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \# \{ \{ \tilde{\gamma}_j, \tilde{\gamma}_k \} \subset \{ \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_N \} : |\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_k| \leq \delta \} = \frac{1}{9} \pi^2 \delta^3 + O(\delta^5).$$

Autrement dit, le nombre de petits espaces entre zéros de  $\zeta$  est très faible : on dit qu'il y a *répulsion*. En calculant environ  $2 \cdot 10^9$  zéros autour de  $10^{24}$ , Gourdon & Demichel [34] ont trouvé que le plus petit écart entre zéros est 0,0002799. Pour les  $10^{13}$  premiers zéros, le plus petit écart est 0,0005330. Ce constat se traduit sur le tracé de la courbe de la fonction de distribution cumulative des écarts (voir la figure 2) : au voisinage de 0, cette courbe est aplatie.

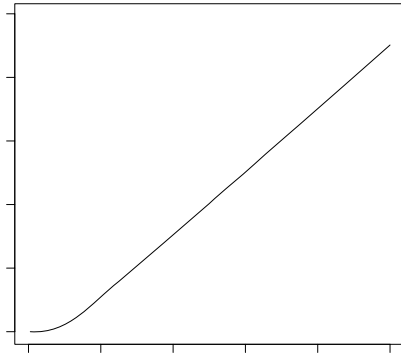


Figure 2. Fonction de distribution cumulative expérimentale des écarts entre zéros normalisés des zéros numérotés de  $10^{22}$  à  $10^{22} + 10^4$  (d'après les données de Odlyzko [66]).

On explique le tracé de la figure 2. On a reporté les points de coordonnées  $(a_i, p_i)$  pour  $i \in \{1, \dots, 200\}$ . Les abscisses sont définies par

$$a_i = \frac{5}{200} i$$

de sorte qu'elles forment une suite de 200 points équidistribués de l'intervalle  $[0, 5]$ . Les ordonnées sont définies par

$$p_i = \frac{\#\{(j, k) \in \mathbb{N}^2 : 10^{22} < j < k < 10^{22} + 10^4, \hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_j < a_i\}}{10^4}.$$

Le graphe obtenu coïncide parfaitement avec celui des points de coordonnées  $(a_i, q_i)$  où  $q_i = \text{COR}(2, \phi_i, \text{univ})$ , la fonction  $\phi_i$  étant la fonction caractéristique de  $[0, a_i]$ . On comparera avec la conjecture de Montgomery (page 177). Au passage, on remarque que l'observation de la distribution des écarts de  $10^4$  zéros consécutifs ne permet pas de déterminer le paquet de  $10^4$  zéros consécutifs étudié (*i.e.* de trouver  $n$  tel que ce paquet est l'ensemble des zéros numérotés de  $n$  à  $n + 10^4$ ).

**Remarque 1.8.** La restriction sur le support de  $\hat{\phi}$  peut sembler artificielle. Néanmoins, elle apparaît de façon essentielle dans la démonstration du théorème. Elle a aussi une signification analytique forte puisque les points d'abscisses  $\pm 1$  sont des points de discontinuité de  $\hat{\phi}$ . La formule de Parseval donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{dCOR}(2, \text{univ})(t) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\text{dCOR}(2, \text{univ})}(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi$$

avec la transformée de Fourier de la densité représentée figure 3 et donnée par

$$\widehat{\text{dCOR}(2, \text{univ})}(\xi) = \begin{cases} \delta(\xi) + |\xi| - 1 & \text{si } |\xi| < 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

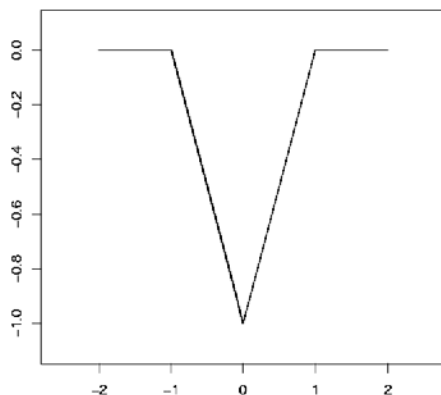


Figure 3.  $x \mapsto \widehat{\text{dCOR}(2, \text{univ})}(x)$ .

On a noté  $\delta$  est la distribution de Dirac,

$$\int_{\mathbb{R}} \delta f = f(0).$$

**Remarque 1.9.** Un ingrédient majeur de la démonstration est la formule explicite de Riemann (voir [71, Proposition 2.1] ou [46, Theorem 5.12]). Cette formule utilise la fonction  $\Lambda$  de Von Mangoldt définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^\nu \text{ avec } p \in \mathcal{P} \text{ et } \nu \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 1.10.** Soit  $H$  une fonction de localisation. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} H(\gamma_j) &= H\left(-\frac{i}{2}\right) + H\left(\frac{i}{2}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) \Omega_{\mathbb{R}}(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left[ \hat{H}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right) + \hat{H}\left(-\frac{\log n}{2\pi}\right) \right]. \end{aligned}$$

On a posé

$$\Omega_{\mathbb{R}}(t) = 2 \operatorname{Re} \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

avec

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

**Remarque 1.11.** La formule de Riemann implique

$$N(\zeta, T) \|h\|_2^2 \sim \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} h\left(\frac{\gamma_j}{T}\right)^2 \quad (T \rightarrow +\infty). \quad (1.7)$$

Pour démontrer (1.7), on utilise la formule de Riemann avec

$$H(t) = h^2\left(\frac{t}{T}\right), \quad \hat{H}(\xi) = T \widehat{h^2}(\xi T),$$

où  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que  $h^2$  est une fonction de localisation. Grâce à une formule due à Mertens [46, §2.2]

$$\sum_{n \leq t} \frac{\Lambda(n)}{n} \sim \log t \quad (t \rightarrow +\infty)$$

(c'est aussi une conséquence directe du théorème des nombres premiers [74, Corollaire 8.1 du chapitre I.3]) et à une intégration par parties, on a

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left[ \hat{H}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right) + \hat{H}\left(-\frac{\log n}{2\pi}\right) \right] = O(1).$$



D'autre part [35, 8.361.8],

$$\frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}(z) = \frac{1}{2} \log \frac{z}{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{tz}{2}\right) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right) dt$$

de sorte que, si  $|t|$  est borné, alors

$$\Omega_{\mathbb{R}}(tT) = \log T + O(1)$$

la constante de majoration ne dépendant que de la borne de  $|t|$ . On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} H(t) \Omega_{\mathbb{R}}(t) dt &= \frac{T}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h^2(t) \Omega_{\mathbb{R}}(tT) dt \\ &\sim \frac{T}{2\pi} \log T \int_{\mathbb{R}} h^2(t) dt \quad (T \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

**Remarque 1.12.** L'équation (1.7) implique

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N(\zeta, T) \|h\|_2^2} \sum_{\substack{(j,k) \in \mathbb{Z}^{*2} \\ j \neq k}} h\left(\frac{\gamma_j}{T}\right) h\left(\frac{\gamma_k}{T}\right) \phi\left[\frac{\log T}{2\pi}(\gamma_j - \gamma_k)\right] \\ &\sim \frac{1}{N(\zeta, T) \|h\|_2^2} \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^{*2}} h\left(\frac{\gamma_j}{T}\right) h\left(\frac{\gamma_k}{T}\right) \phi\left[\frac{\log T}{2\pi}(\gamma_j - \gamma_k)\right] - \phi(0) \quad (T \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

On va donc montrer

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N(\zeta, T) \|h\|_2^2} \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^{*2}} h\left(\frac{\gamma_j}{T}\right) h\left(\frac{\gamma_k}{T}\right) \phi\left[\frac{\log T}{2\pi}(\gamma_j - \gamma_k)\right] \\ &\sim \int_{\mathbb{R}} K(\xi) \widehat{\phi}(\xi) d\xi \quad (T \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

avec

$$K(\xi) = 1 + \widehat{\text{dCOR}}(2, \text{univ})(\xi) = \begin{cases} \delta(\xi) + |\xi| & \text{if } |\xi| < 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On donne quelques ingrédients de la démonstration. L'objectif n'est pas de répéter une démonstration très bien écrite dans [71] (voir aussi [46, Chapter 25]) mais d'expliquer la provenance des termes principaux. On sépare les zéros en calculant

$$\begin{aligned} &\sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^{*2}} h\left(\frac{\gamma_j}{T}\right) h\left(\frac{\gamma_k}{T}\right) \phi\left[\frac{\log T}{2\pi}(\gamma_j - \gamma_k)\right] \\ &= \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^{*2}} h\left(\frac{\gamma_j}{T}\right) h\left(\frac{\gamma_k}{T}\right) \int_{\mathbb{R}} \delta\left(t - \frac{\log T}{2\pi}(\gamma_j - \gamma_k)\right) \phi(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi, de

$$\mathcal{F}\left[t \mapsto \delta\left(t - \frac{\log T}{2\pi}(\gamma_j - \gamma_k)\right)\right](\xi) = \exp(-i\xi(\gamma_j - \gamma_k) \log T)$$

on déduit

$$\sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^{*2}} h\left(\frac{\gamma_j}{T}\right) h\left(\frac{\gamma_k}{T}\right) \phi\left[\frac{\log T}{2\pi}(\gamma_j - \gamma_k)\right] = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} h\left(\frac{\gamma_j}{T}\right) e^{i\xi \gamma_j \log T} \right|^2 \hat{\phi}(\xi) d\xi.$$

La formule explicite, appliquée à

$$H(t) = h\left(\frac{t}{T}\right) e^{i\xi t \log T}, \quad \widehat{H}(u) = T \widehat{h}\left[\left(\frac{\xi}{2\pi} \log T - u\right) T\right]$$

conduit alors à

$$\begin{aligned} & h\left(\frac{\gamma_j}{T}\right) e^{i\xi \gamma_j \log T} \\ &= h\left(\frac{i}{2T}\right) T^{-\xi/2} + h\left(\frac{-i}{2T}\right) T^{\xi/2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h\left(\frac{t}{T}\right) \Omega_{\mathbb{R}}(t) e^{i\xi t \log T} dt \\ & \quad - \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left\{ \widehat{h}\left[\left(\xi \log T - \log n\right) \frac{T}{2\pi}\right] + \widehat{h}\left[\left(\xi \log T + \log n\right) \frac{T}{2\pi}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

On prend le carré de la norme de cette égalité. On peut montrer que la contribution des doubles produits est négligeable. D'autre part, les termes  $h(2/iT)T^{\pm\xi/2}$  ne contribuent pas en raison de la restriction sur le support de  $\hat{\phi}$ . On étudie alors la contribution de l'intégrale, elle sera la distribution de Dirac dans  $K$ . Cette contribution est

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} h\left(\frac{t}{T}\right) \Omega_{\mathbb{R}}(t) e^{-i\xi t \log T} dt \right|^2 \hat{\phi}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 T \log T} \int_{\alpha \in \mathbb{R}} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} h\left(\frac{t}{T}\right) \Omega_{\mathbb{R}}(t) e^{-i\alpha t/T} dt \right|^2 \hat{\phi}\left(\frac{\alpha}{T \log T}\right) d\alpha \\ &= \frac{T}{(2\pi)^2 \log T} \int_{\alpha \in \mathbb{R}} \left| \int_{u \in \mathbb{R}} h(u) \Omega_{\mathbb{R}}(uT) e^{-i\alpha u} du \right|^2 \hat{\phi}\left(\frac{\alpha}{T \log T}\right) d\alpha \\ &\sim \frac{T}{(2\pi)^2 \log T} \hat{\phi}(0) \int_{\alpha \in \mathbb{R}} \left| \int_{u \in \mathbb{R}} h(u) \Omega_{\mathbb{R}}(uT) e^{-i\alpha u} du \right|^2 d\alpha \quad (T \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Notons  $g_T(\alpha)$  l'intégrale en  $u$ . Alors,

$$\int_{\alpha \in \mathbb{R}} g_T(\alpha) g_T(-\alpha) d\alpha = \int_{\xi \in \mathbb{R}} \widehat{g_T}(\xi) \widehat{g_T}(-\xi) d\xi$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{g_T}(\xi) &= \int_{u \in \mathbb{R}} h(u) \Omega_{\mathbb{R}}(uT) \mathcal{F}\left[\alpha \mapsto e\left(-\left(\xi + \frac{u}{2\pi}\right)\alpha\right)\right](0) du \\ &= 2\pi h(2\pi\xi) \Omega_{\mathbb{R}}(2\pi\xi T). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \int_{t \in \mathbb{R}} h\left(\frac{t}{T}\right) \Omega_{\mathbb{R}}(t) e^{-i\xi t \log T} dt \right|^2 \hat{\phi}(\xi) d\xi \\ & \sim \frac{T}{2\pi \log T} \hat{\phi}(0) \int_{\xi \in \mathbb{R}} |h(\xi)|^2 |\Omega_{\mathbb{R}}(\xi T)|^2 d\xi \sim \frac{T \log T}{2\pi} \|h\|_2^2 \hat{\phi}(0) \quad (T \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Ensuite, la contribution de la somme de (1.8) est

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \sum_{m,n} \frac{\Lambda(m)\Lambda(n)}{\sqrt{mn}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-,+\}^2} C^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi$$

avec

$$C^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\xi) = \hat{h} \left[ \left( \xi \log T + \varepsilon_1 \log n \right) \frac{T}{2\pi} \right] \hat{h} \left[ \left( \xi \log T + \varepsilon_2 \log n \right) \frac{T}{2\pi} \right].$$

On examine la contribution de  $C^{-,-}$ . On a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \sum_{m,n} \frac{\Lambda(m)\Lambda(n)}{\sqrt{mn}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} C^{-,-}(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi \\ & = \frac{T}{2\pi \log T} \sum_{m,n} \frac{\Lambda(m)\Lambda(n)}{\sqrt{mn}} \\ & \quad \int_{u \in \mathbb{R}} \hat{h}(u) \hat{h} \left[ u + \frac{T}{2\pi} \log \left( \frac{m}{n} \right) \right] \hat{\phi} \left[ \left( \frac{2\pi}{T} u + \log n \right) \frac{1}{\log T} \right] du. \end{aligned}$$

Par compacité du support de  $\hat{h}$ , les seuls entiers  $m$  et  $n$  contribuant vérifient

$$\log m - \log n \ll \frac{1}{T}. \quad (1.9)$$

Si  $\text{Supp}(\hat{\phi}) = [-1 + \delta, 1 - \delta]$  avec  $\delta > 0$ , le seul entier  $n$  contribuant vérifie

$$\log n \leq \log T^{1-\delta/2} \quad (1.10)$$

pour  $T$  assez grand. Les conditions (1.9) et (1.10) impliquent  $m = n$  grâce au lemme suivant.

**Lemme 1.13.** *Soit  $\delta > 0$ ,  $C > 0$ . Alors pour tout  $T$  assez grand, les conditions  $|\log(m/n)| \leq C/T$  et  $\log n \leq (1 - \delta) \log T$  impliquent  $m = n$ .*

*Démonstration.* Si  $m = n + u$  avec  $u \geq 1$  alors

$$\log m - \log n \geq \frac{u}{n} \geq \frac{1}{T^{1-\delta}}$$

ce qui n'est pas compatible avec

$$\frac{C}{T} \geq \log m - \log n.$$

Le cas  $u < 0$  est semblable.  $\square$

On a donc

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \sum_{m,n} \frac{\Lambda(m)\Lambda(n)}{\sqrt{mn}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} C^{-,-}(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi \\
&= \frac{T}{2\pi \log T} \sum_n \frac{\Lambda(n)^2}{n} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(u)^2 \hat{\phi} \left[ \left(\frac{2\pi}{T}u + \log n\right) \frac{1}{\log T} \right] du \quad (1.11) \\
&\sim \frac{T \|h\|_2^2}{2\pi \log T} \sum_n \frac{\Lambda(n)^2}{n} \hat{\phi} \left( \frac{\log n}{\log T} \right) \quad (T \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

car  $\|\hat{h}\|_2^2 = \|h\|_2^2$ . Le théorème des nombres premiers avec reste conduit immédiatement à

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \Lambda(n)^2 &= \sum_{p \leq x} \log^2 p + O(x^{1/2} \log^2 x) \\
&= x \log x + O(x).
\end{aligned}$$

Par intégration par parties, on a alors

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)^2}{n} \sim \frac{1}{2} \log^2 x \quad (x \rightarrow \infty).$$

Une nouvelle intégration par parties donne donc

$$\begin{aligned}
\sum_n \frac{\Lambda(n)^2}{n} \hat{\phi} \left( \frac{\log n}{\log T} \right) &\sim \log^2 T \int_{v>0} \hat{\phi}(v) v dv \\
&= \frac{1}{2} \log^2 T \int_{v \in \mathbb{R}} \hat{\phi}(v) |v| dv \quad (T \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \sum_{m,n} \frac{\Lambda(m)\Lambda(n)}{\sqrt{mn}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} C^{-,-}(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi &\sim \frac{T \log T}{4\pi} \|h\|_2^2 \int_{\xi \in \mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi) |\xi| d\xi \\
&\quad (T \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \sum_{m,n} \frac{\Lambda(m)\Lambda(n)}{\sqrt{mn}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} C^{+,+}(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi &\sim \frac{T \log T}{4\pi} \|h\|_2^2 \int_{\xi \in \mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi) |\xi| d\xi \\
&\quad (T \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Pour  $C^{\pm,\mp}$ , la condition sur le support de  $\hat{h}$  implique que  $T|\log m + \log n|$  est bornée d'où  $m = n = 1$  et il n'y a pas de contribution. La contribution arithmétique est donc

$$\frac{T \log T}{2\pi} \|h\|_2^2 \int_{\mathbb{R}} |\xi| \hat{\phi}(\xi) d\xi$$

ce qui donne le terme  $|\xi|$  dans  $K$ .

**Remarque 1.14.** La restriction du support de  $\hat{\phi}$  à  $] - 1, 1[$  permet, dans le calcul de (1.11), de ne prendre en compte que les termes diagonaux, *i.e.* ceux où  $m = n$ . Un élargissement du support de  $\hat{\phi}$  impose donc de savoir évaluer les termes non diagonaux. Pour cela, il faut comprendre les sommes du type

$$\sum_{n,d} \frac{\Lambda(n)\Lambda(n+d)}{n},$$

c'est-à-dire la corrélation entre les nombres premiers. Plus précisément, on peut montrer (voir [31], [33]) que si on connaît l'équivalent

$$\int_1^X \left[ \sum_{x < n \leq x+h} \Lambda(n) - h \right]^2 dx \sim hX \log \frac{X}{h} \quad (1 \leq h \leq X^{1-\varepsilon}, X \rightarrow +\infty)$$

alors, on peut étendre le support de  $\hat{\phi}$  autant qu'on veut.

La remarque précédente conduit à la conjecture de Montgomery.

**Conjecture de Montgomery.** Soit  $\phi$  une fonction de localisation. Alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j, k \leq N} \phi(\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_k) = \text{COR}(2, \phi, \text{univ}).$$

La conjecture de Montgomery a d'intéressantes conséquences.

**Proposition 1.15.** (1) En admettant uniquement l'hypothèse de Riemann, au moins  $2/3$  des points d'annulation de  $\zeta$  sont d'ordre 1: il existe une fonction  $\varepsilon$  de limite nulle en  $+\infty$  telle que

$$\frac{1}{N(\zeta, T)} \# \{ \gamma \in Z(\zeta) : 0 < \text{Im } \gamma < T, \zeta'(\gamma) \neq 0 \} \geq \frac{2}{3} + \varepsilon(T).$$

(2) Si de plus, la conjecture de Montgomery est vraie, les points d'annulation de  $\zeta$  sont presque tous d'ordre 1.

*Démonstration.* Pour  $\phi$ , on choisit la fonction

$$\phi(x) = \left[ \frac{\sin(\pi \alpha x)}{\pi \alpha x} \right]^2$$

avec  $\alpha \in ]0, 1[$  à optimiser. La transformée de Fourier de  $\phi$  est à support compact dans  $] - \alpha, \alpha[$  et caractérisée sur son support par

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{|\xi|}{\alpha} \right) \quad (|\xi| < \alpha).$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi d\text{COR}(2, \text{univ}) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi} d\widehat{\text{COR}(2, \text{univ})} = \frac{\alpha}{3} - 1.$$

Grâce au théorème 1.3, et compte-tenu des remarques 1.6 et 1.12, on a donc

$$\frac{1}{N(\zeta, T)} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^* \\ 0 < \text{Im } \gamma_j < T}} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^* \\ 0 < \text{Im } \gamma_k < T}} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\alpha \log T}{2}(\gamma_j - \gamma_k)\right)}{\frac{\alpha \log T}{2}(\gamma_j - \gamma_k)} \right]^2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} + \varepsilon(T).$$

En ne gardant, dans la somme sur  $k$ , que les valeurs de  $k$  telles que  $\gamma_k = \gamma_j$ , on a alors

$$\frac{1}{N(\zeta, T)} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^* \\ 0 < \text{Im } \gamma_j < T}} v_{\gamma_j}(\zeta) \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} + \varepsilon(T)$$

en notant  $v_\gamma(\zeta)$  l'ordre d'annulation de  $\zeta$  en  $\gamma$ . En ne sommant que sur les points d'annulation, et non sur ces points comptés avec multiplicité, on a donc

$$\frac{1}{N(\zeta, T)} \sum_{\substack{\gamma \in Z(\zeta) \\ 0 < \text{Im } \gamma < T}} v_\gamma(\zeta)^2 \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} + \varepsilon(T).$$

Puisque

$$(2 - v)v \begin{cases} \leq 0 & \text{si } v \geq 2, \\ = v & \text{si } v = 1, \end{cases}$$

on a

$$\frac{1}{N(\zeta, T)} \sum_{\substack{\gamma \in Z(\zeta) \\ 0 < \text{Im } \gamma < T}} (2 - v_\gamma(\zeta)) v_\gamma(\zeta) \leq \frac{\#\{\gamma \in Z(\zeta) : 0 < \text{Im } \gamma < T, \zeta'(\gamma) \neq 0\}}{N(\zeta, T)}$$

ou

$$\frac{1}{N(\zeta, T)} \sum_{\substack{\gamma \in Z(\zeta) \\ 0 < \text{Im } \gamma < T}} (2 - v_\gamma(\zeta)) v_\gamma(\zeta) \geq 2 - \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} + \varepsilon(T),$$

d'où

$$\frac{\#\{\gamma \in Z(\zeta) : 0 < \text{Im } \gamma < T, \zeta'(\gamma) \neq 0\}}{N(\zeta, T)} \geq \frac{2}{3} + \varepsilon(T)$$

avec le choix optimal (compte-tenu des contraintes)  $\alpha \rightarrow 1^-$ . Si la conjecture de Montgomery est vraie, on peut choisir  $\alpha > 1$ . Il faut alors remplacer  $\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3}$  par  $1 + \frac{1}{3\alpha^2}$  et on obtient que presque tous les points d'annulation de  $\zeta$  sont simples avec  $\alpha \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Remarque 1.16.** À l'aide d'un procédé d'optimisation décrit, par exemple dans [47, Appendix A], on peut remplacer le choix de  $\phi$  dans la démonstration de la proposition 1.15 par le choix optimal

$$\phi(x) = \frac{1}{1 - \cos(\sqrt{2})} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}-2\pi x}{2}\right)}{\sqrt{2}-2\pi x} + \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}+2\pi x}{2}\right)}{\sqrt{2}+2\pi x} \right]^2$$

dont la transformée de Fourier, de support  $[-1, 1]$  est caractérisée par

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{1 - \cos(\sqrt{2})} \left[ \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}(1 - |\xi|)) + \frac{1 - |\xi|}{2} \cos(\sqrt{2}\xi) \right] \quad (|\xi| \leq 1).$$

Le résultat est légèrement meilleur ( $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cotan \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,6725$  au lieu de  $2/3$ ) [65], [10]. Cependant, en faisant, en plus de l'hypothèse de Riemann, une hypothèse sur les moments d'ordre 6 des fonctions  $L$  de caractères de Dirichlet (cette hypothèse étant conséquence de l'hypothèse de Lindelöf sur ces fonctions  $L$ ), Conrey, Ghosh & Gonek montrent qu'on peut remplacer  $\frac{2}{3}$  par  $\frac{19}{27} \simeq 0,7$  [17]. Leur méthode est différente de celle exposée ici. Notons que pour obtenir ce résultat avec la méthode de Montgomery, il suffirait de connaître la conjecture de Montgomery pour  $\phi$  telle que  $\text{Supp } \hat{\phi} \subset ]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}[$ .

Parmi les problèmes délicats de théorie des nombres, il y a ceux mélangeant les structures additives et multiplicatives des entiers. Par exemple, une conjecture affirme que, pour tout entier  $n > 0$ , il existe un nombre premier dans  $]n^2, (n+1)^2[$ . Cette conjecture est impliquée par la majoration  $p' - p \leq p^A$  avec  $A = 1/2$  pour tout nombre premier  $p$  où  $p'$  désigne le plus petit nombre premier strictement supérieur à  $p$ . Un résultat de Goldston & Heath-Brown [36] fait un pas vers cette conjecture (voir aussi [68], [59]).

**Proposition 1.17.** *Si la conjecture de Montgomery est vraie, alors*

$$\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\min\{p' \in \mathcal{P} : p' > p\} - p}{\sqrt{p \log p}} = 0.$$

Pour terminer cette partie, on reproduit, figure 4, un graphique de Gourdon [34] montrant l'erreur entre les données expérimentales et la conjecture de Montgomery. Plus précisément, Gourdon & Demichel ont calculé  $2 \times 10^9$  zéros de hauteur d'ordre  $10^{16}$  puis  $2 \times 10^9$  zéros de hauteur d'ordre  $10^{20}$  et  $2 \times 10^9$  zéros de hauteur d'ordre  $10^{24}$ . Pour chacune de ces trois séries, ils ont calculé la densité de probabilité des espacements entre zéros normalisés puis soustrait à cette densité la densité conjecturée  $\text{dCOR}(2, \text{univ})$ . Autrement dit, ils représentent (vraisemblablement avec d'autres nombres que 4 et 200) les points de coordonnées  $(a_i, d_i^{\text{exp}} - d_i^{\text{th}})$  pour  $i \in \{1, \dots, 200\}$  avec

$$a_i = \frac{4i}{200},$$

$$d_i^{\text{exp}} = \frac{\#\{(j, k) \in \mathbb{N}^2 : h < j < k \leq h + 2 \cdot 10^9, a_i < \hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_j < a_i + \delta\}}{2 \cdot 10^9}$$

pour  $h \in \{10^{16}, 10^{20}, 10^{24}\}$ ,  $\delta$  petit et

$$d_i^{\text{th}} = \text{dCOR}(2, \text{univ})(a_i) \approx \int_{\mathbb{R}} \phi_i \text{dCOR}(2, \text{univ})$$

avec  $\phi_i$  la fonction caractéristique de  $[a_i, a_i + \delta]$ .

La figure 4 reproduit le résultat obtenu.

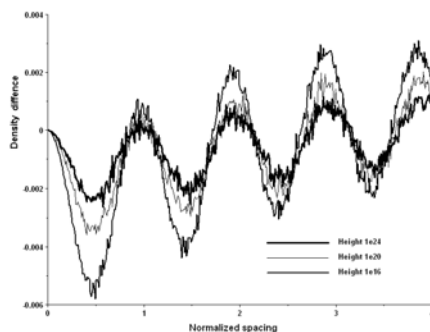


Figure 4. Différence entre densités de corrélation expérimentale et théorique.

## 2 Corrélations d'ordres supérieurs

Le théorème de Montgomery a pour objet la corrélation des paires de zéros normalisés : il permet l'étude de la statistique des écarts entre les zéros normalisés. On introduit la *corrélation de niveau  $n$* . Elle permet d'étudier la distribution des sous-ensembles de taille  $n$  d'une suite donnée. On va restreindre notre étude à la distribution des écarts entre les éléments des sous-ensembles de taille  $n$  d'une suite donnée.

Soit  $n \geq 2$  un entier et  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction vérifiant les conditions suivantes

- (1)  $f$  est symétrique,
- (2)  $f(x_1 + t, x_2 + t, \dots, x_n + t) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite réelle. La première condition permet de voir  $f$  comme une fonction sur les sous-ensembles de  $\mathbf{u}(\mathbb{Z})$  de cardinal  $n$  :

$$f(\mathbf{u}(S)) = f(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) \quad \text{si } S = \{i_1, \dots, i_n\}.$$

La deuxième condition permet d'exprimer le fait que  $f$  ne dépend que des différences successives entre ses arguments : si  $\ell_i = x_{i+1} - x_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , le choix de  $t = -x_1$  conduit en effet à

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(0, \ell_1, \ell_1 + \ell_2, \dots, \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{n-1}).$$

On peut, par exemple, construire  $f$  à partir de n'importe quelle fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} g(|x_i - x_j|). \quad (2.1)$$



La corrélation de niveau  $n$  de la suite  $\mathbf{u}$  est alors la limite de

$$R_n[M; f](\mathbf{u}) = \frac{n!}{M} \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, M\} \\ \#S=n}} f(\mathbf{u}(S)) \quad (2.2)$$

lorsque  $M \rightarrow +\infty$  dans  $\mathbb{N}$  (et lorsque cette limite existe). On a

$$\begin{aligned} R_n[M; f](\mathbf{u}) &= \frac{n!}{M} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq M} f(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) = \frac{1}{M} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq M \\ \text{distincts}}} f(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) \\ &= \frac{n!}{M} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq M} f(0, u_{i_2} - u_{i_1}, \dots, u_{i_n} - u_{i_1}). \end{aligned}$$

**Remarque 2.1.** Pour la compréhension du terme  $1/M$  en facteur de la somme, lire la remarque 3.5.

On remplace la suite  $\mathbf{u}$  par la suite  $\tilde{Z}(\zeta)$  des zéros normalisés de  $\zeta$ . Rudnick & Sarnak [71, Theorem 1.1] ont calculé les corrélations de tous niveaux de cette suite.

**Théorème 2.2.** Soit  $n \geq 2$  un entier. Soit  $h$  la transformée de Fourier inverse d'une fonction  $C^\infty$  à support compact et  $f$  une fonction de Schwartz dont la transformée de Fourier

$$\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e(-\xi \cdot x) dx$$

est à support dans le domaine

$$\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : |\xi_1| + \dots + |\xi_n| \leq 2\}.$$

On suppose que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- la fonction  $f$  est symétrique,
- pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x_1 + t, \dots, x_n + t) = f(x_1, \dots, x_n)$ ,
- la fonction  $f$  tend rapidement vers 0 quand  $|x| \rightarrow \infty$  dans l'hyperplan d'équation  $x_1 + \dots + x_n = 0$ .

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{N(\zeta, T)} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n \\ \text{distincts}}} h\left(\frac{\gamma_{j_1}}{T}\right) \dots h\left(\frac{\gamma_{j_n}}{T}\right) f\left(\frac{\log T}{2\pi}(\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_n})\right) \\ = \left( \int_{\mathbb{R}} h^n \right) \text{COR}(n, f, \text{univ}) \end{aligned}$$

avec

$$\text{COR}(n, f, \text{univ}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(0, x_2, \dots, x_n) d\text{COR}(n, \text{univ})(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

et

$$\text{dCOR}(n, \text{univ})(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \left( \frac{\sin[\pi(x_i - x_j)]}{\pi(x_i - x_j)} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On peut en déduire les corrélations de  $\tilde{Z}(\zeta)$  [71, Theorem 1.2].

**Corollaire 2.3.** *Soit  $n \geq 2$  un entier. Soit  $f$  comme dans l'énoncé du théorème 2.2. Alors*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} R_n[N; f] \left( \tilde{Z}(\zeta) \right) = \text{COR}(n, f, \text{univ}).$$

Bomolgyony & Keating [5], [6] donnent des arguments heuristiques (de nombreuses approximations sont faites sans preuve) permettant de traiter les termes non diagonaux apparaissant dans le calcul des corrélations (voir remarque 1.14) à partir d'une évaluation conjecturale de

$$\pi(m, n, k, N) = \#\{(p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : p < N, mp - nq = k\}.$$

Leurs arguments, faisant intervenir de délicats calculs combinatoires, permettent de penser que dans le corollaire 2.3, on peut supprimer la condition de support de  $\hat{f}$ .

### 3 Le lien avec les matrices aléatoires

#### 3.1 Statistiques discriminantes

On note  $I_N$  la matrice identité  $N \times N$ . Lorsque la taille est implicite, on supprime l'indice et on note plutôt  $I$ . Les groupes de matrices qu'on va utiliser sont les suivants :

- $U(N)$  groupe des matrices  $A$  de taille  $N \times N$  telles  $A^t \bar{A} = I$ ,
- $SO(N)$  sous-groupe de  $U(N)$  constitué des matrices réelles de déterminant 1,
- $USp(2N)$  sous-groupe de  $U(2N)$  formé des matrices  $A$  vérifiant

$$A \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ I_N & 0 \end{pmatrix} {}^t A = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ I_N & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces groupes sont munis d'une mesure de Haar (mesure de probabilité invariante par translation à gauche). Si  $A$  est une matrice de  $U(N)$ , son polynôme caractéristique se factorise sous la forme

$$\det(XI - A) = \prod_{j=1}^N \left( X - e^{i\phi_j(A)} \right)$$

avec  $j \mapsto \phi_j(A)$  croissante à valeurs dans  $[0, 2\pi[$ . On note  $\phi_U(A)$  le multiensemble des angles propres de  $A$  dans  $[0, 2\pi[$  :

$$\phi_U(A) = \{\phi_j(A)\}_{1 \leq j \leq N} \subset [0, 2\pi[^N.$$

Si  $A$  est une matrice de  $\text{SO}(2N + 1)$ , son polynôme caractéristique se factorise sous la forme

$$\det(XI - A) = (X - 1) \prod_{j=1}^N (X - e^{i\phi_j(A)})(X - e^{-i\phi_j(A)})$$

avec  $j \mapsto \phi_j(A)$  croissante à valeurs dans  $[0, \pi]$ . On note  $\phi_{\text{SO}^-}(A)$  le multiensemble des angles propres de  $A$  dans  $[0, \pi]$ , où la valeur propre 1 est comptée avec multiplicité diminuée de 1 :

$$\phi_{\text{SO}^-}(A) = \{\phi_j(A)\}_{1 \leq j \leq N} \subset [0, \pi]^N.$$

Enfin, si  $A$  est une matrice de  $\text{SO}(2N)$  ou  $\text{USp}(2N)$ , son polynôme caractéristique se factorise sous la forme

$$\det(XI - A) = \prod_{j=1}^N (X - e^{i\phi_j(A)})(X - e^{-i\phi_j(A)})$$

avec  $j \mapsto \phi_j(A)$  croissante à valeurs dans  $[0, \pi]$ . On note  $\phi_G(A)$ , avec  $G = \text{SO}$  ou  $G = \text{USp}$ , le multiensemble des angles propres de  $A$  dans  $[0, \pi]$  :

$$\phi_G(A) = \{\phi_j(A)\}_{1 \leq j \leq N} \subset [0, \pi]^N.$$

Une fonction  $f$  de  $\text{GL}(N)$  est dite *centrale* si  $f(h^{-1}gh) = f(g)$  pour toutes matrices  $g$  et  $h$  de  $\text{GL}(N)$ . La valeur de  $f(g)$  ne dépend alors que du multiensemble des valeurs propres de  $g$ . Par abus de langage, si  $G$  est l'un des groupes  $\text{U}(N)$ ,  $\text{SO}(2N)$ ,  $\text{SO}(2N + 1)$ ,  $\text{USp}(2N)$  on dira qu'une fonction est *centrale sur  $G$*  si, pour toute matrice  $g \in G$ , la valeur  $f(g)$  ne dépend que du multiensemble des valeurs propres de  $g$ . Soit  $f$  une fonction centrale sur  $\text{U}(N)$ , si  $A \in \text{U}(N)$ , la valeur  $f(A)$  ne dépend que du multiensemble  $\phi_{\text{U}}(A)$ . On peut donc associer à  $f$  une fonction symétrique  $\tilde{f}$  sur  $[0, 2\pi]^N$ . On a alors

$$\int_{\text{U}(N)} f(A) d_{\text{U}}A = \int_{[0, 2\pi]^N} \tilde{f}(\phi_1, \dots, \phi_N) P_{\text{U}}(\phi_1, \dots, \phi_N) \prod_{j=1}^N d\phi_j$$

où  $d_{\text{U}}A$  est la mesure de Haar sur  $\text{U}(N)$  et

$$P_{\text{U}}(\phi_1, \dots, \phi_N) = \frac{1}{(2\pi)^N N!} \prod_{1 \leq m < n \leq N} |e^{i\phi_m} - e^{i\phi_n}|^2 \quad (3.1)$$

[79, Theorem 7.4.B]. Soit  $f$  une fonction centrale sur  $G(N) \in \{\text{SO}(2N), \text{SO}(2N+1), \text{USp}(2N)\}$ , si  $A \in G(N)$ , la valeur  $f(A)$  ne dépend que du multiensemble  $\phi_G(A)$  avec  $G = \text{SO}^+$  si  $G(N) = \text{SO}(2N)$ ,  $G = \text{SO}^-$  si  $G(N) = \text{SO}(2N + 1)$  et  $G = \text{USp}$  si  $G(N) = \text{USp}(2N)$ . On peut donc associer à  $f$  une fonction symétrique  $\tilde{f}$  sur  $[0, \pi]^N$ . On a alors

$$\int_{G(N)} f(A) d_G A = \int_{[0, \pi]^N} \tilde{f}(\phi_1, \dots, \phi_N) P_G(\phi_1, \dots, \phi_N) \prod_{j=1}^N d\phi_j \quad (3.2)$$

où  $d_G A$  est la mesure de Haar sur  $G(N)$  et

$$P_{\text{SO}^+}(\phi_1, \dots, \phi_N) = \frac{2}{(2\pi)^N N!} \prod_{1 \leq m < n \leq N} |2 \cos \phi_m - 2 \cos \phi_n|^2$$

$$P_{\text{SO}^-}(\phi_1, \dots, \phi_N) = \frac{2^N}{\pi^N N!} \prod_{1 \leq m < n \leq N} (2 \cos \phi_m - 2 \cos \phi_n)^2 \prod_{m=1}^N \sin^2 \frac{\phi_m}{2}$$

$$P_{\text{USp}}(\phi_1, \dots, \phi_N) = \frac{2^N}{\pi^N N!} \prod_{1 \leq m < n \leq N} (2 \cos \phi_m - 2 \cos \phi_n)^2 \prod_{m=1}^N \sin^2 \phi_m$$

[79, équations (9.15), (9.7) et Theorem 7.8.B]. Les formules d'intégration (3.1) et (3.2) sont classiquement appelées *formules de Weyl*.

Dans le but d'étudier la distribution des espaces entre angles propres de matrices unitaires, on introduit les corrélations des suites de ces angles propres. Pour comparer les différentes situations, on normalise les angles de façon à avoir un écart moyen entre angles consécutifs de 1. Si  $A \in \text{U}(N)$ , ses valeurs propres  $e^{i\phi_j(A)}$  parcourent le cercle unité dans le sens trigonométrique lorsque  $j$  croît de 1 à  $N$  : ainsi, la suite des espacements entre angles propres consécutifs est-elle la suite  $\{s_j(A)\}_{1 \leq j \leq N}$  avec

$$s_j(A) = \begin{cases} \phi_{j+1}(A) - \phi_j(A) & \text{si } 1 \leq j \leq N-1, \\ 2\pi + \phi_1(A) - \phi_N(A) & \text{si } j = N. \end{cases}$$

La moyenne de cette suite étant  $\frac{2\pi}{N}$ , on appellera angles normalisés les angles

$$\tilde{\phi}_j(A) = \frac{N}{2\pi} \phi_j(A) \quad (A \in \text{U}(N))$$

et on note  $\tilde{\phi}_U(A)$  la suite des  $N$  angles normalisés. Pour  $A \in \text{SO}(2N)$  ou  $A \in \text{USp}(2N)$ , la moyenne des écarts entre les angles consécutifs de

$$\{e^{i\phi_1(A)}, \dots, e^{i\phi_N(A)}, e^{-i\phi_N(A)}, \dots, e^{-i\phi_1(A)}\}$$

le long du cercle unité est  $\frac{2\pi}{2N}$ . On appellera donc angles normalisés les angles

$$\tilde{\phi}_j(A) = \frac{N}{\pi} \phi_j(A) \quad (A \in \text{SO}(2N) \text{ ou } A \in \text{USp}(2N))$$

et on note  $\tilde{\phi}_G(A)$  la suite des  $N$  angles normalisés avec  $G = \text{SO}^+$  ou  $G = \text{USp}$  selon que  $A \in \text{SO}(2N)$  ou  $A \in \text{USp}(2N)$ . Enfin, pour  $A \in \text{SO}(2N+1)$ , la moyenne des écarts entre les angles consécutifs de  $\{1, e^{i\phi_1(A)}, \dots, e^{i\phi_N(A)}, e^{-i\phi_N(A)}, \dots, e^{-i\phi_1(A)}\}$  le long du cercle unité est  $\frac{2\pi}{2N+1}$ . On appellera donc angles normalisés les angles

$$\tilde{\phi}_j(A) = \frac{N+1/2}{\pi} \phi_j(A) \quad (A \in \text{SO}(2N+1))$$

et on note  $\tilde{\phi}_{\text{SO}^-}(A)$  la suite des  $N$  angles normalisés.

Gaudin [26] (voir aussi les travaux de Dyson [22–24]) a calculé la limite, lorsque  $N$  tends vers  $+\infty$ , des corrélations des angles normalisés pour  $U(N)$ . Katz & Sarnak ont montré que les corrélations étaient les mêmes pour les autres groupes [51, Proposition 5.10.3] et ont minoré la vitesse de convergence.

**Théorème 3.1.** *Soit  $n \geq 2$  un entier. Soit  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction vérifiant les conditions suivantes :*

- (1)  $F$  est symétrique,
- (2)  $F(x_1 + t, x_2 + t, \dots, x_n + t) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,
- (3) il existe un réel  $\alpha \geq 0$  tel que

$$\sup_{1 \leq i, j \leq n} |x_i - x_j| > \alpha \Rightarrow F(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Soit  $(G(N))_N$  l'une des suites de groupes

$$(U(N))_N, (\text{USp}(2N))_N, (\text{SO}(2N))_N, (\text{SO}(2N + 1))_N.$$

On note  $\lambda = 0$  sauf si  $G(N) = \text{SO}(2N + 1)$  où  $\lambda = 1/2$ . Alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{G(N)} R_n[N + \lambda; F](\tilde{\phi}_G(A)) d_G A = \text{COR}(n, F, \text{univ}).$$

Plus précisément, on a le résultat suivant [51, Proposition 5.10.3 et Proposition 5.11.2,]

**Théorème 3.2.** *Avec les notations du théorème 3.1,*

$$\begin{aligned} & \left| \int_{G(N)} R_n[N + \lambda; F](\tilde{\phi}_G(A)) d_G A - \text{COR}(n, F, \text{univ}) \right| \\ & \leq n!(8\alpha)^{n-1} \|F\|_\infty \frac{\log N + (\pi\alpha)^2 + \alpha + 1}{N} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{G(N)} \left| R_n[N + \lambda; F](\tilde{\phi}_G(A)) - \int_{G(N)} R_n[N + \lambda; F](\tilde{\phi}_G(B)) d_G B \right|^2 d_G A \\ & \leq n![3(8\alpha)^{n-1} + 65(8\alpha)^{n-2}] \frac{\|F\|_\infty^2}{N}. \end{aligned}$$

La comparaison des théorèmes 2.2 et 3.1, semble indiquer que les zéros normalisés de  $\zeta$  ont même comportement statistique que les valeurs propres de matrices unitaires. L'universalité des densités  $d\text{COR}(n, \text{univ})$  (au regard des sous-groupes de  $U(N)$ ) ne permet cependant pas de déterminer le groupe qui permettrait de « mimer »  $\zeta$ .

Les fonctions de corrélations permettent de définir d'autres statistiques. Considérons, par exemple, l'espacement. Soit  $k \geq 1$  un entier. Si  $f$  est une fonction continue

à support compact dans  $\mathbb{R}^+$ , la  $k^e$  mesure d'espace des angles propres normalisés d'une matrice  $A \in G(N)$  pour  $G(N) \in \{U(N), SO(2N), SO(2N+1), USp(2N)\}$  est

$$\mu_k(A; f) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} f(\tilde{\phi}_{i+k}(A) - \tilde{\phi}_i(A)).$$

Katz & Sarnak [51, Theorem 1.2.3] démontrent alors le résultat suivant.

**Théorème 3.3.** *Soit  $k \geq 1$  un entier. Il existe une mesure de probabilité,  $\mu(k, \text{univ})$ , dont la fonction de distribution cumulative est continue, telle que pour toute fonction continue à support compact  $f$ , si  $(G(N))_N$  est l'une des suites de groupes  $(U(N))_N$ ,  $(USp(2N))_N$ ,  $(SO(2N))_N$ ,  $(SO(2N+1))_N$  alors,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{G(N)} \mu_k(A, f) d_G A = \int_0^{+\infty} f d\mu(k, \text{univ}).$$

On connaît une minoration de la vitesse de convergence grâce au résultat suivant [51, 1.2.6].

**Théorème 3.4.** *Avec les notations du théorème 3.3, on a, pour tout  $\varepsilon > 0$  la majoration*

$$\int_{G(N)} \sup_f \left[ \mu_k(A; f) - \int_0^{+\infty} f d\mu(k, \text{univ}) \right] d_G A \ll_{\varepsilon} N^{-1/6+\varepsilon}$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les fonctions continues à support compact dont la valeur absolue est majorée par 1.

On écrit ensuite quelques statistiques discriminantes. Soit  $k \geq 1$  un entier. Si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}^+$  à support compact, la *mesure de répartition de la  $k^e$  valeur propre* dans  $G(N)$  est

$$v_k(G(N); f) = \int_{G(N)} f(\tilde{\phi}_k(A)) d_G A.$$

Ensuite, si  $f$  est symétrique sur  $\mathbb{R}^k$ , continue et à décroissance rapide, la *distribution de répartition d'ordre  $k$*  des valeurs propres normalisées de  $G(N)$  est

$$W_k(G(N); f) = \int_{G(N)} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} f(\tilde{\phi}_{i_1}(A), \dots, \tilde{\phi}_{i_k}(A)) d_G A.$$

**Remarque 3.5.** La différence entre la corrélation d'ordre  $k$  et la répartition d'ordre  $k$  réside essentiellement dans le choix de la fonction test  $f$ . La corrélation permet de mesurer la distribution des paquets de  $k$  angles propres dans des intervalles de longueurs d'ordre  $1/N$ , la répartition d'ordre  $k$  permet de mesurer la distribution des « petits angles propres », *i.e.* ceux se trouvant dans un intervalle centré en 0 de longueur environ  $1/N$ . En se souvenant que l'écart moyen entre deux angles propres est  $1/N$ , on s'attend à ce qu'il y ait  $N$  couples  $(i, j)$  tels que la différence  $|\phi_i - \phi_j|$  soit

inférieure à  $1/N$  et un angle dans l'intervalle  $[0, 1/N[$ . C'est la justification du terme  $1/N$  en facteur de la somme dans la corrélation n'apparaissant pas dans le répartition d'ordre  $k$ .

Katz & Sarnak démontrent le théorème suivant [51, Proposition 7.5.6, Theorem AD.2.2].

**Théorème 3.6.** (1) Soit  $k \geq 1$  un entier. Il existe trois fonctions continues  $v_k, v_{k,+}$  et  $v_{k,-}$  telles que, pour toute fonction  $f$  continue à croissance polynomiale,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} v_k(G(N); f) = \begin{cases} \int_{[0, +\infty[} f(x) v_k(x) dx & \text{si } (G(N))_N = (\mathbf{U}(N))_N, \\ \int_{[0, +\infty[} f(x) v_{k,+}(x) dx & \text{si } (G(N))_N = (\mathbf{SO}(2N))_N, \\ \int_{[0, +\infty[} f(x) v_{k,-}(x) dx & \text{si } (G(N))_N = (\mathbf{USp}(2N))_N \\ & \text{ou } (G(N))_N = (\mathbf{SO}(2N+1))_N. \end{cases}$$

(2) Soit  $k \geq 1$  un entier. Il existe trois fonctions,  $W_k, W_{k,+}$  et  $W_{k,-}$ , telles que pour toute fonction continue à support compact  $f$ , on ait

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} W_k(G(N); f) = \begin{cases} \int_{[0, +\infty[^k} f(x) W_k(x) dx & \text{si } (G(N))_N = (\mathbf{U}(N))_N, \\ \int_{[0, +\infty[^k} f(x) W_{k,+}(x) dx & \text{si } (G(N))_N = (\mathbf{SO}(2N))_N, \\ \int_{[0, +\infty[^k} f(x) W_{k,-}(x) dx & \text{si } (G(N))_N = (\mathbf{USp}(2N))_N \\ & \text{ou } (G(N))_N = ((2N+1))_N \end{cases}$$

avec

$$W_k(x_1, \dots, x_k) = \det \left( \frac{\sin[\pi(x_i - x_j)]}{\pi(x_i - x_j)} \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

$$W_{k,\pm}(x_1, \dots, x_k) = \det \left( \frac{\sin[\pi(x_i - x_j)]}{\pi(x_i - x_j)} \pm \frac{\sin[\pi(x_i + x_j)]}{\pi(x_i + x_j)} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On peut déterminer les fonctions  $v_k$  et  $v_{k,\pm}$  de la façon suivante [51, Proposition 7.5.5]. Avec les mêmes notations que dans le point 2) du théorème 3.6 on pose

$$E(T, t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{T^k}{k!} \int_{[0, t]^k} W_k(x) dx, \quad E_{\pm}(T, t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{T^k}{k!} \int_{[0, t]^k} W_{k,\pm}(x) dx.$$

En développant ces fonctions autour de  $T = -1$ , on obtient

$$E(T, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1+T)^k E_k(t), \quad E_{\pm}(T, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1+T)^k E_{k,\pm}(t).$$

Les fonctions de distributions cumulatives cherchées sont alors

$$\int_0^t v_k(x) dx = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} E_k(t), \quad \int_0^t v_{k,\pm}(x) dx = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,\pm}(t).$$

En particulier, ces formules peuvent être utilisées pour déterminer les premiers termes des développements limités de  $\nu_1$  et  $\nu_{1,\pm}$  [61], [51, Appendix : Graphs]. On trouve

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \text{Haar}\{A \in \text{U}(N) : \tilde{\phi}_1(A) \in [0, x]\} &= 1 - \frac{\pi^2}{36}x^3 + O(x^5), \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \text{Haar}\{A \in \text{SO}(2N) : \tilde{\phi}_1(A) \in [0, x]\} &= 2 - \frac{2\pi^2}{9}x^2 + O(x^4), \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \text{Haar}\{A \in \text{SO}(2N+1) : \tilde{\phi}_1(A) \in [0, x]\} &= \frac{2\pi^2}{9}x^2 + O(x^4), \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \text{Haar}\{A \in \text{USp}(2N) : \tilde{\phi}_1(A) \in [0, x]\} &= \frac{2\pi^2}{9}x^2 + O(x^4).\end{aligned}$$

Dans le cas de  $\text{SO}(2N+1)$  et  $\text{USp}(2N)$ , il y a donc très peu de petites valeurs propres non triviales. Il y a répulsion (voir la remarque 1.7). Ce phénomène n'existe pas dans le cas de  $\text{U}(N)$  ou  $\text{SO}(2N)$ . Dans le cas de  $\text{SO}(2N)$ , il y a même deux fois plus de petites valeurs propres que dans le cas de  $\text{U}(N)$ .

Enfin, on introduit une dernière statistique, très proche de la répartition de premier ordre. L'intérêt de cette nouvelle statistique est de permettre une discrimination de tous les groupes qu'on a introduit : l'observation de cette statistique sur les valeurs propres d'un des groupes  $\text{U}(N)$ ,  $\text{USp}(2N)$ ,  $\text{SO}(2N)$  ou  $\text{SO}(2N+1)$  permettra de retrouver le groupe étudié. On introduit une normalisation légèrement différente des angles propres. Soit  $A \in \text{U}(N)$ , on étend son spectre en posant

$$\phi_{j+\ell N}(A) = \phi_j + 2\ell\pi \quad (A \in \text{U}(N), j \in \{1, \dots, N\}, \ell \in \mathbb{Z}).$$

Si  $f$  est à décroissance rapide, on pose

$$D(f, \text{U}(N), A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{N}{2\pi}\phi_n(A)\right).$$

Si  $K \subset \text{U}(N)$  est un sous-groupe compact, on définit

$$D(K; f) = \int_K D(f, \text{U}(N), A) d_K A.$$

Cette statistique joue le même rôle que la répartition d'ordre 1. Pour l'en distinguer, on lui réserve le nom de statistique des *petits angles propres*. Katz & Sarnak [51, Theorem AD.12.6] démontrent le résultat suivant.



**Théorème 3.7.** *Soit  $f$  une fonction à décroissance rapide. Alors*

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} D(\mathrm{U}(N), f) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) D[\mathrm{U}](t) dt \quad \text{avec } D[\mathrm{U}](t) = 1, \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} D(\mathrm{USp}(2N), f) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) D[\mathrm{USp}](t) dt \\ &\quad \text{avec } D[\mathrm{Usp}](t) = 1 - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}, \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} D(\mathrm{SO}(2N), f) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) D[\mathrm{SO}^+](t) dt \\ &\quad \text{avec } D[\mathrm{SO}^+](t) = 1 + \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}, \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} D(\mathrm{SO}(2N+1), f) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) D[\mathrm{SO}^-](t) dt \\ &\quad \text{avec } D[\mathrm{SO}^-](t) = 1 - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} + \delta(t). \end{aligned}$$

Hughes & Rudnick [41, Theorem 6.2 et Theorem 6.5] ont calculé les premiers moments centrés réduits de la variable aléatoire limite de  $D_N : A \mapsto D(f, \mathrm{U}(N), A)$ . Posons

$$\sigma[\phi] = \sqrt{\int_{-1}^1 \min(1, |u|) \hat{\phi}(u)^2 du}.$$

**Théorème 3.8.** *Soit  $m \geq 2$  un entier et  $f$  une fonction de localisation telle que  $\mathrm{Supp} \hat{\phi} \subset [-2/m, 2/m]$ . Alors,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathrm{U}(N)} \left[ \frac{D(f, \mathrm{U}(N), A) - D(\mathrm{U}(N), f)}{\sigma[f]} \right]^m dA = \begin{cases} \frac{m!}{2^{m/2}(m/2)!} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il résulte de ce théorème que les premiers moments de la variable limite de  $D_N$  sont ceux de la loi normale. Il est assez rare, dans les théorèmes concernant les matrices aléatoires, de voir une contrainte sur le support de la fonction de localisation. Elle est ici essentielle : si pour  $f$  on prend la fonction caractéristique de  $[-1, 1]$ , la variable  $D_N$  est une fonction de comptage, donc une variable aléatoire discrète. Sa variable aléatoire limite ne peut donc pas suivre la loi normale et le théorème 3.8 ne peut pas s'étendre simultanément à tous les moments et toutes les fonctions de localisation. La variable aléatoire limite de  $D_N$  a un comportement « faussement normal »<sup>2</sup>. Pour les autres groupes, on pourra se reporter à [42].

<sup>2</sup>Hughes & Rudnick utilisent le terme « mock-Gaussian ». On pourrait aussi dire « se gaussant de la loi de Gauss ».

### 3.2 Moments de polynômes caractéristiques

Soit  $G(N)$  l'un des groupes  $U(N)$ ,  $USp(2N)$ ,  $SO(2N)$  et  $SO(2N + 1)$ . Pour  $s \in \mathbb{C}$ , et  $A \in G(N)$ , on définit

$$L(A, s) = \det(I - As)$$

puis le moment complexe d'ordre  $s$  de  $G(N)$  par

$$M[G(N); s] = \int_{G(N)} |L(A, 1)|^s d_G A.$$

Puisque  $M[SO(2N + 1); s]$  est nul à cause de la valeur propre 1, on étudie plutôt :

$$M'[SO(2N + 1); s] = \int_{SO(2N+1)} |L'(A, 1)|^s dA.$$

Keating & Snaith [52], [53] ont calculé ces moments.

**Théorème 3.9.** Soit  $s \in \mathbb{C}$ , alors

$$M[U(N); s] = \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(j)\Gamma(j+s)}{\Gamma(j+s/2)^2} = g_U(s)N^{(s/2)^2}[1 + o(1)],$$

$$\begin{aligned} M[USp(2N); s] &= 2^{Ns} \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(j+N+1)\Gamma(j+s+1/2)}{\Gamma(j+1/2)\Gamma(j+N+s+1)} \\ &= g_{USp}(s)N^{s(s+1)/2}[1 + o(1)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M[SO(2N); s] &= 2^{2Ns} \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(j+N-1)\Gamma(j+s-1/2)}{\Gamma(j-1/2)\Gamma(j+N+s-1)} \\ &= g_{SO^+}(s)N^{s(s-1)/2}[1 + o(1)], \end{aligned}$$

$$M'[SO(2N + 1); s] = \frac{1}{2}M[SO(2N); s + 1]$$

avec

$$\begin{aligned} g_U(s) &= \frac{G_2(1+s/2)^2}{G_2(1+s)}, \\ g_{USp}(s) &= 2^{s^2/2} \frac{G_2(1+s)\sqrt{\Gamma(1+s)}}{\sqrt{G_2(1+2s)\Gamma(1+2s)}}, \\ g_{SO^+}(s) &= 2^{s^2/2} \frac{G_2(1+s)\sqrt{\Gamma(1+2s)}}{\sqrt{G_2(1+2s)\Gamma(1+s)}}. \end{aligned}$$

**Remarque 3.10.** La fonction  $G_2$  est la fonction de Barnes<sup>3</sup>, inverse de la fonction double gamma  $\Gamma_2$ . De façon générale, Vignéras [77, §2] montre que, pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe une unique fonction  $G_n$  méromorphe telle que

<sup>3</sup>Puisqu'elle fut étudiée par le futur évêque Barnes [3].

- (1) pour tout  $z$  complexe,  $G_n(z+1) = G_{n-1}(z)G_n(z)$ ,  
 (2)  $G_n(1) = 1$ ,  
 (3)  $G_n$  est indéfiniment dérivable sur l'intervalle réel  $[1, +\infty[$  et

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \ln G_n(x) \geq 0,$$

- (4)  $G_0(x) = x$  pour tout réel  $x$ .

La démonstration repose sur un théorème de Dufresnoy & Pisot [19] qui, en plus de l'existence et de l'unicité de  $G_n$  fournit le développement en série de Weierstraß. On trouve ainsi

$$G_2(1+z) = (2\pi)^{z/2} e^{-[(1+\gamma)z^2+z]/2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left[ \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z+z^2/(2n)} \right]$$

où

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N$$

est la constante d'Euler. La fonction  $G_2$  est entière et tous ses zéros sont les entiers  $-n \leq 0$  avec multiplicité  $n+1$ . Son logarithme est une fonction génératrice des valeurs de  $\zeta$  aux entiers positifs puisque, pour  $|z| < 1$ , on a

$$\log G_2(1+z) = [\log(2\pi) - 1] \frac{z}{2} - (1+\gamma) \frac{z^2}{2} + \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n-1} \zeta(n-1) \frac{z^n}{n}.$$

Compte-tenu de  $G_2(1) = 1$  et de la relation de récurrence, on a  $G_2(2) = 1$  et

$$G_2(n) = \prod_{k=1}^{n-2} (k!) \quad \text{pour } n \geq 3. \quad (3.3)$$

Barnes a montré que

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = A^{-3/2} \pi^{-1/4} e^{1/8} 2^{1/24} \quad (3.4)$$

où  $A$  est la constante de Glaisher définie par

$$\log A = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[ \log \prod_{k=1}^N k^k - \left( \frac{N^2 + N}{2} + \frac{1}{12} \right) \log N + \frac{N^2}{4} \right].$$

Glaisher [28] (voir aussi [76, Theorem 4.6] et [78, Appendix]) a montré que

$$\begin{aligned} A &= \exp\left(\frac{1}{12} - \zeta'(1)\right) = (2\pi)^{1/12} \exp\left(\frac{\gamma}{12} - \frac{\zeta'(2)}{2\pi^2}\right) \\ &= 1,28242712910062263687534256888\dots \end{aligned}$$

Adamchik [1, §6] a donné des méthodes de calculs avec grande précision de cette constante. On déduit de l'expression 3.4 et de la relation de récurrence que

$$G_2\left(n + \frac{1}{2}\right) = \pi^{n/2-1/4} 2^{1/24-n(n-1)/2} e^{1/8} A^{-3/2} \prod_{j=1}^{n-1} [(2j-1)!!] \quad (3.5)$$

pour tout entier  $n \geq 1$  où le produit vide vaut 1 par convention et où  $(2j-1)!! = 3 \times 5 \times \dots \times (2j-1)$ . La relation (3.3) conduit à

$$g_U(2k) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(k+j)!}$$

$$g_U(2k+1) = \pi^{k+1/2} 2^{1/12-3k^2/2-k/2} e^{1/4} A^{-3} k! \prod_{j=1}^k \frac{(2j-1)!!}{(2j)!j!}$$

$$g_{U_{sp}}(2k) = \prod_{j=1}^k \frac{1}{(2j-1)!!}$$

$$g_{SO^+}(2k) = 2^k \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(2j-1)!!}$$

pour tout entier  $k \geq 1$ .

TAB. 1. Quelques valeurs de  $g_U(k)$ .

$k$	1	2	3	4
$g_U(k)$	$\frac{\sqrt{\pi} e^{1/4} 2^{1/12}}{A^3}$	1	$\frac{\pi^{3/2} 2^{1/12} e^{1/4}}{8A^3}$	$\frac{1}{12}$
$k$	5	6	7	8
$g_U(k)$	$\frac{\pi^{5/2} 2^{1/12} e^{1/4}}{2048A^3}$	$\frac{1}{8640}$	$\frac{\pi^{7/2} 2^{1/12} e^{1/4}}{50331648A^3}$	$\frac{1}{870912000}$

Plutôt que d'étudier les moments des polynômes caractéristiques, on peut étudier l'autocorrélation. Cela signifie qu'au lieu d'étudier l'espérance sur  $U(N)$  de la variable aléatoire  $A \mapsto L(A, 1)$  multipliée par elle-même, on calcule l'espérance sur  $U(N)$  d'un produit de variables aléatoires obtenues à partir de la variable aléatoire  $A \mapsto L(A, 1)$  par déformation. Ici, la déformation se fait en remplaçant la valeur 1 par un nombre complexe de module 1. C'est ce qu'on fait Conrey, Farmer, Keating, Rubinstein & Snaith [15] pour les sous-groupes compacts de  $U(N)$ . On ne donne que le résultat concernant  $U(N)$  qui est essentiellement dû à Basor & Forrester [4] (voir aussi [9]).

**Théorème 3.11.** *Pour tout  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}) \in \mathbb{R}^{2k}$ ,*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{U}(N)} \prod_{j=1}^k L(A, e^{-\alpha_j}) \prod_{j=1}^k L(\bar{t}A, e^{\alpha_{k+j}}) dA \\ &= \exp\left(-\frac{N}{2} \sum_{j=1}^k \alpha_j + \frac{N}{2} \sum_{j=1}^k \alpha_{k+j}\right) \\ & \quad \times \sum_{\sigma \in \Xi} \exp\left(\frac{N}{2} \sum_{j=1}^k \alpha_{\sigma(j)} - \frac{N}{2} \sum_{j=1}^k \alpha_{\sigma(k+j)}\right) \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq k \\ k+1 \leq m \leq 2k}} \frac{1}{1 - \exp[\alpha_{\sigma(m)} - \alpha_{\sigma(\ell)}]}. \end{aligned}$$

*L'ensemble  $\Xi$  est l'ensemble des permutations  $\sigma$  de  $\{1, \dots, 2k\}$  telles que*

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k) \text{ et } \sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \dots < \sigma(2k).$$

### 3.3 Modélisation de $\zeta$ par les polynômes caractéristiques

En montrant que les variables aléatoires sur  $\mathbf{U}(N)$  muni de la mesure de Haar

$$A \mapsto \operatorname{Re} \log L(A, 1) \quad \text{et} \quad A \mapsto \operatorname{Im} \log L(A, 1)$$

tendent vers deux variables indépendantes de loi normales d'espérance 0 et variance 1, Keating & Snaith [52] montrent que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \operatorname{Haar} \left\{ A \in \mathbf{U}(N) : \frac{\log L(A, 1)}{\sqrt{\frac{1}{2} \log N}} \in B \right\} = \frac{1}{2\pi} \iint_B \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy$$

pour tout rectangle  $B$  de  $\mathbb{R}^2$ . D'autre part, Selberg<sup>4</sup> a montré

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \# \left\{ t \in [T, 2T] : \frac{\log \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}} \in B \right\} = \frac{1}{2\pi} \iint_B \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy.$$

Cela, ajouté aux calculs de corrélations, invite à modéliser  $\zeta$  par les polynômes caractéristiques de  $\mathbf{U}(N)$  en faisant l'identification

$$N \longleftrightarrow \log T. \tag{3.6}$$

D'autre part,  $s \mapsto L(A, s)$  est une fonction entière. De plus, on a l'équation

$$s^{-N/2} L(A, s) = \varepsilon(A) \left(\frac{1}{s}\right)^{-N/2} L\left(\bar{t}A, \frac{1}{s}\right)$$

où  $\varepsilon(A) = (-1)^N \det A$  est de module 1. Tous les points d'annulation de  $L(A, s)$  sont sur le cercle unité, ce qui peut être comparé à l'hypothèse de Riemann. L'espacement entre les points d'annulation de  $L(A, s)$  est  $\frac{2\pi}{N}$  à comparer à l'espacement moyen  $\frac{2\pi}{\log T}$  des points d'annulation de  $\zeta$  à hauteur  $T$ . Là encore, l'identification se fait *via* (3.6).

<sup>4</sup>Dans un travail non publié. Voir [49] pour une démonstration et une intéressante extension.

Cette modélisation néglige évidemment les propriétés arithmétiques de  $\zeta$  (ou bien, elle les met en valeur en creux). Keating & Snaith [52] montrent ainsi

$$\int_{U(N)} [\operatorname{Im} \log L(A, 1)]^2 dA = \frac{1}{2} \log N + \frac{1}{2}(\gamma + 1) + o(1)$$

alors que Goldston [30, (1.10)], en supposant vraie la conjecture de Montgomery, a montré

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \operatorname{Im} \log \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right]^2 dt &= \frac{1}{2} \log \log \frac{T}{2\pi} + \frac{1}{2}(\gamma + 1) \\ &+ \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1+m}{m^2} \frac{1}{p^m} + o(1). \end{aligned}$$

Cependant, on va voir dans la partie suivante que cette modélisation est riche.

## 4 Moments de $\zeta$

La conjecture de Lindelöf concerne la taille de  $\zeta \left( \frac{1}{2} + it \right)$  pour  $t$  grand. Cette conjecture est que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout réel  $t$  tel que  $|t| \geq 1$ , on ait

$$\left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right| \leq Ct^\varepsilon.$$

Une façon d'étudier cette conjecture est d'étudier les moments d'ordres pairs :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^{2k} dt.$$

Dès 1918, Hardy & Littlewood ont montré

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt = \log(T)(1 + o(1)).$$

On trouve une démonstration dans [75, Theorem 7.4] (voir aussi [43, Chapter 15]). En 1926, Ingham a calculé le moment d'ordre 4 suivant :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^4 dt = \frac{1}{2\pi^2} \log^4(T(1 + o(1))).$$

On trouve une démonstration dans [43, Chapter 5]. Depuis, aucun moment d'ordre supérieur n'a été précisément évalué. Il a même fallu attendre jusqu'à très récemment pour avoir des conjectures complètes sur les moments supérieurs. Ainsi, en 1998, Conrey & Ghosh [16] ont conjecturé

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^6 dt = \frac{1}{8640} \prod_{p \in \mathcal{P}} \left[ \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^4 \left( 1 + \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2} \right) \right] \log^9 T. \quad (4.1)$$

En 2000, Conrey & Gonek [18] ont conjecturé

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^8 dt = \frac{1}{870912000} \prod_{p \in \mathcal{P}} \left[ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^9 \left(1 + \frac{9}{p} + \frac{9}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right) \right] \log^{16} T. \quad (4.2)$$

On donne les très grandes lignes du cheminement conduisant à cette conjecture. Si  $z \in \mathbb{C}$ , on définit les coefficients de Dirichlet de  $\zeta^z$  en écrivant

$$\zeta(s)^z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_z(n)}{n^s} \quad \text{pour } \operatorname{Re} s > 1.$$

En utilisant le produit eulérien, on voit que  $d_z$  est la fonction multiplicative définie pour toute puissance de nombre premier  $p^j$  par

$$d_z(p^j) = \frac{\Gamma(k+j)}{\Gamma(k)j!} \quad \text{pour tous } p \in \mathcal{P} \text{ et } j \in \mathbb{N}.$$

Pour  $\operatorname{Re} s \in ]0, 1[$ , on utilise une « équation fonctionnelle approchée<sup>5</sup> ». On obtient une égalité de la forme

$$\zeta(s)^k = D_{k,N}(s) + \omega_k(s) D_{k,M}(1-s) + E_k(s).$$

Dans cette équation, on a

$$D_{k,N}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}$$

et

$$MN = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^k, \quad \omega_k(s) = \left[ \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \right]^k$$

et  $E_k(s)$  est un terme d'erreur. Conrey & Gonek conjecturent alors

$$\int_T^{2T} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2k} \sim \int_T^{2T} \left| D_{k,N}\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 + \int_T^{2T} \left| D_{k,M}\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 \quad (4.3)$$

pour  $MN = [T/(2\pi)]^k$  et  $M$  et  $N$  supérieurs à  $1/2$ . Via l'étude des intégrales de polynômes de Dirichlet

$$\int_T^{2T} \left| \sum_{n=1}^N a_n n^{it} \right|^2 dt$$

(voir, par exemple, [46, Chapter 9]), on en déduit

$$\int_T^{2T} \left| D_{k,N}\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 = \sum_{n=1}^N \frac{d_k(n)^2}{n} [T + o(n)] \sim \frac{a_k}{\Gamma(k^2 + 1)} T \log^{k^2} N$$

<sup>5</sup>Par cette expression, il faut comprendre qu'on utilise l'équation fonctionnelle pour transformer une intégrale contour de type transformée de Mellin autour de  $s$  en deux intégrales sur des droites verticales du demi-plan à droite de la bande critique ([62, Lecture I] ou [43, Chapter 4] pour la mise en œuvre).

avec

$$a_k = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left[ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{d_k(p^r)^2}{p^r} \right] = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{(k-1)^2} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \frac{1}{p^j} \quad (4.4)$$

pour  $N \ll T$ . Cette dernière restriction oblige à avoir  $k \leq 2$ . Pour autoriser l'exploration de moments d'ordres supérieurs, Conrey & Gonek utilisent un résultat de Goldston & Gonek [32] permettant l'évaluation d'intégrales du type

$$\int_T^{2T} \left| \sum_{n=1}^N a_n n^{-1/2-it} \right|^2 dt$$

dès lors qu'on sait évaluer

$$\sum_{n \leq x} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \leq x} a_n a_{n+h}.$$

En utilisant la méthode du symbole  $\delta$  de Duke, Friedlander & Iwaniec, Conrey & Gonek établissent une conjecture portant sur le cas où  $a_k = d_k$ . Cela les conduit à faire la conjecture suivante.

**Conjecture 1.** Soit  $N = T^{1+\eta}$  avec  $\eta \in [0, 1]$ . Alors,

$$\int_T^{2T} \left| D_{k,N} \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \sim w_k(\eta) \frac{a_k}{\Gamma(k^2 + 1)} T \log^{k^2} T$$

où  $a_k$  est défini comme en (4.4) et

$$w_k(\eta) = (1 + \eta)^{k^2} \left\{ 1 - k^3 \left(1 - \frac{1}{1 + \eta}\right) - \sum_{n=1}^{k^2-1} \binom{k^2}{n+1} \gamma_k(n) \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \eta)^{n+1}} \right] \right\}$$

avec

$$\gamma_k(n) = (-1)^n \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{i} \binom{k}{j} \binom{n-1}{i-1, j-1, n-i-j+1}.$$

**Remarque 4.1.** Le coefficient multinomial  $\binom{a}{b, c, a-b-c}$  est nul si l'un des ses coefficients est strictement négatif et défini par

$$\binom{a}{b, c, a-b-c} = \frac{a!}{b!c!(a-b-c)!} \quad \text{sinon.}$$

Pour  $k = 3$  (donc pour le moment d'ordre 6), on a

$$w_3(\eta) = 1 + 9\eta + 36\eta^2 + 84\eta^3 + 126\eta^4 - 630\eta^5 + 588\eta^6 - 180\eta^7 + 9\eta^8 - 2\eta^9$$



et de  $w_3(\eta) + w_3(1 - \eta) = 42$ , on déduit (4.1). Pour  $k = 4$  (donc pour le moment d'ordre 8), on a

$$\begin{aligned} w_4(\eta) = & 1 + 16\eta + 120\eta^2 + 560\eta^3 + 1820\eta^4 + 4368\eta^5 + 8008\eta^6 + 11440\eta^7 \\ & + 12870\eta^8 + 11440\eta^9 - 152152\eta^{10} + 179088\eta^{11} - 78260\eta^{12} \\ & + 14000\eta^{13} - 1320\eta^{14} + 16\eta^{15} - 3\eta^{16} \end{aligned}$$

et de  $2w_4(1) = 24024$ , on déduit (4.2).

Le coefficient numérique en facteur du coefficient  $a_k$  semble assez mystérieux. On va voir que la théorie des matrices aléatoires fournit ce coefficient. Pour la suite, on pose donc (en supposant l'existence de la limite)

$$g_k = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_k T \log^{k^2} T} \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2k} dt.$$

Le coefficient  $a_k$  est apparu assez naturellement dans ce qui précède : sa nature est arithmétique ; le coefficient  $g_k$  va apparaître naturellement dans ce qui suit : sa nature est spectrale.

En utilisant la partie 3.3, on modélise la fonction  $\zeta$  par les polynômes caractéristiques de matrices unitaires. L'exemple donné en fin de cette partie montre que cette modélisation ne prend pas en compte la spécificité arithmétique de  $\zeta$ . Keating & Snaith ont alors énoncé la conjecture suivante.

**Conjecture 2.** *Soit  $k \geq 1$  un entier. Alors*

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2k} dt \sim g_k a_k T \log^{k^2} T$$

lorsque  $T \rightarrow +\infty$ , avec

$$g_k = g_U(2k) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(k+j)!}$$

et

$$a_k = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{(k-1)^2} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j}^2 \frac{1}{p^j}.$$

Dans cette conjecture, on peut aisément remplacer  $k$  par n'importe quel nombre complexe de partie réelle  $\operatorname{Re} k > -\frac{1}{2}$ . La table 1 montre que cette conjecture est compatible avec celles de Conrey & Ghosh (équation(4.1)) et Conrey & Gonek (équation (4.2)) obtenues par des méthodes indépendantes de la théorie des matrices aléatoires.

Hughes a lui étudié les moments discrets et, *via* la modélisation par les matrices aléatoires, il obtient la conjecture suivante [40, Conjecture 5].

**Conjecture 3.** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{1}{2}$ . Alors, uniformément en  $\alpha$  tel que  $|\alpha| \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi}$  on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{T \log T \left(\log \frac{T}{2\pi}\right)^{\lambda^2}} \sum_{0 < \gamma_n \leq T} \left| \zeta \left[ \frac{1}{2} + i \left( \gamma_n + \frac{2\pi\alpha}{\log \frac{T}{2\pi}} \right) \right] \right|^{2\lambda} = g_U(2\lambda) a(\lambda) F_\lambda(2\pi\alpha)$$

avec

$$F_\lambda(x) = \frac{x^2}{4} \left[ j_\lambda \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 + \frac{x^2}{4} \left[ j_{\lambda-1} \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 - \lambda x j_\lambda \left( \frac{x}{2} \right) j_{\lambda-1} \left( \frac{x}{2} \right),$$

où  $j_n$  est la fonction de Bessel sphérique de première espèce et niveau  $n$ .

**Remarque 4.2.** Soit  $J_n$  la fonction de Bessel de première espèce et de niveau  $n$  [35, § 8.4 et § 8.5] alors

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z).$$

Par [35, 8.461] on a

$$\begin{aligned} j_n(z) &= \frac{1}{z} \sin \left( z - \frac{\pi}{2} n \right) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n+2k)!}{(2k)! (n-2k)!} \frac{1}{(2z)^{2k}} \\ &\quad + \frac{1}{z} \cos \left( z - \frac{\pi}{2} n \right) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n+2k+1)!}{(2k+1)! (n-2k-1)!} \frac{1}{(2z)^{2k+1}}. \end{aligned}$$

On en tire

$$j_n(z) = \begin{cases} (-1)^{(n+1)/2} \frac{\cos z}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) & n \text{ impair,} \\ (-1)^{n/2} \frac{\sin z}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) & n \text{ pair} \end{cases} \quad (\|z\| \rightarrow \infty).$$

Par [35, 8.402] on a

$$j_n(z) = 2^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (n+m)!}{m! (2n+2m+1)!} z^{n+2m}.$$

Enfin, en lien avec le théorème 3.11, Conrey, Farmer, Keating, Rubinstein & Snaith [14, équation (2.2.15) et theorem 2.4.1] ont conjecturé l'autocorrélation associée à  $\zeta$ .

**Conjecture 4.** Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}) \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^{2k}$ . Alors,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \prod_{j=1}^k \zeta\left(\frac{1}{2} + \alpha_j + it\right) \prod_{j=1}^k \zeta\left(\frac{1}{2} - \alpha_{k+j} - it\right) dt \\ &= \int_0^T \exp\left(-\frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi} \sum_{j=1}^k \alpha_j + \frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi} \sum_{j=1}^k \alpha_{k+j}\right) \\ & \quad \times \sum_{\sigma \in \Xi} \exp\left(\frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi} \sum_{j=1}^k \alpha_{\sigma(j)} - \frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi} \sum_{j=1}^k \alpha_{\sigma(k+j)}\right) \\ & \quad \times A_k(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(2k)}) \prod_{1 \leq \ell, m \leq k} \zeta(1 - \alpha_{\sigma(k+m)} + \alpha_{\sigma(\ell)}) [1 + O(t^{-1/2+\varepsilon})] dt \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} & A_k(u_1, \dots, u_{2k}) \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{1 \leq i, j \leq k} \left(1 - \frac{1}{p^{1+u_i-u_{j+k}}}\right) \int_0^1 \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{e^{2i\pi\theta}}{p^{1/2+u_j}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{e^{-2i\pi\theta}}{p^{1/2-u_{k+j}}}\right)^{-1} d\theta. \end{aligned}$$

La structure de l'autocorrélation de  $\zeta$  est, de façon évidente, la même que celle de l'autocorrélation des polynômes caractéristiques de  $U(N)$  (voir théorème 3.11), au facteur arithmétique  $A_k$  près.

## 5 Fonctions $L$ et matrices aléatoires

### 5.1 Un rapide survol des fonctions $L$

L'universalité des corrélations sur les sous-groupes de  $U(N)$  a son pendant sur les fonctions  $L$  que nous commençons par brièvement introduire. On renvoie à [62, Lecture I] et [11, Lecture 4] pour plus d'informations. Des exemples plus « concrets » de fonctions  $L$  seront étudiés plus en détails dans les parties suivantes et cette partie peut être omise en première lecture.

On va introduire la fonction  $L$  associée à une représentation irréductible, auto-morphe et cuspidale  $\pi$  de  $GL_m(\mathbb{Q})$ . Pour  $m = 1$ , on obtient la fonction  $\zeta$  et les fonctions  $L$  de Dirichlet associée à des caractères primitifs. Pour  $m = 2$ , on obtient les fonctions  $L$  des formes modulaires paraboliques primitives et des formes de Maass paraboliques primitives. Pour  $m \geq 1$ , ces fonctions  $L$  ont pour forme

$$L(\pi, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} L(\pi_p, s)$$

avec

$$L(\pi_p, s) = \prod_{j=1}^m [1 - \alpha_{\pi,j}(p)p^{-s}]^{-1}.$$

Pour tout  $p$ , le nombre complexe  $\alpha_{\pi,j}(p)$  vérifie,

$$|\alpha_{\pi,j}(p)| < \sqrt{p}.$$

On associe à  $\pi$ , un entier  $Q_\pi > 0$  appelé son conducteur. Lorsque  $p$  ne divise pas  $Q_\pi$ , les complexes  $\alpha_{\pi,j}(p)$  sont non nuls et la conjecture de Ramanujan–Petersson prédit  $|\alpha_{\pi,j}(p)| = 1$ . Cette conjecture est un résultat immédiat lorsque  $m = 1$ . Pour  $m = 2$ , dans le cas particulier des formes modulaires (holomorphes), c'est un résultat de Deligne très difficile. En toute généralité, le meilleur résultat à ce jour est

$$(p, Q_\pi) = 1 \Rightarrow |\alpha_{\pi,j}(p)| \leq p^{1/2-1/(m^2+1)}.$$

De même que pour  $\zeta$ , on sait compléter  $L(\pi, s)$ . On associe à  $\pi$  un ensemble de  $m$  nombres complexes  $(\mu_{\pi,j})_{1 \leq j \leq m}$  et le facteur à l'infini

$$L(\pi_\infty, s) = \prod_{j=1}^m \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \mu_{\pi,j}).$$

**Remarque 5.1.** Souvent, on peut regrouper les facteurs  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  grâce à la relation de Legendre

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z).$$

On a

$$\operatorname{Re} \mu_{\pi,j} > -\frac{1}{2}.$$

La fonction  $L$  complétée de  $\pi$  est

$$\Lambda(\pi, s) = L(\pi_\infty, s)L(\pi, s).$$

Cette fonction admet un prolongement en fonction entière (sauf si c'est  $\zeta$ ), elle est bornée dans les bandes verticales et satisfait à l'équation

$$\Lambda(\pi, s) = \tau_\pi Q_\pi^{-s} \Lambda(\tilde{\pi}, 1-s)$$

où  $\tau_\pi$  est un complexe non nul et  $\tilde{\pi}$  est la contragrédiente de  $\pi$ . Les paramètres de  $\tilde{\pi}$  se déduisent de ceux  $\pi$  par conjugaison complexe,

$$\begin{aligned} \alpha_{\tilde{\pi},j}(p) &= \overline{\alpha_{\pi,j}(p)} \\ \mu_{\tilde{\pi},j} &= \overline{\mu_{\pi,j}} \\ Q_{\tilde{\pi}} &= Q_\pi \\ \tau(\tilde{\pi}) &= Q_\pi/\tau(\pi). \end{aligned}$$

Par définition, un zéro non trivial de  $L(\pi, s)$  est un point d'annulation de  $\Lambda(\pi, s)$ . On note  $1/2 + i\gamma_{\pi,j}$  ces zéros et l'hypothèse de Riemann pour  $L(\pi, s)$  est  $\gamma_{\pi,j} \in \mathbb{R}$ .

On donne maintenant une formule explicite à la Riemann. Dans ce but, on introduit des coefficients apparaissant dans la dérivée logarithmique de  $L(\pi, s)$ . On pose

$$a_{\pi}(p^k) = \sum_{j=1}^m \alpha_{\pi,j}(p)^k.$$

On définit  $\delta_{\zeta}$  comme étant 1 si  $L(\pi, s) = \zeta(s)$  et 0 sinon. On a alors

**Proposition 5.2.** *Soit  $H$  une fonction de localisation. Alors*

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} H(\gamma_{\pi,j}) &= \delta_{\zeta} \left[ H\left(-\frac{i}{2}\right) + H\left(\frac{i}{2}\right) \right] \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) \left\{ \log Q_{\pi} + \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}\left(\frac{1}{2} + \mu_{\pi,j} + it\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}\left(\frac{1}{2} + \overline{\mu_{\pi,j}} - it\right) \right] \right\} dt \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{\Lambda(n)a_{\pi}(n)}{\sqrt{n}} \widehat{H}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right) + \frac{\Lambda(n)\overline{a_{\pi}(n)}}{\sqrt{n}} \widehat{H}\left(-\frac{\log n}{2\pi}\right) \right]. \end{aligned}$$

Une conséquence de ce résultat est que

$$\#\left\{ \gamma \in [0, T] : \Lambda\left(\frac{1}{2} + i\gamma, \pi\right) = 0 \right\} \sim \frac{m}{2\pi} T \log T \quad (T \rightarrow \infty).$$

On note  $N(\pi, T)$  la quantité de gauche. Un ingrédient de la démonstration du théorème de Montgomery était

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)^2}{n} \sim \frac{1}{2} \log^2 x \quad (x \rightarrow \infty).$$

Pour  $L(\pi, s)$ , on a l'équivalence

$$\sum_{n \leq x} \frac{|\Lambda(n)a_{\pi}(n)|^2}{n} \sim \frac{1}{2} \log^2 x \quad (x \rightarrow \infty). \quad (5.1)$$

Cependant, cette équivalence est conditionnelle. Sa démonstration utilise l'hypothèse

$$\mathcal{H} : \text{soit } k \geq 2, \text{ alors } \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log(p)a_{\pi}(p^k)}{p^k} < \infty.$$

Cette hypothèse est démontrée pour  $m \leq 3$ . En toute généralité, elle est conséquence de la conjecture de Ramanujan–Peterson. Rudnick & Sarnak [71] ont démontré le résultat suivant qui étend le théorème 2.2.

**Théorème 5.3.** Soit  $n \geq 2$  un entier. Soit  $\pi$  une représentation unitaire irréductible automorphe cuspidale de  $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ . Si  $m > 3$ , on admet l'hypothèse  $\mathcal{H}$ .

Soit  $h$  la transformée de Fourier inverse d'une fonction  $C^\infty$  à support compact et  $f$  une fonction de Schwartz dont la transformée de Fourier

$$\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e(-\xi \cdot x) dx$$

est à support dans le domaine

$$\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : |\xi_1| + \dots + |\xi_n| \leq 2\}.$$

On suppose que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- la fonction  $f$  est symétrique,
- pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x_1 + t, \dots, x_n + t) = f(x_1, \dots, x_n)$ ,
- la fonction  $f$  tend rapidement vers 0 quand  $|x| \rightarrow \infty$  dans l'hyperplan d'équation  $x_1 + \dots + x_n = 0$ .

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{N(\pi, T)} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n \\ \text{distincts}}} h\left(\frac{\gamma_{\pi, j_1}}{T}\right) \cdots h\left(\frac{\gamma_{\pi, j_n}}{T}\right) f\left(\frac{\log T}{2\pi}(\gamma_{\pi, j_1}, \dots, \gamma_{\pi, j_n})\right) \\ = \left( \int_{\mathbb{R}} h^n \right) \mathrm{COR}(n, f, \mathrm{univ}) \end{aligned}$$

avec  $\mathrm{COR}(n, f, \mathrm{univ})$  définie au théorème 2.2.

Ainsi, les corrélations ne permettent pas de distinguer les fonctions  $L$ . La raison essentielle est l'universalité de la formule (5.1). L'universalité des corrélations est donc conséquence du peu d'information arithmétique prise en considération.

## 5.2 Caractères de Dirichlet

L'objet de cette partie est un bref survol de la théorie des caractères de Dirichlet. Pour les détails, on renvoie à [46, Chapter 3 et §4.6]. Si  $q$  est un entier, un *caractère de Dirichlet modulo  $q$*  est un morphisme du groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$  dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^\times$ . On considère un tel caractère comme une fonction totalement multiplicative de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{C}$  en posant

$$\begin{cases} \chi(n) = \chi(n + q\mathbb{Z}) & \text{si } (n, q) = 1, \\ \chi(n) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le *caractère principal modulo  $q$*  est le caractère  $\chi_0$  défini par  $\chi_0(n) = 1$  si  $(n, q) = 1$  et  $\chi_0(n) = 0$  sinon. Le *conducteur* d'un caractère modulo  $q$  est le plus petit diviseur  $q^*$  de  $q$  tel que  $\chi = \chi_0 \chi^*$  où  $\chi_0$  est le caractère principal modulo  $q$  et  $\chi^*$  est un caractère de module  $q^*$ . Un caractère modulo  $q$  est dit *primitif* si  $q = q^*$ . L'ensemble

des caractères modulo  $q$  a

$$\varphi(q) = q \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|q}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

éléments. Parmi ceux-ci, le nombre de caractères primitifs est

$$\varphi^*(q) = q \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|q \\ p^2 \nmid q}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p^2|q}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2.$$

Soit  $q > 1$  et  $\chi$  un caractère primitif modulo  $q$ . Sa fonction  $L$  est

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi(n)n^{-s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Cette fonction se prolonge en une fonction entière. On pose

$$L(\chi_\infty, s) = L(\overline{\chi}_\infty, s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s + \kappa}{2}\right)$$

avec

$$\kappa = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(-1) = 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction  $L(\chi, s)$  satisfait alors l'équation fonctionnelle

$$L(\chi_\infty, s)L(\chi, s) = \varepsilon(\chi)q^{-s+1/2}L(\overline{\chi}_\infty, 1-s)L(\overline{\chi}, 1-s)$$

où

$$\varepsilon(\chi) = \frac{1}{i^\kappa \sqrt{q}} \sum_{n=0}^{q-1} \chi(n) \exp\left(2i\pi \frac{n}{q}\right)$$

est un nombre complexe de module 1.

De même que pour la fonction  $\zeta$  de Riemann, on conjecture que les points d'annulation de  $L(\chi, s)$  à l'intérieur de la bande critique  $\operatorname{Re} s \in [0, 1]$  sont situés sur l'axe critique  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ . Cette conjecture s'appelle l'hypothèse de Riemann pour  $L(\chi, s)$ . La suite des points d'annulation de  $L(\chi, s)$  est

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}^*} \left\{ \frac{1}{2} + i\gamma_{\chi, j} \right\}$$

avec  $\operatorname{Re} \gamma_{\chi, j} \geq 0$  pour tout  $j > 0$ . On retrouve évidemment le cas de la partie 5.1 restreinte à  $m = 1$ .

### 5.3 Familles de fonctions $L$ de caractères de Dirichlet et matrices aléatoires

Dans cette partie, on admet l'hypothèse de Riemann pour les fonctions  $L$  de caractères de Dirichlet.

Si  $q$  est premier, l'ensemble  $X^*(q)$  des caractères de Dirichlet primitifs modulo  $q$  est l'ensemble de tous les caractères modulo  $q$  sauf le caractère principal. Son cardinal est donc  $q - 2$  et on définit sur  $X^*(q)$  un opérateur de moyenne en posant

$$\mathbb{E}_q(X) = \frac{1}{\#X^*(q)} \sum_{\chi \in X^*(q)} X(\chi)$$

pour toute  $X : X^*(q) \rightarrow \mathbb{R}$ . On l'appelle opérateur de moyenne car

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_q(\mathbf{1}) = 1$$

où  $\mathbf{1}$  est l'application constante égale à 1 sur  $X^*(q)$ . On appelle alors moment centré réduit d'ordre  $m$  le terme

$$R_q^{(m)}(X) = \mathbb{E}_q \left( \left( \frac{X - \mathbb{E}_q(X)}{\sigma_q(X)} \right)^m \right)$$

où  $\sigma_q(X)$  est la variance

$$\sigma_q(X) = \sqrt{\mathbb{E}_q((X - \mathbb{E}_q(X))^2)}.$$

Alors que les moments permettent d'étudier la distribution d'une variable aléatoire, les moments centrés réduits permettent, en normalisant l'espérance à 0 et la variance à 1, de comparer différentes distributions.

Pour  $\chi \in X^*(q)$  et  $\phi$  une fonction de localisation, on introduit

$$D[\phi](\chi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \phi \left[ \frac{\log(q)}{2\pi} \gamma_{\chi, j} \right].$$

Cette fonction compte les « petits zéros » de  $L(\chi, s)$ , *i.e.* ceux qui se trouvent dans un intervalle centré en  $\frac{1}{2}$  et de longueur l'espacement moyen entre zéros. Le théorème ci-dessous, de Hughes & Rudnick [41, Theorem 3.1], implique que les « petits zéros » des fonctions  $L$  de caractères de Dirichlet se comportent comme les « petits angles propres » des matrices unitaires.

**Théorème 5.4.** *Soit  $\phi$  une fonction de localisation telle que  $\text{Supp } \hat{\phi} \in [-2, 2]$ , alors lorsque  $q$  parcourt les nombres premiers,*

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \mathbb{E}_q(D[\phi]) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) D[U](t) dt.$$

On rappelle que  $D[U]$  a été définie au théorème 3.7. Hughes & Rudnick calculent aussi la variance [41, Theorem 4.1].



**Théorème 5.5.** Soit  $\phi$  une fonction de localisation telle que  $\text{Supp } \hat{\phi} \in [-1, 1]$ , alors lorsque  $q$  parcourt les nombres premiers,

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \sigma_q(D[\phi]) = \sqrt{\int_{-1}^1 |u| \hat{\phi}(u)^2 du}.$$

Hughes & Rudnick [41, Theorem 5.1] vont au delà du calcul de la moyenne et de la variance en calculant les premiers moments centrés réduits.

**Théorème 5.6.** Soit  $\alpha > 0$  et  $\phi$  une fonction de localisation telle que  $\text{Supp } \hat{\phi} \in [-\alpha, \alpha]$ . Soit  $m < 2/\alpha$  un entier. Lorsque  $q$  parcourt les nombres premiers,

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} R_q^{(m)}(D[\phi]) = \begin{cases} \frac{m!}{2^{m/2}(m/2)!} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les premiers moments de la variable aléatoire limite centrée réduite de  $D[\phi]$  sont donc ceux d'une variable aléatoire normale d'espérance 0 et variance 1. On trouve le même phénomène que pour les matrices de  $U(N)$  (voir théorème 3.8).

Si, pour  $\phi$ , on prend la fonction indicatrice de l'intervalle  $[-1, 1]$ , la variable aléatoire  $D[\phi]$  compte le nombre de zéros des fonctions  $L$  de caractères de Dirichlet dans  $[-\log(q)/(2\pi), \log(q)/(2\pi)]$ . La variable aléatoire limite lorsque  $q \rightarrow +\infty$  est donc discrète, contrairement à la loi normale. Il est donc impossible que le théorème 5.6 s'étende à tous les moments et toutes les fonctions de localisation simultanément. On retrouve le même comportement « faussement normal » que pour les matrices aléatoires.

En corollaire du théorème 5.4, Hughes & Rudnick [41, Theorem 8.3] prouvent qu'il existe une proportion non nulle de caractères primitifs ayant un premier zéro plus petit que ce à quoi on peut s'attendre (*i.e.* l'espacement moyen  $2\pi/\log(q)$ ).

**Corollaire 5.7.** Admettons l'hypothèse Riemann pour les fonctions  $L$  de caractères primitifs. Soit  $\beta \geq 0$ , 633. Lorsque  $q$  parcourt les nombres premiers,

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q-2} \#\left\{ \chi \neq \chi_0 : \gamma_{\chi,1} < \beta \frac{2\pi}{\log q} \right\} \geq P(\beta)$$

avec

$$P(\beta) = \frac{11\pi^2 - 3 - 72\beta^2 - 88\pi^2\beta^2 - 48\beta^4 + 176\pi^2\beta^4}{12\pi^2(4\beta^2 - 1)^2} > 0.$$

### 5.4 Formes modulaires

L'objet de cette partie est un bref survol de la théorie des formes modulaires<sup>6</sup>. Pour les détails, on renvoie à [63] et [60]. Soit  $N \in \mathbb{N}$ , on note

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}); c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

Ce groupe agit sur le demi-plan de Poincaré

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$$

par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Soit  $k \geq 0$  fixé dans toute la suite,  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  agit sur les fonctions holomorphes sur  $\mathcal{H}$  par l'action

$$f|_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(z) = (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right).$$

Une fonction vérifie la *condition modulaire* de poids  $k$  sur  $\Gamma_0(N)$  si

$$f|_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = f \quad \text{pour tout } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N). \quad (5.2)$$

**Remarques 5.8.** (1) Soit  $M|N$  et  $f$  vérifiant la condition modulaire de poids  $k$  sur  $\Gamma_0(M)$ . Alors, elle vérifie la condition modulaire de poids  $k$  sur  $\Gamma_0(N)$ .

(2) La matrice  $-I$  est dans  $\Gamma_0(N)$ . Si  $f$  vérifie l'équation (5.2) on a donc, pour tout  $z$  dans le demi-plan de Poincaré

$$f|_{-I}(z) = f(z)$$

c'est-à-dire

$$(-1)^k f(z) = f(z).$$

Si  $k$  est impair, on a donc  $f = 0$  et c'est la raison pour laquelle on se restreint à  $k$  pair.

(3) Si on s'autorise d'autres groupes que  $\Gamma_0(N)$  et si on en choisit un ne contenant pas  $-I$ , il n'est pas nécessaire de choisir  $k$  pair.

Soit  $f$  vérifiant la condition modulaire de poids  $k$  sur  $\Gamma_0(N)$ . Si  $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ , la fonction  $f|_M$  est périodique de période

$$u_M = \inf \left\{ u \in \mathbb{N}^* : \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M^{-1} \Gamma_0(N) M \right\}.$$

<sup>6</sup>Pour nous, de telles formes sont nécessairement holomorphes

On a donc un développement en série de Fourier

$$f|_M(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_M(n) \exp\left(\frac{2i\pi n}{u_M} z\right). \quad (5.3)$$

**Remarques 5.9.** (1) La condition modulaire de poids  $k$  implique que  $f_M$  ne dépend que de la classe de  $M$  modulo  $\Gamma_0(N)$ . Il n'y a donc qu'un nombre fini de développements de Fourier distincts construits à partir de  $f$  comme dans l'équation (5.3).

(2) Pour  $M \in \Gamma_0(N)$ , on notera  $\hat{f}$  au lieu de  $\hat{f}_M$ . On a  $u_M = 1$ . Le développement obtenu est appelé *développement de  $f$  à l'infini*.

On dit que  $f$  est *nulle aux pointes* si

$$\hat{f}_M(n) = 0 \quad \text{pour tout } n \leq 0, \quad M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Une *forme modulaire parabolique de poids  $k$  et de niveau  $N$*  est une fonction

- (1) holomorphe sur  $\mathcal{H}$ ,
- (2) qui vérifie la condition modulaire de poids  $k$  sur  $\Gamma_0(N)$ ,
- (3) qui est nulle aux pointes.

L'ensemble des formes modulaires paraboliques de poids  $k$  et de niveau  $N$  est un espace vectoriel complexe, noté  $S_k(N)$  et on peut vérifier qu'il est de dimension finie.

On a l'approximation : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $N$ ,

$$\left| \dim S_k(N) - \frac{k-1}{12} N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \right| \leq cN^{1/2+\varepsilon}.$$

On muni  $S_k(N)$  d'une structure d'espace hermitien grâce au produit

$$(f, g) = \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2}.$$

On cherche alors à construire une base orthogonale « naturelle ».

On sait construire des applications linéaires, dites *opérateurs de Hecke*  $T_n$  pour tout entier  $n$ . On définit

$$T_n : S_k(N) \longrightarrow S_k(N)$$

$$\sum_m \hat{f}(m) \exp(2i\pi m z) \longmapsto \sum_m \left[ \sum_{\substack{d|(m,n) \\ (d,N)=1}} d^{k-1} \hat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right] \exp(2i\pi m z).$$

Ces opérateurs vérifient la relation

$$T_m \circ T_n = \sum_{\substack{d|(m,n) \\ (d,N)=1}} d^{k-1} T_{\frac{mn}{d^2}}$$

de sorte qu'ils *commutent*. D'autre part, ils sont presque tous *autoadjoints* :

$$\text{si } (n, N) = 1 \text{ alors } (T_n f, g) = (f, T_n g).$$

Soit  $f$  un vecteur propre de  $T_n$  (on dit une *forme propre*). On a

$$T_n f = t_f(n) f.$$

En comparant les développements de Fourier des deux membres de l'équation précédente, on obtient pour tout  $m$  l'égalité

$$\sum_{\substack{d|(m,n) \\ (d,N)=1}} d^{k-1} \hat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right) = t_f(n) \hat{f}(m)$$

puis en choisissant  $m = 1$  on en déduit

$$\hat{f}(n) = t_f(n) \hat{f}(1).$$

Se posent alors deux questions :

- (1) Sait-on si  $\hat{f}(1) \neq 0$  ?
- (2) Peut-on construire des formes propres de tous les opérateurs de Hecke ?

On va faire appel au résultat classique suivant.

**Proposition 5.10.** *Soit  $\mathcal{E}$  un espace hermitien sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{F}$  une famille d'opérateurs normaux commutant deux à deux. Alors il existe une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{E}$  formée de vecteurs propres de tous les opérateurs de  $\mathcal{F}$ .*

**Corollaire 5.11.** *Il existe une base orthogonale de l'espace  $S_k(N)$  formée de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke  $T_n$  tels que  $(n, N) = 1$ .*

Malheureusement, cela ne répond de façon satisfaisante ni à la première, ni à la seconde question. On peut trouver des formes  $f$ , vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke  $T_n$ ,  $(n, N) = 1$  telles que  $\hat{f}(1) = 0$  : soit  $L$  et  $M$  entiers tels que  $L \neq 1$  et  $LM = N$ . Soit  $f \in S_k(M)$  et

$$f_L : z \mapsto f(Lz) = \sum_n \hat{f}(n) e^{2i\pi Lnz} = \sum_{n \equiv 0 \pmod{L}} \hat{f}\left(\frac{n}{L}\right) e^{2i\pi nz}.$$

On vérifie

$$\begin{cases} f_L \in S_k(N), \\ T_n f = t_f(n) f \Rightarrow T_n f_L = t_f(n) f_L, \\ \hat{f}_L(1) = 0. \end{cases}$$

On définit alors l'espace des *formes anciennes* par

$$S_k^a(N) = \text{Vect}\{f_L : f \in S_k(M), L \neq 1, LM|N, M \neq N\}.$$

On vérifie que cet espace est stable par les opérateurs de Hecke. On pose

$$S_k^n(N) = S_k^a(N)^\perp$$

et cet espace est appelé espace des *formes nouvelles*. On va voir qu'on peut répondre aux deux questions précédentes en se restreignant aux formes nouvelles.

**Théorème 5.12** (Théorème d'Atkin & Lehner). Soit  $f \in S_k(N)$ . On suppose que

$$(n, N) = 1 \implies \hat{f}(n) = 0.$$

Alors,  $f \in S_k^a(N)$ .

On en déduit du théorème d'Atkin & Lehner le théorème de multiplicité un.

**Théorème 5.13** (Théorème de multiplicité un). Soit  $f \in S_k^n(N)$  avec  $T_n f = t(n)f$  pour tous  $(n, N) = 1$ . Si  $g \in S_k^n(N)$  et  $T_n g = t(n)g$  pour tous  $(n, N) = 1$  alors  $g \in \mathbb{C}f$ .

On peut maintenant considérer une base orthogonale  $(f_1, \dots, f_d)$  de  $S_k^n(N)$  formée de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke  $T_n$  tels que  $(n, N) = 1$  avec  $\hat{f}_i(1) \neq 0$ . On peut alors diviser chaque forme  $f_i$  par  $\hat{f}_i(1)$  pour obtenir une base appelée *base de formes primitives* de  $S_k(N)$ . On note  $H_k^*(N)$  cette base dont on peut montrer qu'elle est unique.

**Proposition 5.14.** Soit  $f \in H_k^*(N)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $t_f(n)$  tel que

$$T_n f = t_f(n)f.$$

On a donc pour  $f \in H_k^*(N)$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} t_f(n) e^{2i\pi n z}.$$

On déduit ensuite de la relation de multiplicativité des opérateurs de Hecke une relation de multiplicativité pour les coefficients de Fourier des formes primitives :

$$\hat{f}(m)\hat{f}(n) = \sum_{\substack{d|(m,n) \\ (d,N)=1}} d^{k-1} \hat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

L'existence de la base des formes primitives permet de développer une notion efficace de fonction  $L$  en posant

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} t_f(n) n^{-(k-1)/2} n^{-s}.$$

Un résultat de Deligne très difficile implique la majoration

$$|t_f(n)| \leq \#\{d \in \mathbb{N} : d|n\} n^{(k-1)/2}$$

de sorte que  $L(f, s)$  converge pour  $\operatorname{Re} s > 1$ . On peut montrer qu'elle se prolonge en fonction entière. Ce prolongement, dû à Hecke, est une conséquence immédiate de la transformation de Mellin et de la modsularité. Ces fonctions admettent un développement en produit eulérien. On pose

$$\lambda_f(n) = t_f(n) n^{-(k-1)/2}.$$

À tout nombre premier  $p$  on associe le facteur  $L(f_p, s)$  défini par

$$L(f_p, s) = \begin{cases} (1 - \lambda_f(p)p^{-s} + p^{-2s})^{-1} & \text{si } (p, N) = 1, \\ (1 - \lambda_f(p)p^{-s})^{-1} & \text{si } p | N. \end{cases}$$

On a

$$L(f, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} L(f_p, s).$$

Posant

$$L(f_\infty, s) = 2(2\pi)^{-(k-1)/2} (2\pi)^{-s} \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right)$$

on obtient l'équation fonctionnelle

$$L(f_\infty, s)L(f, s) = i^k \varepsilon_f(N) N^{-s+1/2} L(f_\infty, 1-s)L(f, 1-s) \quad (5.4)$$

où  $\varepsilon_f(N)$  est un réel de norme 1. En particulier, si  $i^k \varepsilon_f(N) = -1$ , on a  $L(f, \frac{1}{2}) = 0$ . On définit donc les deux ensembles

$$\mathbf{H}_k^+(N) = \{f \in \mathbf{H}_k^*(N) : i^k \varepsilon_f(N) = 1\}$$

et

$$\mathbf{H}_k^-(N) = \{f \in \mathbf{H}_k^*(N) : i^k \varepsilon_f(N) = -1\}.$$

De même que pour la fonction  $\zeta$  de Riemann, on conjecture que les points d'annulation de  $L(f, s)$  à l'intérieur de la bande critique  $\operatorname{Re} s \in [0, 1]$  sont situés sur l'axe critique  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ . Cette conjecture s'appelle l'hypothèse de Riemann pour  $L(f, s)$ . Si  $f \in \mathbf{H}_k^-(N)$ , la suite des points d'annulation de  $L(f, s)$  est

$$\left\{\frac{1}{2}\right\} \bigcup_{j>0} \left\{\frac{1}{2} + i\gamma_{f,j}, \frac{1}{2} - i\overline{\gamma_{f,j}}\right\}$$

avec  $\operatorname{Re} \gamma_{f,j} \geq 0$  pour tout  $j > 0$ . Si  $f \in \mathbf{H}_k^+(N)$ , la suite des points d'annulation de  $L(f, s)$  est

$$\bigcup_{j>0} \left\{\frac{1}{2} + i\gamma_{f,j}, \frac{1}{2} - i\overline{\gamma_{f,j}}\right\}$$

avec  $\operatorname{Re} \gamma_{f,j} \geq 0$  pour tout  $j > 0$ . Dans les deux cas, il s'agit de multiensembles : les zéros sont répétés avec multiplicité.

On donne maintenant une généralisation des fonctions  $L$  de formes primitives, suivant la présentation de Cogdell & Michel [12]. Pour simplifier l'exposition, on se contente d'exposer la situation en poids 2. On note  $\operatorname{St}$  la représentation standard de  $\operatorname{SU}(2)$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{St}: \operatorname{SU}(2) &\longrightarrow \operatorname{GL}(\mathbb{C}^2) \\ M &\longmapsto \begin{cases} \mathbb{C}^2 & \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ x & \mapsto Mx. \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $\rho$  est une représentation de dimension finie de  $SU(2)$ , on pose

$$D(X, \rho, g) = \det[I - X\rho(g)]^{-1}$$

pour chaque  $g \in SU(2)$ . Soit  $f \in H_2^*(N)$ , avec  $N$  sans facteur carré. La majoration de Deligne implique que, pour chaque premier  $p$  ne divisant pas le niveau, il existe  $\theta_{f,p} \in [0, \pi]$  tel que

$$\lambda_f(p) = \chi_{\text{St}}[g(\theta_{f,p})]$$

où  $\chi_{\text{St}}$  est le caractère de la représentation standard et

$$g(\theta) := \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

(autrement dit,  $\lambda_f(p) = 2 \cos \theta_{f,p}$ ). Pour tout entier  $m \geq 0$ , la fonction  $L$  de puissance symétrique  $m^e$  de  $f$  est

$$L(\text{Sym}^m f, s) := \prod_{p \in \mathcal{P}} L_p(\text{Sym}^m f, s) \quad (5.5)$$

avec

$$L_p(\text{Sym}^m f, s) := D[p^{-s}, \text{Sym}^m, g(\theta_{f,p})]$$

si  $p$  est premier à  $N$  et

$$L_p(\text{Sym}^m f, s) := [1 - \lambda_f(p^m)p^{-s}]^{-1}$$

sinon. On a noté  $\text{Sym}^m$  la composée de la représentation puissance symétrique  $m^e$  de  $GL(2)$  avec la représentation standard  $SU(2)$ . Ainsi,

$$\text{Sym}^m(g(\theta_{f,p})) = \text{Diag} \left( e^{i(m-2\ell)\theta} \right)_{0 \leq \ell \leq m}.$$

Si  $m = 1$ , on a  $L(\text{Sym}^1 f, s) = L(f, s)$ . Il existe sur les fonctions  $L$  de puissances symétriques  $m^e$  une conjecture concernant l'équation fonctionnelle qu'on énonce maintenant (toujours dans le cas où  $f$  est de poids 2, voir [12, Hypothesis  $\text{Sym}^k(f)$ ]).

**Conjecture 5.** Soit  $N$  un entier sans facteur carré et  $f \in H_2^*(N)$ . Il existe une représentation unitaire irréductible automorphe cuspidale de  $GL_m(\mathbb{Q})$  dont les facteurs locaux sont les mêmes que ceux de  $L(\text{Sym}^m f, s)$ . Posons

$$L_\infty(\text{Sym}^m f, s) := \begin{cases} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) 2^u \prod_{j=1}^u (2\pi)^{-s-j} \Gamma(s+j) & \text{si } m = 2u \text{ avec } u \text{ pair,} \\ \pi^{-(s+1)/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) 2^u \prod_{j=1}^u (2\pi)^{-s-j} \Gamma(s+j) & \text{si } m = 2u \text{ avec } u \text{ impair,} \\ 2^{u+1} \prod_{j=0}^u (2\pi)^{-s-j-1/2} \Gamma\left(s+j+\frac{1}{2}\right) & \text{si } m = 2u+1. \end{cases}$$

Alors, il existe  $\varepsilon(\text{Sym}^m f) \in \{-1, 1\}$  tel que

$$\begin{aligned} N^{ms/2} L_\infty(\text{Sym}^m f, s) L(\text{Sym}^m f, s) \\ = \varepsilon(\text{Sym}^m f) N^{m(1-s)/2} L_\infty(\text{Sym}^m f, 1-s) L(\text{Sym}^m f, 1-s). \end{aligned}$$

Cette conjecture a été démontrée pour  $m \in \{1, 2, 3, 4\}$  (voir [27], [55], [56], [54]).

**Remarque 5.15.** On montre [12, Proposition 3.6] que sous l'hypothèse que le conjecture précédente est vérifiée, le signe de l'équation fonctionnelle est

$$\varepsilon(\text{Sym}^m f) = \varepsilon_\infty \mu(q) [\sqrt{q} \lambda_f(q)]^{m^2} = \pm 1$$

avec

$$\varepsilon_\infty = \begin{cases} -1 & \text{si } m \equiv 1 \text{ ou } 3 \pmod{8}, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $\mu(q)$  vaut  $-1$  si  $q$  a un nombre impair de diviseurs premiers et  $1$  sinon.

## 5.5 Familles de fonctions $L$ de formes modulaires et matrices aléatoires

**5.5.1 Petits zéros.** Le théorème suivant, dû à Iwaniec, Luo & Sarnak [47] compte les « petits zéros » des fonctions  $L$  de formes modulaires, c'est-à-dire ceux compris dans un intervalle autour de  $\frac{1}{2}$  de longueur l'espacement moyen entre zéros. Dans le cas où  $f \in \mathbf{H}_k^-(N)$ , on ne compte pas le zéro évident  $\frac{1}{2}$  (précisément, si  $\frac{1}{2}$  annule  $L(f, s)$  à l'ordre  $n$ , on compte  $\frac{1}{2}$  seulement  $n - 1$  fois). Ce théorème implique que les « petits zéros » des fonctions  $L$  de formes de  $\mathbf{H}_k^-(N)$  se comportent asymptotiquement (en  $N$ ) comme les petits angles propres des matrices de  $\text{SO}(2N + 1)$  (pour lesquelles  $0$  est angle propre évident) et que les « petits zéros » des fonctions  $L$  de formes de  $\mathbf{H}_k^+(N)$  se comportent asymptotiquement (en  $N$ ) comme les petits angles propres des matrices de  $\text{SO}(2N)$  (comparer avec le théorème 3.7).

**Théorème 5.16.** *En admettant « suffisamment » d'hypothèses de Riemann. Soit  $\phi$  une fonction de localisation telle que  $\text{Supp } \hat{\phi} \subset ]-2, 2[$ . Lorsque  $N$  parcourt la suite des entiers sans facteurs carrés, on a*

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^-(N)} \sum_{f \in \mathbf{H}_k^-(N)} \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \phi \left[ \frac{\log(k^2 N)}{2\pi} \gamma_{f,j} \right] &= \int_{\mathbb{R}} \phi(t) D[\text{SO}^-](t) dt, \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \sum_{f \in \mathbf{H}_k^+(N)} \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \phi \left[ \frac{\log(k^2 N)}{2\pi} \gamma_{f,j} \right] &= \int_{\mathbb{R}} \phi(t) D[\text{SO}^+](t) dt. \end{aligned}$$

**Remarque 5.17.** Le théorème 5.16 utilise les hypothèses de Riemann pour :

- (1) les fonctions  $L$  de caractères de Dirichlet ;



- (2) les fonctions  $L$  de formes primitives ;  
 (3) les fonctions  $L$  des carrés symétriques des formes primitives.

La troisième est essentiellement esthétique : elle permet d'énoncer les résultats avec la moyenne habituelle

$$\text{Moy}(X) = \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^*(N)} \sum_{f \in \mathbf{H}_k^*(N)} X(f)$$

plutôt qu'avec la moyenne harmonique

$$\text{Moy}^h(X) = \sum_{f \in \mathbf{H}_k^*(N)} \frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}(f, f)} X(f)$$

qui apparaît plus naturellement dans cette théorie. La deuxième hypothèse est technique, pour s'en passer, il suffirait de considérer des fonctions  $\phi$  sur  $\mathbb{C}$  plutôt que sur  $\mathbb{R}$ . En revanche, la première hypothèse est fondamentale : sans elle, on ne pourrait utiliser que des fonctions  $\phi$  telles que  $\text{Supp } \hat{\phi} \subset ]-1, 1[$ . Or, pour distinguer les deux répartitions, il faut dépasser  $] - 1, 1[$  puisque

$$\int_{\mathbb{R}} \phi D[\text{SO}^-] = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi} \widehat{D[\text{SO}^-]} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \phi D[\text{SO}^+] = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi} \widehat{D[\text{SO}^+]}$$

et

$$\widehat{D[\text{SO}^-]}|_{]-1, 1[} = \widehat{D[\text{SO}^+]}|_{]-1, 1[}.$$

On donne une conséquence de ce théorème, due à Iwaniec, Luo & Sarnak. On conjecture que l'ordre de l'annulation de  $L(f, 1/2)$  (ou au moins sa parité) est gouverné par le signe de l'équation fonctionnelle de  $L(f, s)$ . Autrement dit, on conjecture qu'asymptotiquement, l'ordre d'annulation de  $L(f, s)$  en  $1/2$  est 0 si  $f \in \mathbf{H}_k^+(N)$  et 1 si  $f \in \mathbf{H}_k^-(N)$ . Iwaniec, Luo & Sarnak déduisent du théorème 5.16 les deux inégalités suivantes :

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \#\left\{f \in \mathbf{H}_k^+(N) : L\left(\frac{1}{2}, f\right) = 0\right\} < 0,4323 \quad (5.6)$$

et

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^-(N)} \#\left\{f \in \mathbf{H}_k^-(N) : L'\left(\frac{1}{2}, f\right) = 0\right\} < 0,0573. \quad (5.7)$$

On donne leur preuve pour  $\mathbf{H}_k^+(N)$  en notant

$$D[\phi](f) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \phi\left[\frac{\log(k^2 N)}{2\pi} \gamma_{f,j}\right].$$

Pour  $m \geq 0$ , on considère

$$P_m^+(N) = \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \#\left\{f \in \mathbf{H}_k^+(N) : \operatorname{ord}_{s=1/2} L(s, f) = m\right\}.$$

Grâce à l'équation fonctionnelle,  $P_m^+(N)$  est nul si  $m$  est impair. Ainsi,

$$\sum_{m \in 2\mathbb{N}} P_m^+(N) = 1. \quad (5.8)$$

D'autre part, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_\varepsilon$  tel que si  $N \geq N_\varepsilon$ , alors

$$\frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \sum_{f \in \mathbf{H}_k^+(N)} D[\phi](f) < \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) D[\mathbf{SO}^+](x) dx + \varepsilon. \quad (5.9)$$

Si  $f \in \mathbf{H}_k^+(N)$  et si  $L(f, s)$  s'annule à l'ordre  $m$  en  $1/2$ , en séparant  $1/2$  compté  $m$  fois, on a

$$D[\phi](f) = m\phi(0) + \sum_{\gamma_f \neq 0} \phi\left[\frac{\log(k^2 N)}{2\pi} \gamma_f\right].$$

Le choix de  $\phi$  positive telle que  $\phi(0) = 1$  conduit à

$$D[\phi](f) \geq m.$$

Mais,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \sum_{f \in \mathbf{H}_k^+(N)} D[\phi](f) &= \sum_{m \in 2\mathbb{N}} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \sum_{\substack{f \in \mathbf{H}_k^+(N) \\ \operatorname{ord}_{s=1/2} L(f, s) = m}} D[\phi](f) \\ &\geq \sum_{m \in 2\mathbb{N}} m P_m^+(N). \end{aligned} \quad (5.10)$$

De (5.9) et (5.10), on déduit

$$\sum_{m \in 2\mathbb{N}} m P_m^+(N) < \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) D[\mathbf{SO}^+](x) dx + \varepsilon. \quad (5.11)$$

En retirant (5.8) de (5.11), on obtient

$$2 \sum_{m \in 2\mathbb{N}} P_m^+ - \sum_{m \in 2\mathbb{N}} m P_m^+ > 2 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) D[\mathbf{SO}^+](x) dx - \varepsilon.$$

Mais,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{m \in 2\mathbb{N}} P_m^+ - \sum_{m \in 2\mathbb{N}} m P_m^+ &= 2P_0^+(N) + 2 \sum_{m > 0} (1 - m) P_{2m}^+(N) \\ &\leq 2P_0^+(N) \end{aligned}$$

de sorte que

$$P_0^+(N) > 1 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) D[\text{SO}^+](x) dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En minimisant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) D[\text{SO}^+](x) dx$$

sur les fonctions  $\phi$  positives, paires vérifiant  $\phi(0) = 1$  et  $\text{Supp } \hat{\phi} \subset ]-2, 2[$ , on obtient

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \#\left\{f \in \mathbf{H}_k^+(N) : L\left(\frac{1}{2}, f\right) \neq 0\right\} \geq \alpha^+$$

avec

$$\alpha^+ = \frac{13 - \cotan(1/4)}{16} = 1 - 0.43226\dots$$

Les meilleurs résultats inconditionnels sont obtenus par Iwaniec & Sarnak pour (5.6) [48]. Ils obtiennent  $1/2 + \varepsilon$  comme majorant. Pour (5.7), les meilleurs résultats inconditionnels sont essentiellement obtenus par Kowalski & Michel [58]. Ils obtiennent  $1/8 + \varepsilon$  [46, Theorem 26.2].

**5.5.2 Quantième zéro.** Le théorème d'Iwaniec, Luo & Sarnak, compte-tenu de la modélisation des fonctions  $L$  par les polynômes caractéristiques permet de conjecturer le comportement du quantième zéro des fonctions de formes modulaires. Avec les notations du théorème 3.6, on peut faire la conjecture suivante.

**Conjecture 6.** Soit  $j \geq 1$ , un entier et  $k \geq 2$  un entier pair. Soit  $h$  une fonction continue à support compact. Lorsque  $N$  parcourt les entiers sans facteur carré,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \sum_{f \in \mathbf{H}_k^+(N)} h\left(\frac{\log(k^2 N)}{2\pi} \gamma_{f,j}\right) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \nu_{k,+}(x) dx$$

et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^-(N)} \sum_{f \in \mathbf{H}_k^-(N)} h\left(\frac{\log(k^2 N)}{2\pi} \gamma_{f,j}\right) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \nu_{k,-}(x) dx.$$

On rappelle que les fonctions  $\nu_{k,\pm}$  ont été définies au théorème 3.6.

Katz remarque [50, Introduction] que cette conjecture permet de montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \#\left\{f \in \mathbf{H}_k^+(N) : L\left(\frac{1}{2}, f\right) = 0\right\} = 0 \quad (5.12)$$

et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^-(N)} \#\left\{f \in \mathbf{H}_k^-(N) : L'\left(\frac{1}{2}, f\right) = 0\right\} = 0 \quad (5.13)$$

(voir page 213). On montre (5.12), l'équation (5.13) se montrant de façon semblable. Pour tout  $t \in ]0, 1[$ , on construit une fonction  $h_t : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  dont le support est inclus dans  $[-t, t]$  et telle que  $h_t(0) = 1$ . Puisque  $h_t$  est supérieure à la fonction de Dirac en 0, on a

$$\frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \sum_{f \in \mathbf{H}_k^+(N)} h_t \left[ \frac{\log(k^2 N)}{2\pi} \gamma_{f,1} \right] \geq \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \#\left\{ f \in \mathbf{H}_k^+(N) : L\left(\frac{1}{2}, f\right) = 0 \right\}.$$

Lorsque  $N$  puis  $t$  tendent vers  $+\infty$ , on obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \#\left\{ f \in \mathbf{H}_k^+(N) : L\left(\frac{1}{2}, f\right) = 0 \right\} = 0.$$

L'intérêt des équations (5.12) et (5.13) dépasse le cadre de la théorie analytique des nombres grâce à la conjecture de Birch & Swinnerton-Dyer [80]. Soit  $E$  une courbe elliptique sur  $\mathbb{Q}$  : c'est une courbe algébrique sur  $\mathbb{Q}$ , de genre 1 et munie d'un point  $O$ . On sait munir une telle courbe d'une loi de groupe ayant  $O$  pour élément neutre [57]. D'après un théorème de Mordell, le groupe  $E(\mathbb{Q})$  des points de  $E$  à coordonnées rationnelles est de type fini. Il est donc isomorphe au produit de son sous-groupe de torsion (qui est bien connu grâce à un théorème de Mazur) et de  $r$  copies de  $\mathbb{Z}$ . L'entier  $r$  s'appelle le *rang* de  $E$ . Grâce aux travaux de Breuil, Conrad, Diamond & Taylor, de Taylor & Wiles et de Wiles, on sait associer (de façon assez explicite) à  $E$  une forme modulaire  $f$  de poids 2. La conjecture de Birch & Swinnerton-Dyer (dans sa version faible) prévoit l'égalité de  $r$  avec l'ordre d'annulation de  $L(f, s)$  en  $1/2$ .

**5.5.3 Moments des valeurs centrales.** Le théorème 5.16, compte-tenu de la modélisation des fonctions  $L$  par les polynômes caractéristiques permet de conjecturer les moments des valeurs centrales de  $L(f, s)$ . On peut faire la conjecture suivante.

**Conjecture 7.** Soit  $k \geq 2$  un entier pair et  $\ell > 0$  un entier. Alors,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^+(N)} \sum_{f \in \mathbf{H}_k^+(N)} L\left(f, \frac{1}{2}\right)^\ell = a_{+, \ell} g_{\text{SO}^+}(\ell) \left[ \frac{\log(k^2 N)}{2\pi} \right]^{\ell(\ell-1)/2}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_k^-(N)} \sum_{f \in \mathbf{H}_k^-(N)} L'\left(f, \frac{1}{2}\right)^\ell = a_{-, \ell} g_{\text{SO}^-}(\ell) \left[ \frac{\log(k^2 N)}{2\pi} \right]^{\ell(\ell+1)/2}.$$

La fonction  $g_{\text{SO}^+}$  a été définie au théorème 3.9 et on a

$$g_{\text{SO}^-}(\ell) = \frac{1}{2} g_{\text{SO}^+}(\ell + 1).$$

Une formulation générale de la valeurs des coefficients arithmétiques  $a_{\pm, \ell}$  est assez délicate. On renvoie à [14, Conjecture 4.5.2] pour une expression générale (et une conjecture plus générale).

Fixons  $k$  pair. On déduit de la conjecture des moments, que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C_\varepsilon > 0$  telle que

$$\left| L\left(f, \frac{1}{2}\right) \right| \leq C_\varepsilon N^\varepsilon \quad (5.14)$$

pour tout  $N$  et toute  $f \in H_k^*(N)$ . Cette inégalité est la conjecture de Lindelöf au point central pour les fonctions  $L$  de formes primitives, relativement au niveau. Notons aussi que, la conjecture des moments implique l'existence, pour tout  $n > 0$  de  $c_n > 0$  tel que

$$\max_{f \in H_k^+(N)} L\left(f, \frac{1}{2}\right) \geq c_n [\log(k^2 N)]^n$$

pour tout  $N$ .

Une majoration inconditionnelle de  $L(f, 1/2)$  est atteignable par le théorème de Phragmén-Lindelöf (dans une version due à Rademacher [67, Theorem 2]) grâce à l'équation fonctionnelle (5.4). On obtient alors

$$L\left(f, \frac{1}{2}\right) \ll_\varepsilon N^{1/4+\varepsilon}. \quad (5.15)$$

Obtenir une borne inconditionnelle améliorant l'exposant  $1/4$  de la majoration (5.15) s'appelle *briser la convexité*. C'est un vaste et délicat sujet [62, Lecture 4]. Dans le cadre que nous étudions, le meilleur résultat actuel est dû à Duke, Friedlander & Iwaniec [20, Theorem 3]

$$L\left(f, \frac{1}{2}\right) \ll_\varepsilon N^{1/4-1/192+\varepsilon}.$$

Les conséquences de bris de convexité dépassent le simple record d'amélioration d'exposant. Pour un tour d'horizon des différentes conséquences (par exemple en *Chaos arithmétique*) on renvoie à [62, Lecture 5].

## 6 Détermination du type de symétrie

L'objet de cette partie est d'éclairer, par la théorie des représentations, l'origine des groupes de symétries trouvés précédemment. Cet éclairage est dû à Cogdell & Michel [12].

Soit  $G$  un groupe fini ou compact dont on note  $\text{id}$  la représentation identité (triviale) de dimension 1. Soit  $\rho$  une représentation irréductible de dimension finie de  $G$ . Pour  $|X| < 1$ , on pose

$$D(X, \rho, g) = \det(I - X\rho(g))^{-1}$$

et, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on développe

$$D(X, \rho, g)^z = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \lambda_{\rho}^{z, \alpha}(g) X^\alpha.$$

Si  $dg$  est la mesure de Haar sur  $G$ , on définit

$$D^z(X, \rho) = \int_G D(X, \rho, g)^z dg = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \lambda_\rho^{z,\alpha} X^\alpha$$

où

$$\lambda_\rho^{z,\alpha} = \int_G \lambda_\rho^{z,\alpha}(g) dg.$$

De

$$D(X, \rho, g)^z = \exp \left[ z \log \left( \sum_{\alpha=0}^{+\infty} X^\alpha \operatorname{tr} \operatorname{Sym}^\alpha \rho(g) \right) \right]$$

on déduit

$$\lambda_\rho^{z,0}(g) = 1, \quad \lambda_\rho^{z,1}(g) = z \operatorname{tr} \rho(g)$$

et

$$\lambda_\rho^{z,2}(g) = z \operatorname{tr} \operatorname{Sym}^2 \rho(g) + \frac{z(z-1)}{2} (\operatorname{tr} \rho(g))^2.$$

Ainsi,

$$\lambda_\rho^{z,0} = 1, \quad \lambda_\rho^{z,1} = 0$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_\rho^{z,2} &= z \int_G \operatorname{tr} \operatorname{Sym}^2 \rho(g) dg + \frac{z(z-1)}{2} \int_G (\operatorname{tr} \rho(g))^2 dg \\ &= \frac{z^2}{2} \int_G (\operatorname{tr} \rho(g))^2 dg + \frac{z}{2} \int_G \operatorname{tr} \rho(g^2) dg. \end{aligned}$$

On note  $\operatorname{FrSc}$  l'indicateur de Frobenius-Schur défini par

$$\operatorname{FrSc}(\rho) = \int_G \operatorname{tr} \operatorname{Sym}^2 \rho(g) - \operatorname{tr} \wedge^2 \rho(g) dg.$$

Cet indicateur ne prend que trois valeurs selon le choix nécessaire suivant :

$$\operatorname{FrSc}(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \text{ n'est pas autoduale,} \\ 1 & \text{si id apparaît une fois dans la décomposition,} \\ & \text{en représentations irréductibles de } \operatorname{Sym}^2 \rho, \\ -1 & \text{si id apparaît une fois dans la décomposition,} \\ & \text{en représentations irréductibles de } \wedge^2 \rho. \end{cases}$$

On a

$$\operatorname{FrSc}(\rho) = \int_G \operatorname{tr} \rho(g^2) dg \quad \text{et} \quad \operatorname{FrSc}(\rho)^2 = \int_G [\operatorname{tr} \rho(g)]^2 dg.$$

Cogdell & Michel démontrent [12, équation (2.30)]

$$D^z(X, \rho) = 1 + \lambda_\rho^{z,2} X^2 + O_{|z|}(X^3) \quad (6.1)$$

uniformément pour  $|X| < 1$ .

Pour  $r \in \mathbb{R}^+$ , on considère alors

$$L_X^r\left(\frac{1}{2}, \rho\right) = \prod_{p \leq X} D^r(p^{-1/2}, \rho).$$

Grâce à (6.1), on a

$$\begin{aligned} \log L_X^r\left(\frac{1}{2}, \rho\right) &= \sum_{p \leq X} \frac{\lambda_\rho^{r,2}}{p} + O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right) \\ &= \lambda_\rho^{r,2} \log \log X + c_1 + O\left(\frac{1}{\log X}\right) \end{aligned}$$

pour une constante  $c_1 \in \mathbb{R}^+$ . Ainsi,

$$L_X^r\left(\frac{1}{2}, \rho\right) = e^{c_1 + O(1/\log X)} (\log X)^{\lambda_\rho^{r,2}} \quad (6.2)$$

et la puissance du logarithme ne peut prendre que l'une des trois valeurs

$$0, \quad \frac{r(r-1)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{r(r+1)}{2}.$$

Cogdell & Michel démontrent [12, Théorème 1.5] que

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\mathbf{H}_2^*(q)} \sum_{f \in \mathbf{H}_2^*(q)} L(\text{Sym}^k f, 1)^r &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \int_{\text{SU}(2)} D(p^{-1}, \text{Sym}^k, g)^r dg \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} D^r(p^{-1}, \text{Sym}^k) \end{aligned}$$

pour tout  $r \in \mathbb{R}^+$  (en fait  $r \in \mathbb{C}$ ) dès que les hypothèses naturelles d'automorphie et d'absence de zéro de Siegel sont vérifiées. Il semble dès lors raisonnable d'espérer une équivalence asymptotique (lorsque  $q$  tend vers  $+\infty$ ) entre

$$\frac{1}{\#\mathbf{H}_2^*(q)} \sum_{f \in \mathbf{H}_2^*(q)} L\left(\frac{1}{2}, \text{Sym}^k f\right)^r$$

et

$$\prod_{p \leq c(r)q^k} D^r(p^{-1/2}, \text{Sym}^k) = L_{c(r)q^k}^r\left(\frac{1}{2}, \text{Sym}^k\right)$$

pour une certaine constante (dépendant de  $r$ )  $c(r) > 0$ . Grâce à (6.2), on a

$$L_{c(r)q^k}^r\left(\frac{1}{2}, \text{Sym}^k\right) \sim C(r)(\log q^k)^{Q_k(r)}$$

avec

$$Q_k(r) = \begin{cases} \frac{r(r+1)}{2} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \frac{r(r-1)}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il n'y a donc que deux types de comportements possibles dans ce cas, correspondant aux deux types de symétrie trouvées précédemment.

Pour la famille

$$\bigcup_{q \in \mathcal{P} \setminus \{2\}} \bigcup_{\chi \in \widehat{(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times}} \{L(\chi, s)\}$$

on a  $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$  et la représentation associée est la représentation standard puisque pour tout  $\chi$ , il existe  $a_\chi \in G$  tel que

$$\chi(g^y) = \exp\left(\frac{2i\pi y a_\chi}{\varphi(q)}\right)$$

pour tout  $y$ ,  $g$  étant un générateur de  $G$ . L'indicateur de Frobenius-Schur est alors

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times} \exp\left(\frac{2i\pi}{\varphi(q)} a\right) = 0.$$

Finalement, le fait que l'indicateur de Frobenius-Schur ne prenne que trois valeurs rejoint, et explique, le fait qu'on ne trouve que trois types de comportements pour les moments de valeurs centrales de fonctions  $L$ .

**Remerciements.** L'auteur remercie chaleureusement Emmanuel Kowalski, Louise Nyssen, Guillaume Ricotta et Jie Wu pour leurs commentaires.

## Références

- [1] V. S. Adamchik, Symbolic and numeric computations of the Barnes function, *Comput. Phys. Comm.* 157 (2004), no. 3, 181–190.
- [2] R. C. Baker, G. Harman, and J. Pintz, The difference between consecutive primes. II, *Proc. London Math. Soc.* (3) 83 (2001), no. 3, 532–562.
- [3] E. W. Barnes, The Theory of the  $G$ -function, *Quart. J. Pure Appl. Mathematics* 31 (1899), 264–314.
- [4] E. L. Basor and P. J. Forrester, Formulas for the evaluation of Toeplitz determinants with rational generating functions, *Math. Nachr.* 170 (1994), 5–18.
- [5] E. B. Bogomolny and J. P. Keating, Random matrix theory and the Riemann zeros. I. Three- and four-point correlations, *Nonlinearity* 8 (1995), no. 6, 1115–1131.
- [6] —, Random matrix theory and the Riemann zeros. II.  $n$ -point correlations, *Nonlinearity* 9 (1996), no. 4, 911–935.
- [7] E. Bombieri, Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis, Clay Mathematical Institute, 2000, [http://www.claymath.org/millennium/Riemann\\_Hypothesis/Official\\_Problem\\_Description.pdf](http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/Official_Problem_Description.pdf).
- [8] J.-B. Bost, Le théorème des nombres premiers et la transformation de Fourier, *La fonction zêta*, pp. 1–35, Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2003.
- [9] E. Brézin and S. Hikami, Characteristic polynomials of random matrices, *Comm. Math. Phys.* 214 (2000), no. 1, 111–135.



- [10] A. Y. Cheer and D. A. Goldston, Simple zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Amer. Math. Soc.* 118 (1993), no. 2, 365–372.
- [11] J. W. Cogdell, *L*-functions and Converse Theorems for  $GL(n)$ , *Automorphic Forms and Applications* (Park City, UT, 2002), IAS/Park City Math. Ser. 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, à paraître.
- [12] J. Cogdell and P. Michel, On the complex moments of symmetric power *L*-functions at  $s = 1$ , *Internat. Math. Res. Notices* 2004 (2004), no. 31, 1561–1617.
- [13] J. B. Conrey, More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line, *J. Reine Angew. Math.* 399 (1989), 1–26.
- [14] J. B. Conrey, D. W. Farmer, J. P. Keating, M. O. Rubinstein, and N. C. Snaith, Integral moments of *L*-functions, Technical Report 2002-6, American Institute of Mathematics, [arXiv:math.NT/0206018](https://arxiv.org/abs/math.NT/0206018).
- [15] —, Autocorrelation of random matrix polynomials, *Comm. Math. Phys.* 237 (2003), no. 3, 365–395.
- [16] J. B. Conrey and A. Ghosh, A conjecture for the sixth power moment of the Riemann zeta-function, *Internat. Math. Res. Notices* 1998 (1998), no. 15, 775–780.
- [17] J. B. Conrey, A. Ghosh, and S. M. Gonek, Simple zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. London Math. Soc.* (3) 76 (1998), no. 3, 497–522.
- [18] J. B. Conrey and S. M. Gonek, High moments of the Riemann zeta-function, *Duke Math. J.* 107 (2001), no. 3, 577–604.
- [19] J. Dufresnoy and Ch. Pisot, Sur la relation fonctionnelle  $f(x + 1) - f(x) = \varphi(x)$ , *Bull. Soc. Math. Belg.* 15 (1963), 259–270.
- [20] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec, Bounds for automorphic *L*-functions. II, *Invent. Math.* 115 (1994), no. 2, 219–239.
- [21] —, Erratum: “Bounds for automorphic *L*-functions. II” [*Invent. Math.* **115** (1994), no. 2, 219–239], *Invent. Math.* 140 (2000), no. 1, 227–242.
- [22] F. J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems. I, *J. Math. Phys.* 3 (1962), 140–156.
- [23] —, Statistical theory of the energy levels of complex systems. II, *J. Math. Phys.* 3 (1962), 157–165.
- [24] —, Statistical theory of the energy levels of complex systems. III, *J. Math. Phys.* 3 (1962), 166–175.
- [25] P. X. Gallagher, Pair correlation of zeros of the zeta function, *J. Reine Angew. Math.* 362 (1985), 72–86.
- [26] M. Gaudin, Sur la loi limite de l’espacement des valeurs propres d’une matrice aléatoire, *Nuclear Phys.* 25 (1961), 447–458.
- [27] S. Gelbart and H. Jacquet, A relation between automorphic representations of  $GL(2)$  and  $GL(3)$ , *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 11 (1978), no. 4, 471–542.
- [28] J. W. L. Glaisher, On the Constant Which Occurs in the Formula for  $1^1 2^2 3^3 \dots n^n$ , *Messenger of Mathematics* 24 (1894), 1–16.
- [29] D. Goldfeld, J. Hoffstein, and D. Lieman, An effective zero-free region, *Ann. of Math.* (2) 140 (1994), no. 1, 177–181.
- [30] D. A. Goldston, On the function  $S(T)$  in the theory of the Riemann zeta-function, *J. Number Theory* 27 (1987), no. 2, 149–177.

- [31] —, Notes on pair correlation of zeros and prime numbers, *Recent perspectives in random matrix theory and number theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 322, Cambridge University Press, Cambridge 2005, pp. 79–110.
- [32] D. A. Goldston and S. M. Gonek, Mean value theorems for long Dirichlet polynomials and tails of Dirichlet series, *Acta Arith.* 84 (1998), no. 2, 155–192.
- [33] D. A. Goldston and H. L. Montgomery, Pair correlation of zeros and primes in short intervals, *Analytic number theory and Diophantine problems* (Stillwater, OK, 1984), Progr. Math. 70, Birkhäuser Verlag, Boston, MA 1987, pp. 183–203.
- [34] Xavier Gourdon, *The  $10^{13}$  first zeros of the Riemann Zeta function and zeros computation at very large height* October 24th 2004, <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf>.
- [35] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, 6th ed., Academic Press Inc., San Diego, CA 2000, translated from the Russian; translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger.
- [36] D. R. Heath-Brown and D. A. Goldston, A note on the differences between consecutive primes, *Math. Ann.* 266 (1984), no. 3, 317–320.
- [37] J. Hoffstein and P. Lockhart, Coefficients of Maass forms and the Siegel zero, *Ann. of Math.* (2) 140 (1994), no. 1, 161–181 (with an appendix by Dorian Goldfeld, Hoffstein and Daniel Lieman).
- [38] J. Hoffstein and D. Ramakrishnan, Siegel zeros and cusp forms, *Internat. Math. Res. Notices* 1995 (1995), no. 6, 279–308.
- [39] G. Hoheisel, Primzahlprobleme in der Analysis, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* 1930 (1930), 580–588.
- [40] C. P. Hughes, Random matrix theory and discrete moments of the Riemann zeta function, *J. Phys. A* 36 (2003), no. 12, 2907–2917 Random matrix theory.
- [41] C. P. Hughes and Z. Rudnick, Linear statistics of low-lying zeros of  $L$ -functions, *Quart. J. Math. Oxford* 54 (2003), no. 3, 309–333.
- [42] —, Mock-Gaussian behaviour for linear statistics of classical compact groups, *J. Phys. A* 36 (2003), no. 12, 2919–2932.
- [43] A. Ivić, *The Riemann zeta-function*, Wiley-Intersci. Publ., John Wiley & Sons Inc., New York 1985.
- [44] —, On some results concerning the Riemann hypothesis, *Analytic number theory* (Kyoto, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge University Press, Cambridge 1997, pp. 139–167.
- [45] —, On some reasons for doubting the Riemann hypothesis, 2003, [arXiv:math.NT/0311162](https://arxiv.org/abs/math.NT/0311162).
- [46] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI 2004.
- [47] H. Iwaniec, W. Luo, and P. Sarnak, Low lying zeros of families of  $L$ -functions, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (2000), no. 91, 55–131 (2001).
- [48] H. Iwaniec and P. Sarnak, The non-vanishing of central values of automorphic  $L$ -functions and Landau-Siegel zeros, *Israel J. Math.* 120 (2000), 155–177.
- [49] D. Joyner, *Distribution theorems of  $L$ -functions*, Pitman Res. Notes Math. Ser. 142, Longman Scientific & Technical, Harlow 1986.

- [50] N. M. Katz, *Twisted L-functions and monodromy*, Ann. of Math. Stud. 150, Princeton University Press, Princeton, NJ 2002.
- [51] N. M. Katz and P. Sarnak, *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1999.
- [52] J. P. Keating and N. C. Snaith, Random matrix theory and  $\zeta(1/2 + it)$ , *Comm. Math. Phys.* 214 (2000), no. 1, 57–89.
- [53] —, Random matrix theory and  $L$ -functions at  $s = 1/2$ , *Comm. Math. Phys.* 214 (2000), no. 1, 91–110.
- [54] H. H. Kim, Functoriality for the exterior square of  $GL_4$  and the symmetric fourth of  $GL_2$ , *J. Amer. Math. Soc.* 16 (2003), no. 1, 139–183 (with appendix 1 by Dinakar Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and Peter Sarnak).
- [55] H. H. Kim and F. Shahidi, Cuspidality of symmetric powers with applications, *Duke Math. J.* 112 (2002), no. 1, 177–197.
- [56] —, Functorial products for  $GL_2 \times GL_3$  and the symmetric cube for  $GL_2$ , *Ann. of Math.* (2) 155 (2002), no. 3, 837–893 (with an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart).
- [57] Anthony W. Knap, *Elliptic curves*, Math. Notes 40, Princeton University Press, Princeton, NJ 1992.
- [58] E. Kowalski and P. Michel, A lower bound for the rank of  $J_0(q)$ , *Acta Arith.* 94 (2000), no. 4, 303–343.
- [59] H.-Q. Liu and J. Wu, Numbers with a large prime factor, *Acta Arith.* 89 (1999), no. 2, 163–187.
- [60] F. Martin and Emmanuel Royer, Formes modulaires et périodes, *Formes modulaires et transcendance (Colloque Jeunes)* (Marseille–Luminy, 2003), Sémin. Congr. 12, Soc. Math. France, Paris 2005, pp. 1–117.
- [61] M. L. Mehta, Power series for level spacing functions of random matrix ensembles, *Z. Phys. B* 86 (1992), no. 2, 285–290.
- [62] P. Michel, Analytic Number Theory and Families of  $L$ -functions, *Automorphic Forms and Applications* (Park City, UT, 2002), IAS/Park City Math. Ser. 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, à paraître.
- [63] T. Miyake, *Modular forms*, Springer-Verlag, Berlin 1989.
- [64] H. L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, *Analytic number theory* (Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973, pp. 181–193.
- [65] —, Distribution of the zeros of the Riemann zeta function, *Proc. Internat. Congr. Mathematicians* (Vancouver, B. C., 1974), vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, Que. 1975, pp. 379–381.
- [66] A. Odlyzko, Zeros number  $10^{22} + 1$  through  $10^{22} + 10^4$  of the Riemann zeta function, [http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/zeta\\_tables/zeros5](http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/zeta_tables/zeros5).
- [67] H. Rademacher, On the Phragmén–Lindelöf theorem and some applications, *Math. Z.* 72 (1959/1960), 192–204.
- [68] K. Ramachandra, A note on numbers with a large prime factor, *J. London Math. Soc.* (2) 1 (1969), 303–306.
- [69] D. Ramakrishnan and S. Wang, On the exceptional zeros of Rankin–Selberg  $L$ -functions, *Compositio Math.* 135 (2003), no. 2, 211–244.

- [70] O. Ramaré and Y. Saouter, Short effective intervals containing primes, *J. Number Theory* 98 (2003), no. 1, 10–33.
- [71] Z. Rudnick and P. Sarnak, Zeros of principal  $L$ -functions and random matrix theory, *Duke Math. J.* 81 (1996), no. 2, 269–322.
- [72] M. Rubinstein, *Evidence for a Spectral Interpretation of the Zeros of  $L$ -Functions*, PhD Thesis, Princeton University, June 1998, <http://www.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/thesis/thesis.html>.
- [73] P. Sarnak, Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis (2004), Clay Mathematical Institute, 2004, [http://www.claymath.org/millennium/Riemann\\_Hypothesis/Sarnak\\_RH.pdf](http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/Sarnak_RH.pdf).
- [74] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 2nd ed., Cours Spécialisés 1, Société Mathématique de France, Paris 1995.
- [75] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd ed., The Clarendon Press Oxford University Press, New York 1986, edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.
- [76] I. Vardi, Determinants of Laplacians and multiple gamma functions, *SIAM J. Math. Anal.* 19 (1988), no. 2, 493–507.
- [77] M.-F. Vignéras, L'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Selberg du groupe modulaire  $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ , *Journées Arithmétiques de Luminy* (Colloq. Internat. CNRS, Centre Univ. Luminy, Luminy 1978), Astérisque 61, Soc. Math. France, Paris 1979, pp. 235–249.
- [78] A. Voros, Spectral functions, special functions and the Selberg zeta function, *Comm. Math. Phys.* 110 (1987), no. 3, 439–465.
- [79] H. Weyl, *The classical groups*, Princeton Landmarks Math., Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [80] A. Wiles, Problems of the Millennium: The Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture, Clay Mathematical Institute, 2000, [http://www.claymath.org/millennium/Birch\\_and\\_Swinnerton-Dyer\\_Conjecture/BSD.pdf](http://www.claymath.org/millennium/Birch_and_Swinnerton-Dyer_Conjecture/BSD.pdf).