Valeurs des fonctions L

au bord

de la bande critique

Marseille, novembre 2004

Emmanuel Royer
Travaux en collaboration avec Laurent Habsieger et Jie Wu.

— Fonctions L des caractères de Dirichlet quadratiques —

Soit $d \in \mathbb{Z}$ un discriminant d'un corps quadratique.
On note χ_d le caractère de Kronecker modulo d.
C'est la fonction sur les entiers strictement multiplicative, nulle sur les nombres premiers divisant d et donnée sur les nombres premiers ne divisant pas d par

$$\chi_d(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2 \text{ et } d \equiv 1 \pmod 8 \\ -1 & \text{si } p = 2 \text{ et } d \equiv -1 \pmod 8 \\ \#\{x \in \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} \colon x^2 = d \pmod p\} - 1 & \text{si } p \neq 2. \end{cases}$$

On définit

$$L(s,\chi_d) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_d(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathscr{P}} \left[1 - \frac{\chi_d(p)}{p^s}\right]^{-1}$$

pour $\Re e\, s > 1$

$\longrightarrow$ pas de zéro pour $\Re e\, s > 1$.

Prolongement en fonction entière.

Équation fonctionnelle reliant $L(s,\chi_d)$ à $L(1-s,\chi_d)$

$\longrightarrow$ pas de zéro « non triviaux » pour $\Re e\, s < 0$.

Bande critique : $0 \le \Re e\, s \le 1$.

HR(d) **Hypothèse de Riemann pour** $L(s,\chi_d)$: les zéros de $L(s,\chi_d)$ de la bande critique sont sur l'axe critique

$$\Re e\, s = \frac{1}{2}.$$

— Théorème de Dirichlet —

Le nombre de classes d'un corps quadratique de discriminant d est

si $d < 0$

$$h(d) = \frac{\omega(d)}{2\pi}\sqrt{-d}L(1, \chi_d)$$

avec

$$\omega(d) = \begin{cases} 2 & \text{si } d < -4 \\ 4 & \text{si } d = -4 \\ 6 & \text{si } d = -3 \end{cases}$$

si $d > 0$

$$h(d) = \delta(d)\frac{\sqrt{d}}{R_d}L(1, \chi_d)$$

avec

$$\delta(d) = \begin{cases} 1 & \text{si le corps a une unité de norme } -1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

et R_d est le régulateur du corps.

— Encadrement conditionnel de Littlewood (1928) —

Si HR(d) est vraie, alors il existe une fonction $d \mapsto \varepsilon(d)$ de limite nulle en $\pm\infty$ telle que, pour tout discriminant d,

$$\left[\frac{1}{2} + \varepsilon(d)\right] \frac{\zeta(2)}{e^\gamma} \frac{1}{\log\log|d|} \leq L(1, \chi_d) \leq [2 + \varepsilon(d)]\, e^\gamma \log\log|d|.$$

L'encadrement de Littlewood et le théorème de Dirichlet impliquent, si HR(d) est vraie l'encadrement

$$\left[\frac{1}{2}+\varepsilon(d)\right]\frac{\zeta(2)}{\pi e^{\gamma}}\frac{\sqrt{-d}}{\log\log|d|} \leq h(d) \leq [2+\varepsilon(d)]\frac{e^{\gamma}}{\pi}\sqrt{-d}\log\log|d|$$

pour $d < -4$.

Corollaire Il n'y a qu'un nombre fini de corps quadratiques imaginaires de nombre de classes donné.

Un résultat conditionnel et effectif est le

Théorème Pour tout discriminant $d < 0$, on a

$$h(d) \geq \frac{1}{1700}\theta(d)\log|d|$$

avec

$$\theta(d) = \prod_{p|d}\left(1 - \frac{4\sqrt{p}}{p-1}\right).$$

Remarque La démonstration de ce théorème fait intervenir la théorie des formes modulaires (Goldfeld 1976, Gross & Zagier 1983, Œsterlé 1985) *via* la construction d'une forme modulaire primitive dont la fonction L s'annule à l'ordre au moins 3 au centre de la bande critique.

Remarque Fixons $\varepsilon > 0$. Un théorème de Siegel (1936) affirme l'existence de $C > 0$, non effectivement calculable telle que, pour tout discriminant d, on a $h(d) > Cd^{1/2-\varepsilon}$.

— Nombre de classes des corps quadratiques réels —

Obtenir une minoration du nombre de classes d'un corps quadratique réel *via* le théorème de Dirichlet exige la connaissance d'une bonne majoration du régulateur. Cela semble hors de portée des techniques actuelles.

On ne sait pas (même en admettant les hypothèses de Riemann pour les fonctions $L(s,\chi_d)$) s'il existe un nombre fini de corps quadratiques réels de nombre de classes égal à 1.

En utilisant la minoration triviale $R_d \gg \log d$ l'encadrement de Littlewood et le théorème de Dirichlet impliquent que, si HR(χ) est vraie, alors

$$h(d) \le \frac{\log\log d}{\log d}\sqrt{d}.$$

En 1977, Montgomery & Weinberger on montré (inconditionellement) l'existence d'une infinité de discriminants $d > 0$ tels que

$$h(d) \gg \frac{\log\log d}{\log d}\sqrt{d}.$$

En 1949, Chowla a montré l'existence d'une infinité de discriminants d tels que

$$L(1,\chi_d) \geq [1+\varepsilon(d)]\, e^{\gamma} \log\log|d|$$
$$\text{rappel : HR}(d) \Rightarrow L(1,\chi_d) \leq [2+\varepsilon(d)]\, e^{\gamma} \log\log|d|$$

et d'une infinité de discriminants d tels que

$$L(1,\chi_d) \leq [1+\varepsilon(d)] \frac{\zeta(2)}{e^{\gamma}} \frac{1}{\log\log|d|}$$
$$\text{rappel : HR}(d) \Rightarrow L(1,\chi_d) \geq \left[\frac{1}{2}+\varepsilon(d)\right] \frac{\zeta(2)}{e^{\gamma}} \frac{1}{\log\log|d|}.$$

$d \mapsto \varepsilon(d)$ est une fonction de limite nulle en $\pm\infty$.

— Quantification —

On note $\mathscr{D}(x)$ l'ensemble des discriminants $d \in \mathbb{Z}$ tels que $|d| \leq x$.

$$\#\mathscr{D}(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(x^{1/2}).$$

En 2003, Granville & Soundararajan ont montré que pour x assez grand on a les majorations

$$\frac{1}{\#\mathscr{D}(x)} \# \left\{ d \in \mathscr{D}(x) : L(1, \chi_d) \geq e^{\gamma} \log\log |d| \right\} \geq \exp\left\{ -e^{-C} \frac{\log x}{\log\log x} \left[1 + O\left(\frac{1}{\log\log x} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{1}{\#\mathscr{D}(x)} \# \left\{ d \in \mathscr{D}(x) : L(1, \chi_d) \leq \frac{\zeta(2)}{e^{\gamma}} \frac{1}{\log\log |d|} \right\} \geq \exp\left\{ -e^{-C} \frac{\log x}{\log\log x} \left[1 + O\left(\frac{1}{\log\log x} \right) \right] \right\}$$

$$C = \int_0^1 \tanh y \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int_1^{+\infty} (\tanh y - 1) \frac{\mathrm{d}y}{y} \approx 0,82.$$

— Modèle probabiliste de Granville & Soundararajan —

Pour démontrer le résultat de quantification précédent, Granville & Soundararajan ont utilisé le modèle probabiliste suivant.

Pour tout nombre premier p, on définit une variable aléatoire X_p avec les règles suivantes :

$$\begin{cases} \mathrm{Prob}(X_p = \quad 1) = \dfrac{p}{2(p+1)} \\ \mathrm{Prob}(X_p = -1) = \dfrac{p}{2(p+1)} \\ \quad \mathrm{Prob}(X_p = 0) = \dfrac{1}{p+1} \\ \qquad\qquad p \neq q \Rightarrow X_p \text{ et } X_q \text{ sont indépendantes.} \end{cases}$$

On considère alors la variable aléatoire

$$L(1,X) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - \frac{X(p)}{p}\right)^{-1}.$$

N.B. Montgomery & Vaughan(1999) sont à l'origine de la démarche de Granville & Soundararajan. Ils ont introduit une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathrm{Prob}(X_p = -1) = \mathrm{Prob}(X_p = 1) = 1/2$.

Le rôle de X_p est de mimer $d \mapsto \chi_d(p)$.

Ayant fixé p un nombre premier impair, on regarde $d \pmod{p^2}$.

Puisque d est sans facteur carré, d appartient à l'une des classes $1, 2, \ldots, p^2-1$ modulo p^2.

$$\longrightarrow p^2 - 1 \text{ classes.}$$

Pour les classes $p, 2p, \cdots, (p-1)p$, on a $\chi_d(p) = 0$.

$$\longrightarrow p-1 \text{ telles classes}$$
$$\longrightarrow \text{proportion } \frac{p-1}{p^2-1} = \frac{1}{p+1}.$$

Pour la moitié des $p(p-1)$ classes restantes, on a $\chi_d(p) = -1$ et pour l'autre moitié, on a $\chi_d(p) = 1$.

$$\longrightarrow \text{proportion } \frac{p(p-1)}{2(p^2-1)} = \frac{p}{2(p+1)}.$$

Granville & Soundarajan montrent alors qu'on a uniformément

$$\sum_{\substack{d\in\mathscr{D}(x)\\ d\notin\mathscr{E}(x)}} L(1,\chi_d)^z = \frac{6}{\pi^2}x\,\mathrm{Esp}[L(1,X)^z] + O\left(\frac{x}{\log^9 x}\mathrm{Esp}[L(1,X)^{\Re e\,z}]\right)$$

uniformément dans la région complexe

$$|z| \leq \frac{\log x \log\log\log x}{e^{12}\log\log x}.$$

Le sous-ensemble $\mathscr{E}(x)$ de $\mathscr{D}(x)$ est de cardinal inférieur à $\sqrt{x}$.

Si $N \geq 1$ est un entier, on note $\mathit{\Gamma}_0(N)$ le sous-groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$ défini par

$$\mathit{\Gamma}_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) : \ c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

Si $k \geq 2$ est un entier pair, une forme parabolique de poids k et de niveau N est une fonction holomorphe

$$f : \mathscr{H} := \{z \in \mathbb{C} : \ \Im m\, z > 0\} \to \mathbb{C}$$

telle que

(1) $\forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathit{\Gamma}_0(N),\ f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z),\ \forall z \in \mathscr{H}$;

(2) $z \mapsto (\Im m\, z)^{k/2} |f(z)|$ est majorée sur $\mathscr{H}$.

Une forme parabolique admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n) \exp(2i\pi nz).$$

L'ensemble $S(k,N)$ des formes paraboliques de poids k et de niveau N acquiert une structure d'espace hermitien lorsqu'on le munit du produit de Petersson

$$(f,g) = \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathscr{H}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Une approximation de sa dimension est

$$\dim S(k,N) = \frac{k-1}{12}[SL(2,\mathbb{Z})\colon \Gamma_0(N)] + O(N^{1/2+\varepsilon})$$

avec

$$[SL(2,\mathbb{Z})\colon \Gamma_0(N)] = N \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\mid N}} \left(1+\frac{1}{p}\right).$$

— Formes anciennes et nouvelles —

Lorsque d et N' sont deux diviseurs de N tels que $N' < N$ et $d \mid \frac{N}{N'}$, et si $f \in S(k, N')$ alors $z \mapsto f(dz)$ est une forme de $S(k,N)$. L'espace engendré par de telles formes est appelé espace des formes anciennes. Son orthogonal est l'espace des formes nouvelles.

— Opérateurs de Hecke —

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n^{e} opérateur de Hecke par

$$\begin{array}{rccc} T_n : & S(k,N) & \rightarrow & S(k,N) \\ & \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \widehat{f}(m) e^{2i\pi mz} & \mapsto & \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \left[\sum_{\substack{d \mid (m,n) \\ (d,N)=1}} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right] e^{2i\pi mz}. \end{array}$$

Les opérateurs de Hecke commutent et sont presque tous autoadjoints : si $(n,N)=1$ alors T_n est autoadjoint.

— Formes primitives —

Une base orthogonale privilégiée de l'espace des formes nouvelles est l'ensemble des formes primitives. On note $H_k^*(N)$ cet ensemble. Les formes primitives vérifient

(1)

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} e^{2i\pi nz}\,;$$

(2) $\lambda_f(1) = 1\,;$

(3) $T_n f = \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} f,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,;$

(4)

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d|(m,n)\\(d,N)=1}} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

(5) $\lambda_f(p) \in [-2,2] \quad (p \in \mathscr{P}).$

Soit f une forme primitive de niveau N et poids k.

Pour $p \in \mathscr{P}$ ne divisant pas N, on a $\lambda_f(p) \in [-2,2]$ et il existe $\theta_{f,p} \in [0,\pi]$ tel que

$$\lambda_f(p) = 2\cos\theta_{f,p} = \chi_{\mathrm{St}}[g(\theta_{f,p})]$$

où χ_{St} est le caractère de la représentation standard de $\mathrm{SU}(2)$

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{St} & : & \mathrm{SU}(2) & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2) \\ & & M & \mapsto & \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ x & \mapsto & Mx \end{array} \end{array}$$

et

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

décrit les classes d'équivalences de $\mathrm{SU}(2)$ lorsque θ parcourt $[0,\pi]$.

La relation de multiplicativité sur les valeurs propres de Hecke s'écrit alors

$$\lambda_f(p^\nu) = \chi_{\mathrm{sym}^\nu}[g(\theta_{f,p})] = \frac{\sin(\nu+1)\theta}{\sin\theta}$$

où χ_{sym^ν} est le caractère de sym^ν, la composée de la puissance symétrique ν^{e} de $\mathrm{GL}(2)$ et de la représentation standard de $\mathrm{SU}(2)$.

$$\mathrm{sym}^\nu g(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\nu\theta} & & & \\ & e^{i(\nu-2)\theta} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-i\nu\theta} \end{pmatrix}.$$

— Fonctions L —

Si ρ est une représentation d'un groupe compact G, on pose, pour tout $g \in G$,

$$D(X, \rho, g) = \det\left[I - X\rho(g)\right]^{-1}.$$

En particulier, pour $G = \mathrm{SU}(2)$, on pose

$$D(X, \mathrm{sym}^m, g) = \det\left[I - X\,\mathrm{sym}^m(g)\right]^{-1}.$$

Soit N un entier sans facteur carré, f une forme primitive de niveau N et poids 2 et $m \geq 1$ un entier, sa fonction L de puissance symétrique m^{e} est

$$L(s,\operatorname{sym}^m f) = \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\nmid N}} D\left[p^{-s},\operatorname{sym}^m, g(\theta_{f,p})\right] \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\mid N}} \left[1-\lambda_f(p)^m p^{-s}\right]^{-1}.$$

Ce produit eulérien converge pour $\Re e\, s > 1$.

On note $L(s,f)$ plutôt que $L(s,\operatorname{sym}^1 f)$.

HR($\operatorname{sym}^m f$) **Hypothèse de Riemann pour** $L(s,\operatorname{sym}^m f)$: les zéros de $L(s,\operatorname{sym}^m f)$ de la bande critique sont sur l'axe critique

$$\Re e\, s = \frac{1}{2}.$$

Sauf mention du contraire, on n'utilise pas cette hypothèse dans la suite.

On va faire sur ces fonctions deux hypothèses qui ne sont des théorèmes que dans un petit nombre de cas et sont l'objet d'une recherche très riche en théorie des formes automorphes.

Pour toute forme $f \in H_2^*(N)$, il existe une représentation parabolique autoduale de $\mathrm{GL}_{m+1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ dont les facteurs L locaux coïncident avec ceux de $L(s, \mathrm{sym}^m f)$. Posons

$$L_\infty(s, \mathrm{sym}^m f) = \begin{cases} \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)2^u \prod_{j=1}^{u}(2\pi)^{-s-j}\Gamma(s+j) & \text{si } m = 2u \text{ avec } u \text{ pair} \\ \pi^{-(s+1)/2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)2^u \prod_{j=1}^{u}(2\pi)^{-s-j}\Gamma(s+j) & \text{si } m = 2u \text{ avec } u \text{ impair} \\ 2^{u+1}\prod_{j=0}^{u}(2\pi)^{-s-j-1/2}\Gamma\left(s+j+\frac{1}{2}\right) & \text{si } m = 2u+1. \end{cases}$$

Alors, il existe $\varepsilon(\mathrm{sym}^m f) \in \{-1, 1\}$ tel que

$$N^{ms/2}L_\infty(s, \mathrm{sym}^m f)L(s, \mathrm{sym}^m f) = \varepsilon(\mathrm{sym}^m f)N^{m(1-s)/2}L_\infty(1-s, \mathrm{sym}^m f)L(1-s, \mathrm{sym}^m f).$$

Cette hypothèse est connue pour

- $m = 1$ (Hecke ?)
- $m = 2$ (Gelbart & Jacquet, 1978)
- $m = 3$ (Kim & Shahidi, 2002)
- $m = 4$ (Kim, 2003)

Pour $m \in \{5, \ldots, 9\}$, Kim & Shahidi ont démontré l'équation fonctionnelle et un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$.

— Zéro de Landau-Siegel —

Hypothèse Il existe une constante $A_m > 0$ ne dépendant que de m telle que pour toute $f \in H_2^*(N)$, $L(s, \mathrm{sym}^m f)$ ne s'annule pas sur l'intervalle réel $[1 - A_m / \log(2N), 1]$.

La justification pour cette hypothèse est que l'on sait établir, pour les fonctions $L(s, \mathrm{sym}^m f)$ et en admettant l'hypothèse de fonctorialité, des régions sans zéro de la forme

$$\Re e\, s \geq 1 - \frac{c_m}{\log 2(N|\Im m\, s| + 1)}$$

privée d'un éventuel point réel appelé alors zéro de Landau-Siegel.

Ayant fixé N, si le zéro de Landau-Siegel existe, il n'existe que pour une seule des $\dim H_2^*(N)$ fonctions $L(s, \mathrm{sym}^m f)$.

Cette hypothèse est connue pour

- $m = 1$ (Hoffstein & Ramakrishnan, 1995)
- $m = 2$ (Goldfeld, Hoffstein & Lieman et Hoffstein & Lockhart, 1994)
- $m = 4$ (Ramakrishnan & Wang, 2003)

— Conséquence des hypothèses —

On fixe m. Il existe des réels $C_m > 0$, $D_m > 0$ ne dépendant que de m tels que les inégalités suivantes sont vraies.

Pour tous les N sans facteur carré tels que l'hypothèse de fonctorialité est vraie alors

$$L(1, \mathrm{sym}^m f) \leq D_m \left(\log N\right)^{m+1}$$

pour toute $f \in H_2^*(N)$.

Pour tous les N tels que les hypothèses de fonctorialité et d'absence de zéro de Siegel sont vraies, alors

$$L(s, \mathrm{sym}^m f) \geq D_m \left[\log(N|s| + 2)\right]^{-C_m}$$

uniformément sur $\Re e\, s = 1$ pour toute $f \in H_2^*(N)$.

— Un résultat de densité (Kowalski & Michel, 2002) —

On fixe m. Il existe des constantes $A_m > 0$, $B_m > 0$ et $C_m > 0$ telles que le résultat suivant est vrai.

Soit N sans facteur carré pour lequel les hypothèses de fonctorialité et d'absence de zéro de Siegel sont vraies.

Pour $T \geq 1$ et $\sigma > 3/4$, on définit $N(\mathrm{sym}^m f; \sigma, T)$ comme le nombre de zéros de $L(s, \mathrm{sym}^m f)$ dans la région

$$\Re e\, s \geq \sigma, \qquad |\Im m\, s| \leq T.$$

Alors

$$\sum_{f \in H_2^*(N)} N(\mathrm{sym}^m f; \sigma, T) \leq A_m T^{B_m} N^{C_m(1-\sigma)/(2\sigma-1)}.$$

— Moments complexes de $L(1, \mathrm{sym}^m f)$ —

En généralisant des travaux commencés par Luo (1999 et 2000), que j'ai poursuivi d'abord seul (2001, 2003) puis en collaboration avec Wu (2005, ≥ 2004) puis Habsieger (2005), Cogdell & Michel ont étudié les moments complexes de $L(1, \mathrm{sym}^m f)$ (2004).

On fixe $m \geq 1$. Il existe des réels $c > 0$ et $\delta > 0$, ne dépendant que de m tels que le résultat suivant est vrai.

Pour tout entier N
– sans facteur carré
– tels que les hypothèses de fonctorialité et d'abscence de zéro de Siegel sont vérifiées
– sans diviseur premier inférieur à $(\log N)^{4/3}$
pour tout complexe z tel que

$$|z| \leq c \frac{\log N}{\log\log N \log\log\log N},$$

on a

$$\sum_{f \in H_2^*(N)} \frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)} L(1, \operatorname{sym}^m f)^z = \prod_{p \in \mathscr{P}} \int_{\mathrm{SU}(2)} D(p^{-1}, \operatorname{sym}^m, g)^z \, \mathrm{d}g + O\left(e^{-\delta \log N / \log\log N}\right).$$

On fixe $\varepsilon > 0$. Cogdell & Michel déduisent de leur résultat l'existence d'une infinité d'entiers N pour lesquels il existe $f \in H_2^*(N)$ et $g \in H_2^*(N)$ vérifiant

$$L(1, \mathrm{sym}^m f) \geq (1-\varepsilon)(e^\gamma \log\log N)^{m+1}$$

$$\mathrm{HR}(\mathrm{sym}^m f) \Rightarrow L(1, \mathrm{sym}^m f) \ll_m (\log\log N)^{m+1} \text{ pour toute } f \in H_2^*(N)$$

et

$$L(1, \mathrm{sym}^m g) \leq (1+\varepsilon) e^{-\mathrm{sym}_-^{m,1}} (\log\log N)^{-\mathrm{sym}_-^m}$$

$$\mathrm{HR}(\mathrm{sym}^m g) \Rightarrow L(1, \mathrm{sym}^m g) \gg_m (\log\log N)^{-\mathrm{sym}_-^m} \text{ pour toute } g \in H_2^*(N)$$

avec

$$\mathrm{sym}_-^m = -\min_{\theta \in [0,\pi]} \frac{\sin[(m+1)\theta]}{\sin\theta}$$

et

$$\mathrm{sym}_-^{m,1} = \gamma\, \mathrm{sym}_-^m - \sum_{p \in \mathscr{P}} \left[\log\left(\min_{g \in \mathrm{SU}(2)} D(p^{-1}, \mathrm{sym}^m, g)\right) + \frac{\mathrm{sym}_-^m}{p}\right].$$

Le travail de Cogdell & Michel s'adapte au cadre des caractères de Dirichlet quadratiques, en remplaçant $\mathrm{SU}(2)$ par $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

Les résultats n'ont pas la même précision en raison de l'absence de résultats sur les sommes très courtes de coefficients de formes primitives.

Dans le cas des caractères de Dirichlet, un résultat de Graham & Ringrose permet de majorer des sommes courtes de Dirichlet lorsque le module n'a que des petits facteurs premiers.

Théorème de Graham & Ringrose Soit χ un caractère non principal de conducteur q tel que $q/(4,q)$ est sans facteur carré et si p est le plus petit diviseur premier de q, alors

$$\sum_{n\leq N}\chi(n) \ll N^{1-\ell/(8L)}p^{1/3}q^{1/(7L)}\left(\sum_{d|q}1\right)^{\ell^2/L}$$

pour tout $\ell\in\mathbb{N}$ et avec $L=2^\ell$.

Le point de départ de Cogdell & Michel est d'écrire

$$D(X, \mathrm{sym}^m, g)^z = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \lambda_{\mathrm{sym}^m}^{z,\nu}(g) X^\nu.$$

Puisque $g \mapsto \lambda_{\mathrm{sym}^m}^{z,\nu}(g)$ est centrale, on a

$$\lambda_{\mathrm{sym}^m}^{z,\nu}(g) = \sum_{m'=0}^{+\infty} \mu_{\mathrm{sym}^m,\mathrm{sym}^{m'}}^{z,\nu} \chi_{\mathrm{sym}^{m'}}(g)$$

avec

$$\mu_{\mathrm{sym}^m,\mathrm{sym}^{m'}}^{z,\nu} = \int_{\mathrm{SU}(2)} \lambda_{\mathrm{sym}^m}^{z,\nu}(g) \chi_{\mathrm{sym}^{m'}}(g) \,\mathrm{d}g.$$

En particulier,

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} D(X,\mathrm{sym}^m,g)^z \,\mathrm{d}g = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \mu_{\mathrm{sym}^m,\mathrm{sym}^0}^{z,\nu} X^\nu$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left\{[\mathrm{FrSc}(\mathrm{sym}^m)z]^2 + \mathrm{FrSc}(\mathrm{sym}^m)z\right\} X^2 + O(X^3)$$

avec

$$\mathrm{FrSc}(\mathrm{sym}^m) = \int_{\mathrm{SU}(2)} \chi_{\mathrm{sym}^2\,\mathrm{sym}^m}(g) - \chi_{\wedge^2\,\mathrm{sym}^m}(g)\,\mathrm{d}g$$

Sous les hypothèses du theorème de Cogell & Michel, j'ai montré en collaboration avec Jie Wu (≥ 2004)

$$\sum_{f\in H_2^*(N)} \frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)} L\left(\frac{1}{2}, f\right) L(1, \mathrm{sym}^m f)^z =$$
$$\prod_{p\in\mathscr{P}} \int_{\mathrm{SU}(2)} D(p^{-1/2}, \mathrm{St}, g) D(p^{-1}, \mathrm{sym}^m, g)^z \,\mathrm{d}g + O\left(e^{-\delta \log N/\log\log N}\right).$$

Les méthodes utilisées sont du type de celles développées par Cogdell & Michel qu'on rejoint en utilisant l'égalité

$$L\left(\frac{1}{2}, f\right) = [1 + \varepsilon(f)] \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-2\pi \frac{n}{\sqrt{N}}\right).$$

D’autre part, sous les mêmes hypothèses, on démontre

$$\sum_{f\in H_2^*(N)}\frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)}L(1,\mathrm{sym}^2 f)L(1,\mathrm{sym}^m f)^z = \prod_{p\in\mathscr{P}}\int_{\mathrm{SU}(2)} D(p^{-1},\mathrm{sym}^2,g)D(p^{-1},\mathrm{sym}^m,g)^z\,\mathrm{d}g+O\left(e^{-\delta\log N/\log\log N}\right).$$

On déduit des deux égalités précédentes que, lorsque $N \to +\infty$,

$$\sum_{f\in H_2^*(N)} \frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)} L\left(\frac{1}{2}, f\right) L(1,\mathrm{sym}^{2m} f)^z \sim \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{f\in H_2^*(N)} \frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)} L(1,\mathrm{sym}^2 f) L(1,\mathrm{sym}^{2m} f)^z.$$

Le résultat précédent résulte de l'égalité

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} D(p^{-1/2}, \mathrm{St}, g) D(p^{-1}, \mathrm{sym}^{2m}, g)^z \,\mathrm{d}g = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \int_{\mathrm{SU}(2)} D(p^{-1}, \mathrm{sym}^2, g) D(p^{-1}, \mathrm{sym}^{2m}, g)^z \,\mathrm{d}g.$$

Soit $g \in \mathrm{SU}(2)$, on note $e^{\pm i\theta}$ ses deux valeurs propres. Alors

$$D\big(X,\mathrm{St},g\big) = \det(I - Xg)^{-1} = \frac{1}{1-2(\cos\theta)X+X^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \chi_{\mathrm{sym}^k}(g)X^K.$$

D'autre part,

$$D(X,\mathrm{sym}^{2m},g) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \lambda^{z,\nu}_{\mathrm{sym}^{2m}}(g)X^\nu$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{SU}(2)} D(p^{-1/2},\mathrm{St},g)D(p^{-1},\mathrm{sym}^{2m},g)^z\,\mathrm{d}g &= \sum_{(k,\nu)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{p^{\nu+k/2}} \int_0^{+\infty} \lambda^{z,\nu}_{\mathrm{sym}^{2m}}(g)\chi_{\mathrm{sym}^k}(g)\,\mathrm{d}g \\ &= \sum_{(k,\nu)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{p^{\nu+k/2}} \mu^{z,\nu}_{\mathrm{sym}^{2m},\mathrm{sym}^k}.\end{aligned}$$

Le calcul explicite de $\mu^{z,\nu}_{\mathrm{sym}^{2m},\mathrm{sym}^k}$ montre que cette quantité est nulle si k est impair. Ainsi,

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} D(p^{-1/2},\mathrm{St},g)D(p^{-1},\mathrm{sym}^{2m},g)^z\,\mathrm{d}g = \int_{\mathrm{SU}(2)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\chi_{\mathrm{sym}^{2k}}(g)}{p^k}D(p^{-1},\mathrm{sym}^{2m},g)^z\,\mathrm{d}g.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\chi_{\mathrm{sym}^{2k}}(g)X^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\chi_{\mathrm{sym}^{k}}(g)[X^k+(-X)^k] &= \frac{1+X^2}{\left(1-e^{2i\theta}X^2\right)\left(1-e^{-2i\theta}X^2\right)}\\ &= (1-X^4)D(X^2,\mathrm{sym}^2,g)\end{aligned}$$

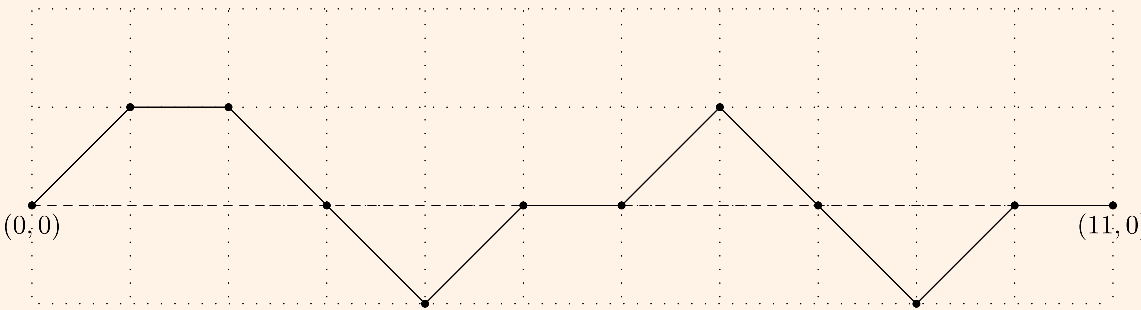
de sorte que

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} D(p^{-1/2},\mathrm{St},g)D(p^{-1},\mathrm{sym}^{2m},g)^z\,\mathrm{d}g = \left(1-\frac{1}{p^2}\right)\int_{\mathrm{SU}(2)} D(p^{-1},\mathrm{sym}^{2},g)D(p^{-1},\mathrm{sym}^{2m},g)^z\,\mathrm{d}g.$$

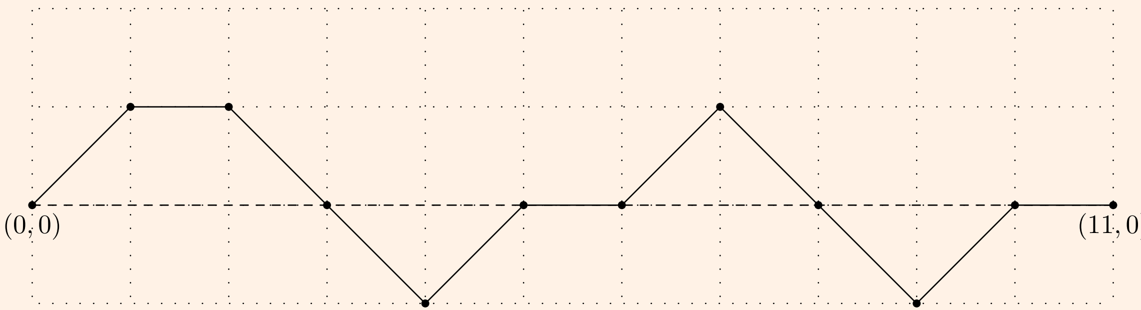
— Chemins de Riordan —

Un chemin de Riordan d'arrivée h est une suite de points de $\mathbb{Z}^2$

– de premier terme $(0,0)$,
– de dernier terme $(h,0)$,
– chaque point est image du précédent par D: $(x,y) \mapsto (x+1,y-1)$, P: $(x,y) \mapsto (x+1,y)$ ou M: $(x,y) \mapsto (x+1,y+1)$,
– aucun point n'est d'ordonnée strictement négative,
– **sauf** s'il est l'image de son prédécesseur par D et s'il se transforme en son successeur par M.



— Nombres de Riordan —



On note R_{h+2} le nombre de chemin d'arrivée h et on définit $R_0 = 1$ puis $R_1 = 0$.

La série génératrice des nombres de Riordan est alors

$$\sum_{h=0}^{+\infty} R_h x^h = \frac{2}{1 + x + \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}.$$

— Interprétation combinatoire des moments négatifs —

En 2001, j'ai donné l'expression suivante des moments entiers négatifs de $L(1,\operatorname{sym}^2 f)$,

Soit

$$\mathscr{E}_n(b_1,\dots,b_n)=\left\{(d_1,\dots,d_{n-1})\in\mathbb{N}^{n-1}\colon\ d_i\mid\left(\frac{b_1\cdots b_i}{d_1\cdots d_{i-1}},b_{i+1}\right)^2\right\},$$

soit

$$m_{-n}(r)=\sum_{\substack{(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{N}^{3n}\\ a_1\cdots a_n(b_1\cdots b_n)^2(c_1\cdots c_n)^3=r}}\mu(a_1b_1c_1)\cdots\mu(a_nb_nc_n)\mu(b_1)\cdots\mu(b_n)\\ \times\sum_{\substack{(d_1,\dots,d_{n-1})\in\mathscr{E}_n(a_1b_1,\dots,a_nb_n)\\ d_1\cdots d_{n-1}=a_1b_1\cdots a_nb_n}}1$$

alors

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{f\in H_2^*(N)}\frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)}L(1,\operatorname{sym}^2 f)^{-n}=\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{m_{-n}(r)}{r}.$$

NB. La limite est prise sur les entiers N sans facteur carré et sans facteur premier inférieur à $\log N$.

La présence de la fonction μ permet une étude combinatoire (2003) et conduit à

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{f\in H_2^*(N)}\frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)}L(1,\mathrm{sym}^2 f)^{-n}=\frac{1}{\zeta(3)^n}\prod_p \ell_n\left(\frac{p}{p^2+p+1}\right)$$

avec

$$\ell_n(x)=\sum_{h=0}^{n}(-1)^h\binom{n}{h}R_h x^h.$$

NB. La limite est prise sur les entiers N sans facteur carré et sans facteur premier inférieur à $\log N$.

— Interprétation combinatoire des moments positifs —

En 2001, j'ai donné l'expression suivante des moments entiers positifs de $L(1, \mathrm{sym}^2 f)$,

Soit

$$\mathscr{E}_n(b_1, \ldots, b_n) = \left\{ (d_1, \ldots, d_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \colon \ d_i \mid \left(\frac{b_1 \cdots b_i}{d_1 \cdots d_{i-1}}, b_{i+1} \right)^2 \right\},$$

soit

$$m_n(r) = \sum_{\substack{b_1, \ldots, b_n \\ b_1 \cdots b_n = r}} \ \sum_{\substack{(d_1, \ldots, d_{n-1}) \in \mathscr{E}_n(b_1, \ldots, b_n) \\ d_1 \cdots d_{n-1} = r}} 1$$

alors

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{f \in H_2^*(N)} \frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)} L(1, \mathrm{sym}^2 f)^n = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{m_n(r)}{r}.$$

NB. La limite est prise sur les entiers N sans facteur carré et sans facteur premier inférieur à $\log N$.

En 2005, on a montré avec Habsieger le résultat suivant.

Soit $n \geq 0$, alors

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{f\in H_2^*(N)} \frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)} L(1,\mathrm{sym}^2 f)^n = \frac{\zeta(2)^{3n+2}\zeta(3)^n}{\zeta(6)^n} \prod_p \ell_n\left(\frac{-p}{p^2-p+1}\right).$$

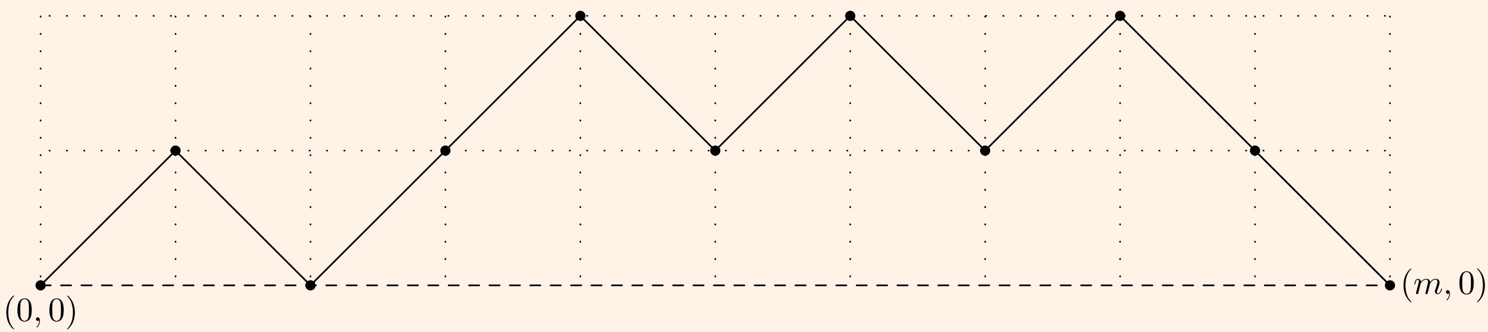
L'interprétation combinatoire est plus délicate que pour les moments négatifs. Dans le cas des moments négatifs, la fonction μ restreignait les domaines de variation des indices. La preuve dans le cas des moments positifs fait intervenir les chemins de Dyck et un décompte par statistiques fixées.

NB. La limite est prise sur les entiers N sans facteur carré et sans facteur premier inférieur à $\log N$.

— Chemins de Dyck —

Soit $m \geq 1$ un entier. Un chemin de Dyck d'arrivée m est une suite de points de $\mathbb{Z}^2$

– de premier terme $(0,0)$,
– de dernier terme $(m,0)$,
– chaque point est image du précédent par M : $(x,y) \mapsto (x+1,y+1)$ ou D : $(x,y) \mapsto (x+1,y-1)$,
– aucun point n'est d'ordonnée strictement négative.



On note $\mathscr{D}_m$ l'ensembe des chemins de Dyck d'arrivée $2m$. Un tel chemin peut-être représenté par une suite de 1 (pas montants) et de -1 (pas descendants).

— Statistiques —

Soit D un chemin de Dyck d'arrivée $2n$. On suppose que D est associé à la suite $(\delta_i)_{1\leq i\leq 2n}$.

On définit $\mathrm{DBR}(D)$ comme le nombre de double pas montants :

$$\mathrm{DBR}(D) = \#\{i \in [1,2n-1] : (\delta_i, \delta_{i+1}) = (1,1)\}.$$

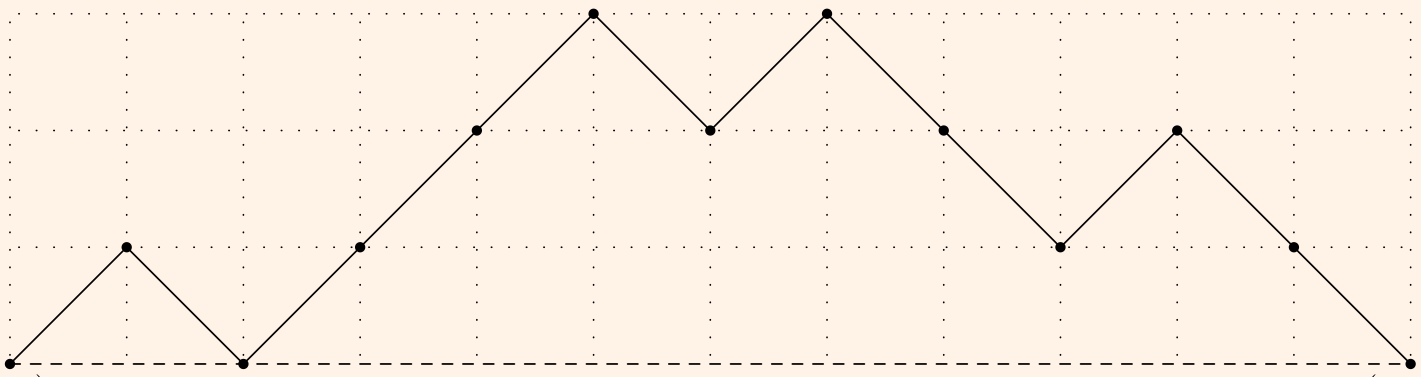
On définit $\mathrm{RET}(D)$ comme le nombre de retours de D, *ie.* de pas descendants arrivant sur l'axe horizontale :

$$\mathrm{RET}(D) = \#\left\{ i \in [1,2n] : \sum_{j=1}^{i} \delta_j = 0 \right\}.$$

On note $\mathrm{LD}(D)$, et on appelle dernière descente, la longueur de la dernière suite de pas descendants de D :

$$\delta_{2n} = \delta_{2n-1} = \cdots = \delta_{2n-\mathrm{LD}(D)+1} = -1 \quad \text{et} \quad \delta_{2n-\mathrm{LD}(D)} = 1.$$

$$(1,-1,1,1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,-1)$$



$n=6,\quad \mathrm{DBR}=2,$

$\mathrm{RET}=2,\quad \mathrm{LD}=2.$

Soit

$$A(x,y,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(x,y)\,t^n$$

où

$$A_n(x,y) = \sum_{D\in\mathscr{D}_n} x^{\mathrm{RET}(D)}\,y^{\mathrm{DBR}(D)}.$$

On montre

$$A(x,y,t) = \frac{2-x-xt+xyt-x\sqrt{1-2(1+y)\,t+(1-y)^2\,t^2}}{2(1-x-xt+xyt+x^2\,t)}.$$

Cette fonction intervient de la façon suivante. On montre que

$$\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{m_n(r)}{r} = \zeta(2)^{n-1} \prod_{p\in\mathscr{P}} S_n\left(0, \frac{1}{p}\right)$$

avec

$$S_n(\alpha, q) = \sum_{\substack{(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^{n+1} \\ \alpha_0=\alpha \\ \alpha_n=0}} \prod_{i=0}^{n-1} \left(q^{|\alpha_i-\alpha_{i+1}|} + \cdots + q^{\alpha_i+\alpha_{i+1}}\right).$$

On calcule

$$S_{n+1}(\alpha, q) = \frac{1}{(1-q)^n(1-q^2)^n} \Sigma_n[\alpha](q)$$

avec

$$\Sigma_n[\alpha](q) = \sum_{D\in\mathscr{D}_{n+1}} (1-q)^{\mathrm{RET}(D)-1} q^{2\,\mathrm{DBR}(D)} \left(\frac{1-q^2}{q^2}\right)^{\mathrm{LD}(D)-1} \binom{\alpha}{\mathrm{LD}(D)-1} q^{\alpha}.$$

On a en particulier

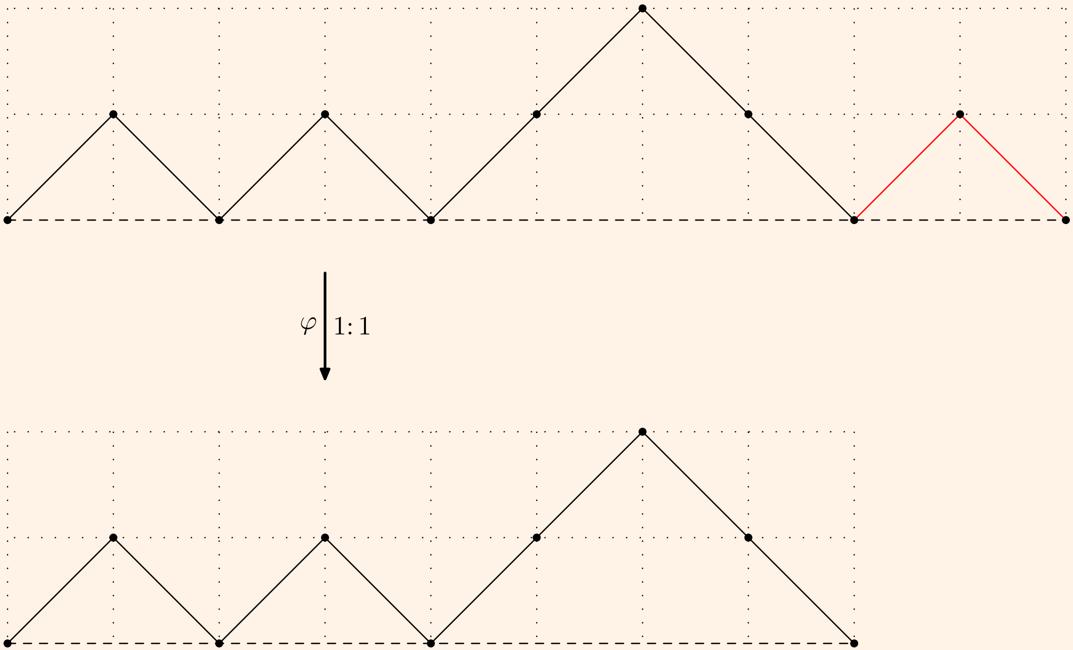
$$\Sigma_n[0](q) = \sum_{\substack{D \in \mathscr{D}_{n+1} \\ \mathrm{LD}(D)=1}} (1-q)^{\mathrm{RET}(D)-1} q^{2\,\mathrm{DBR}(D)}.$$

On va enlever la condition $\mathrm{LD}(D) = 1$.

Il existe une bijection

$$\varphi\colon \{D \in \mathscr{D}_{n+1}\colon\ \mathrm{LD}(D) = 1\} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_n$$

telle que $\mathrm{RET}\big(\varphi(D)\big) = \mathrm{RET}(D) - 1$ et $\mathrm{DBR}\big(\varphi(D)\big) = \mathrm{DBR}(D)$.



L'expression de $\Sigma_n[0](q)$ devient alors

$$\begin{aligned}\Sigma_n[0](q) &= \sum_{D\in\mathscr{D}_n} (1-q)^{\mathrm{RET}(D)} q^{2\,\mathrm{DBR}(D)} \\ &= A_n(1-q,q^2)\end{aligned}$$

puis

$$S_{n+1}(0,q) = \frac{1}{(1-q)^n(1-q^2)^n} A_n(1-q,q^2).$$

Cette expression permet d'obtenir une expression intégrale de $S_{n+1}(0,q)$ puis d'obtenir le résultat compte-tenu de

$$R_h = \frac{1}{\pi}\int_0^2 (t^2-1)^h \sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t$$

qui mène à

$$\ell_n(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} [1+x(1-4\sin^2\theta)]^n \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

— Une preuve combinatoire du lien entre valeurs au bord et valeurs centrales —
L'interprétation suivante a été obtenue en collaboration avec Jie Wu (≥ 2004).

On rappelle que

$$\mathscr{E}_n(b_1,\dots,b_n) := \left\{(d_1,\dots,d_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} : \ d_i \mid \left(\frac{b_1\cdots b_i}{d_1\cdots d_{i-1}}, b_{i+1}\right)^2, \forall\, i \in [1, n-1]\right\},$$

et on pose

$$w_{-n}(r) = \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{N}^{3n}\\ a_1\cdots a_n(b_1\cdots b_n)^2(c_1\cdots c_n)^3=r}} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu(a_i b_i c_i)\mu(b_i)\right] \sum_{(d_1,\dots,d_{n-1})\in\mathscr{E}_n(a_1b_1,\dots,a_nb_n)} \frac{|\boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{ab}|}$$

puis

$$W_{-n} := \prod_{p\in\mathscr{P}} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{w_{-n}(p^\nu)}{p^\nu}.$$

On montre alors

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{f\in H_2^*(N)}\frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)}L\left(\frac{1}{2},f\right)L(1,\mathrm{sym}^2 f)^{-n}=\zeta(2)^{-n}W_{-n}.$$

On définit ensuite, pour $n\geq 0$ et $k\in[0,n]$

$$R_k(p):=\begin{cases} p & \text{if } k=0\,;\\ 1 & \text{if } k=1\,;\\ \displaystyle\sum_{\substack{(\delta_1,\dots,\delta_{k-1})\in\{-1,0,1\}^{k-1}\\ \delta_1+\dots+\delta_i\leq\max(0,\delta_i)}} p^{\delta_1+\dots+\delta_{k-1}} & \text{si } k\geq 2.\end{cases}$$

Alors

$$W_{-n}=\frac{1}{\zeta(3)^n}\prod_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}R_k(p)\left(\frac{p}{p^2+p+1}\right)^k.$$

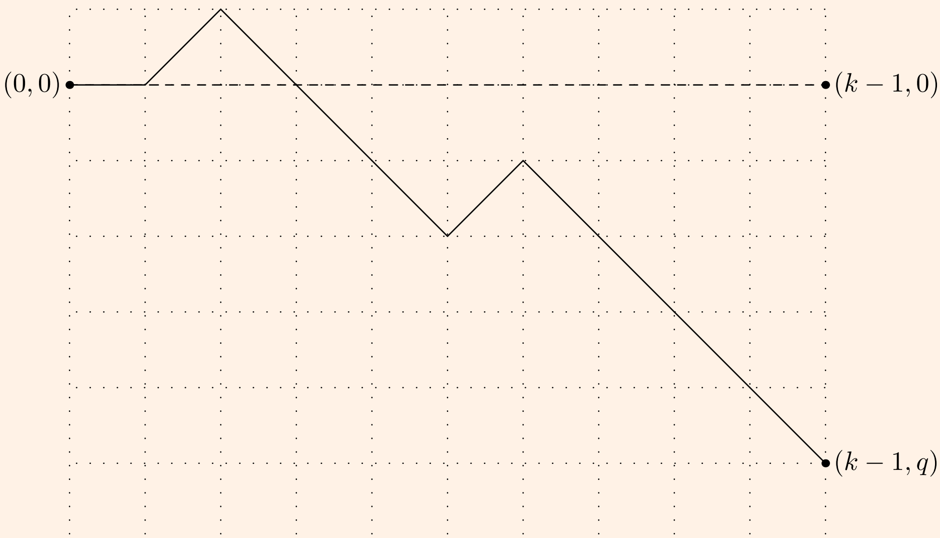
Pour $k \geq 1$, on écrit

$$R_k(p) =: \sum_{q=-(k-1)}^{1} \xi_{k,q} p^q.$$

Les entiers $\xi_{k,q}$ sont le nombre de chemins de $\mathbb{Z}^2$ qui

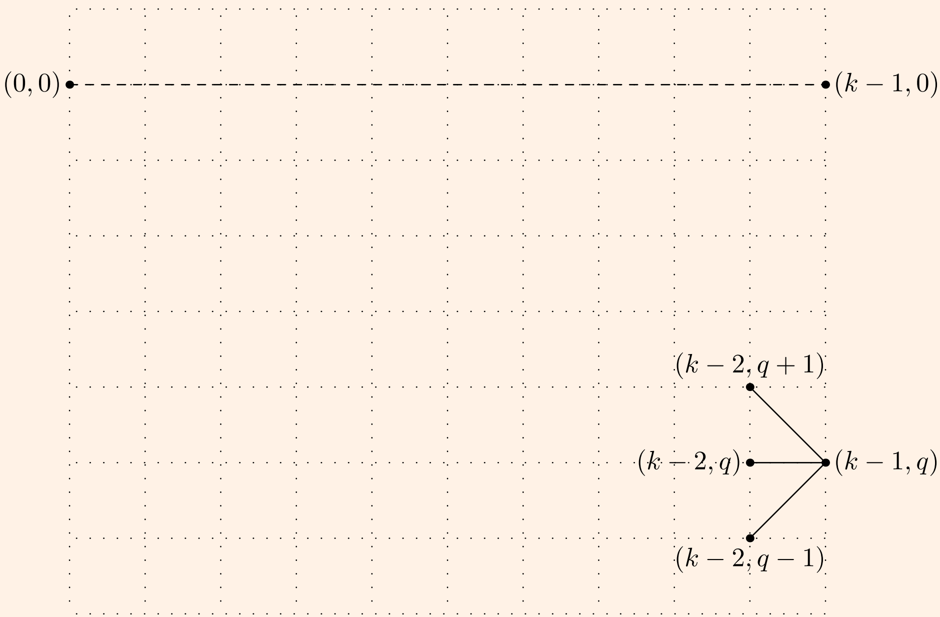
– relient $(0,0)$ à $(k-1, q)$
– par des pas $(1,-1)$, $(1,0)$ ou $(1,1)$
– ne passant jamais sous l'axe des abscisses
– **sauf** éventuellement par un pas montant immédiatement suivi d'un pas descendant.

On compte donc des chemins de Riordan partiels.



On a la relation de récurrence

$$R_k(p) = \left(p + 1 + \frac{1}{p}\right) R_{k-1}(p) - p(p+1) R_{k-1}$$



Cette relation de récurrence mène à

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}R_k(p)\left(\frac{p}{p^2+p+1}\right)^k=\frac{p^2(p+1)}{p^2+p+1}\ell_n\left(\frac{p}{p^2+p+1}\right) \tag{1}$$

ce qui conduit à

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{f\in H_2^*(N)}\frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)}L\left(\frac{1}{2},f\right)L(1,\mathrm{sym}^2 f)^{-n}=$$
$$\frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)^{n-1}}\prod_p \ell_{n-1}\left(\frac{p}{p^2+p+1}\right)$$

puis à

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{f\in H_2^*(N)}\frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)}L\left(\frac{1}{2},f\right)L(1,\mathrm{sym}^2 f)^{-n}=$$
$$\frac{1}{\zeta(2)}\lim_{N\to+\infty}\sum_{f\in H_2^*(N)}\frac{N}{4\pi(f,f)\varphi(N)}L(1,\mathrm{sym}^2 f)L(1,\mathrm{sym}^2 f)^{-n}.$$

Bibliographie

[Cho49] S. CHOWLA – « Improvement of a theorem of Linnik and Walfisz », **Proc. London Math. Soc. (2) 50** (1949), p. 423–429.

[CM04] J. COGDELL et P. MICHEL – « On the complex moments of symmetric power L-functions at $s = 1$ », **Int. Math. Res. Not.** (2004), no. 31, p. 1561–1617.

[GHL94] D. GOLDFELD, J. HOFFSTEIN et D. LIEMAN – « An effective zero-free region », **Ann. of Math. (2) 140** (1994), no. 1, p. 177–181, Appendix of [HL94].

[GJ78] S. GELBART et H. JACQUET – « A relation between automorphic representations of GL(2) and GL(3) », **Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 11** (1978), no. 4, p. 471–542.

[Gol76] D. M. GOLDFELD – « The class number of quadratic fields and the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer », **Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 3** (1976), no. 4, p. 624–663.

[GR90] S. W. GRAHAM et C. J. RINGROSE – « Lower bounds for least quadratic nonresidues », Analytic number theory (Allerton Park, IL, 1989), Progr. Math., vol. 85, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 269–309.

[GS03] A. GRANVILLE et K. SOUNDARARAJAN – « The distribution of values of $L(1,\chi_d)$ », **Geom. Funct. Anal. 13** (2003), no. 5, p. 992–1028.

[GS04] ______, « Errata to : “The distribution of values of $L(1,\chi_d)$” [Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 5, 992–1028. », **Geom. Funct. Anal. 14** (2004), no. 1, p. 245–246.

[GZ86] B. H. GROSS et D. B. ZAGIER – « Heegner points and derivatives L-series », **Inventiones Mathematicae 84** (1986), p. 225–320.

[HL94] J. HOFFSTEIN et P. LOCKHART – « Coefficients of Maass forms and the Siegel zero », **Ann. of Math. (2) 140** (1994), no. 1, p. 161–181, With an appendix by Dorian Goldfeld, Jeffrey Hoffstein and Daniel Lieman.

[HR95] J. HOFFSTEIN et D. RAMAKRISHNAN – « Siegel zeros and cusp forms », **Internat. Math. Res. Notices** (1995), no. 6, p. 279–308.

[HR04] L. HABSIEGER et E. ROYER – « Automorphic L functions and combinatorics, Dyck paths », à paraître. Dipsonible à `http://www.math.univ-montp2.fr/~royer/art/hr1`, ≥ 2004.

[Hua82] L.-K. HUA – **Introduction to number theory**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1982.

[IK04] H. IWANIEC et E. KOWALSKI – **Analytic number theory**, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[JL01] G. JAMES et M. LIEBECK – **Representations and characters of groups**, second éd., Cambridge University Press, New York, 2001.

[Kim03] H. H. KIM – « Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2 », **J. Amer. Math. Soc. 16** (2003), no. 1, p. 139–183 (electronic), With appendix 1 by Dinakar Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and Peter Sarnak.

[KM02] E. Kowalski et P. Michel – « Zeros of families of automorphic L-functions close to 1 », **Pacific J. Math. 207** (2002), no. 2, p. 411–431.

[KS02] H. H. Kim et F. Shahidi – « Functorial products for $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ and the symmetric cube for GL_2 », **Ann. of Math. (2) 155** (2002), no. 3, p. 837–893, With an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart.

[Lit28] J. Littlewood – « On the class number of the corpus $P(\sqrt{-k})$ », **Proc. London Math. Soc. 27** (1928), p. 358–372.

[Luo99] W. Luo – « Values of symmetric square L-functions at 1 », **J. Reine Angew. Math. 506** (1999), p. 215–235.

[Luo01] ______ , « Nonvanishing of L-values and the Weyl law », **Ann. of Math. (2) 154** (2001), no. 2, p. 477–502.

[MR04] F. Martin et E. Royer – « Périodes et formes modulaires », Préimprimé disponible à http://www.math.univ-montp2.fr/~royer/art/cirm03/, 2004.

[MV99] H. L. Montgomery et R. C. Vaughan – « Extreme values of Dirichlet L-functions at 1 », Number theory in progress, Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997), de Gruyter, Berlin, 1999, p. 1039–1052.

[MW77] H. L. Montgomery et P. J. Weinberger – « Real quadratic fields with large class number », **Math. Ann. 225** (1977), no. 2, p. 173–176.

[Oes85] J. Oesterlé – « Nombres de classes des corps quadratiques imaginaires », **Astérisque** (1985), no. 121-122, p. 309–323, Seminar Bourbaki, Vol. 1983/84.

[Roy01] E. Royer – « Statistique de la variable aléatoire $L(\mathrm{sym}^2 f, 1)$ », **Math. Ann. 321** (2001), no. 3, p. 667–687.

[Roy03] ______ , « Interprétation combinatoire des moments négatifs des valeurs de fonctions L au bord de la bande critique », **Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 36** (2003), no. 4, p. 601–620.

[RW03] D. Ramakrishnan et S. Wang – « On the exceptional zeros of Rankin-Selberg L-functions », **Compositio Math. 135** (2003), no. 2, p. 211–244.

[RW04a] E. Royer et J. Wu – « Central Values and Values at the Edge of the Critical Strip of Symmetric Power L-functions and Hecke Eigenvalues », Préimprimé. Disponible à http://www.math.univ-montp2.fr/~royer/art/rw2, ≥ 2004.

[RW04b] ______ , « Taille des valeurs de fonctions L de carrés symétriques au bord de la bande critique », **Rev. Mat. Iberoamericana** (≥ 2004), à paraître. Dipsonible à http://www.math.univ-montp2.fr/~royer/art/rowu.

[Sam71] P. Samuel – **Théorie algébrique des nombres**, 2e éd., Hermann, Paris, 1971.