Formes quasi-modulaires

Formes modulaires presque holomorphes

Nancy, 18 septembre 2003

Emmanuel Royer

Plein écran

Quitter

— Formes modulaires sur $SL(2,\mathbb{Z})$ —

(Euler, Jakob Bernoulli, Gauss, Abel, Hermite, Klein, Poincaré)

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z), \begin{cases} \forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z}) \\ \forall z \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \Longrightarrow f \text{ est 1-périodique,}$$

on demande l'holomorphie et un développement de Fourier de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) e(nz) \quad \big(e(x) = \exp(2i\pi x)\big).$$

$\longrightarrow M_k$: espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des formes modulaires de poids k. Il est muni d'un produit scalaire $(\ ,\ )$.
Si $\widehat{f}(0) = 0$, forme parabolique $\longrightarrow S_k$.

— Exemple fondamentaux —

$$\Delta(z) = e(z) \prod_{n=1}^{+\infty} [1 - e(nz)]^{24}, \quad \Delta \in S_{12}.$$

$$(1) \qquad E_k(z) = -\frac{k!}{B_k} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^k} \quad (k \geq 4)$$

$$(2) \qquad = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n) e(nz)$$

où

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \qquad \sigma_{k-1}(n) = \sum_{\substack{d\in\mathbb{N}^* \\ d|n}} d^{k-1}.$$

$$E_k \in M_k$$

♠ la formule (2) définit E_2 mais l'absence de convergence absolue dans (1) empêche la modularité.

— Structure —

$$M_k = S_k \oplus \mathbb{C}E_k \qquad (k \geq 4).$$

$$M_k = 0 \text{ pour } k < 0 \text{ et } k = 2.$$

$$\dim M_k = 1 \text{ et } \dim S_k = 0 \text{ pour } k \in \{0, 4, 6, 8, 10\}.$$

$$\begin{array}{ccc} M_{k-12} & \xrightarrow{\sim} & S_k \\ f & \mapsto & f\Delta. \end{array}$$

$$\longrightarrow \qquad \dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12}\,; \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \qquad \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} M_k = \mathbb{C}[E_4, E_6]$$

Exemple : $\Delta = \dfrac{E_4^3 - E_6^2}{1728} \rightarrow$ coefficients de Fourier $\tau(n)$ de Δ.

— Remarque de structure —

L'expression

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_k = \mathbb{C}[E_4, E_6]$$

indique

– La somme est directe $\longrightarrow$ rigidité du poids (l'addition de deux formes modulaires de poids distincts a peu de sens) ;

– Les fonctions E_4 et E_6 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$. L'espace vectoriel des formes modulaires de poids k est isomorphe à l'espace vectoriel des polynômes de poids k, *i.e.* de la forme

$$\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2 \\ 4\alpha+6\beta=k}} c(\alpha,\beta) X^\alpha Y^\beta.$$

Si $f \in M_k$ et $g \in M_\ell$ alors $fg \in M_{k+\ell}$ donc

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_k \text{ est une algèbre graduée.}$$

Plein écran

Quitter

— Somme directe —

$$f_j \in M_{k_j}, \quad (j = 1, \dots, r), \quad k_j \text{ distincts}$$

$$\sum_{j=1}^{r} f_j = 0.$$

On fixe $z \in \mathcal{H}$, on applique la modularité :

$$\sum_{j=1}^{r} f_j\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{r} (cz+d)^{k_j} f_j(z) = 0.$$

Le polynôme $\sum_{j=1}^{r} f_j(z) X^j$ s'annule sur l'ensemble infini

$$\{cz+d : (c,d) \in \mathbb{Z}^2, \operatorname{pgdc}(c,d) = 1\}$$

donc $f_j(z) = 0$.

Plein écran

Quitter

— Indépendance algébrique —

Une base de M_k est

$$\left\{E_4^{\alpha}E_6^{\beta} : (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2, 4\alpha + 6\beta = k\right\}.$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ tel que $P(E_4,E_6) = 0$. Par regroupement de termes :

$$P(X,Y) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2 \\ 4\alpha+6\beta=k}} p_{\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta}$$

Chaque terme $\displaystyle\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2 \\ 4\alpha+6\beta=k}} p_{\alpha\beta} E_4^{\alpha} E_6^{\beta}$ est une forme modulaire de poids k. Par somme directe des M_k, chacun de ces termes est nul. Par indépendance linéaire, chaque coefficient $p_{\alpha\beta}$ est alors nul.

Plein écran
Quitter

— Dérivation des formes modulaires —

On note

$$D(f) = \frac{1}{2i\pi} f'$$

de sorte que $De = e$.

Par dérivation de la relation de modularité, on a

$$(3) \quad D(f)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{k+2} D(f)(z) + \frac{k}{2i\pi} c(cz+d)^{k+1} f(z).$$

Supposons, par l'absurde, que $D(f)$ est modulaire de poids ℓ. En comparant (3) et la condition de modularité de poids ℓ, on obtient

$$\left[(cz+d)^{\ell} - (cz+d)^{k+2}\right] D(f)(z) = \frac{k}{2i\pi} c(cz+d)^{k+1} f(z).$$

Ayant fixé $z \in \mathscr{H}$ et $c = 1$, on en déduit que le polynôme

$$(4) \qquad \left[(z+X)^{\ell} - (z+X)^{k+2}\right] Df(z) - \frac{k}{2i\pi}(z+X)^{k+1} f(z)$$

s'annulant sur l'ensemble infini des entiers est nul. Si $\ell = k+2$, cela implique $f = 0$. Si $\ell \neq k+2$, la considération du coefficient de $X^{\max(\ell,k+2)}$ implique $D(f)(z) = 0$ puis (après report dans le polynôme (4)) $f(z) = 0$.

Plein écran
Quitter

f modulaire $\Longrightarrow D(f)$ non modulaire.

— 1^{re} solution : crochets de Rankin-Cohen —

Au lieu de prendre les dérivées, on prend des combinaisons de dérivées.
Le produit de $f \in M_k$ et $g \in M_\ell$ est modulaire. Sa dérivée ne l'est donc pas, mais il est facile de modifier la dérivée du produit pour la rendre modulaire :

$$[f,g]_1 := kfD(g) - \ell D(f)g \in S_{k+\ell+2}.$$

Ce crochet est antisymétrique et satisfait l'identité de Jacobi :

$$\big[[f,g]_1,h\big]_1 + \big[[h,f]_1,g\big]_1 + \big[[g,h]_1,f\big]_1 = 0.$$

Ce crochet généralise le produit :

$$[f,g]_0 := fg \in M_{k+\ell}.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $f \in M_k$, si $g \in M_\ell$, on définit

$$[f,g]_n := \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{k+n-1}{n-r}\binom{\ell+n-1}{r} D^r(f) D^{n-r}(g) \in S_{k+\ell+2n}.$$

On en déduit des relations entre fonctions arithmétiques : puisque Δ et $[E_4, E_6]_1$ sont dans l'espace S_{12} de dimension 1, on a

$$4E_4 D(E_6) - 6E_6 D(E_4) = -3456\Delta$$

et donc

$$12\tau(n) = 5n\sigma_3(n) + 7n\sigma_5(n) - 840\sum_{m=1}^{n-1}(5m-2n)\sigma_3(m)\sigma_5(n-m).$$

De même, $[E_{12}, \Delta]_1$ et $\Delta E_4^2 E_6$ sont dans l'espace S_{26} de dimension 1, on a

$$D(\Delta)E_{12} - \Delta D(E_{12}) = \Delta E_4^2 E_6.$$

Plein écran

Quitter

— Digression : d’autres identités —

Les deux relations précédentes ont un point commun : certes elles sont des résultats dimension de 1 mais, elles sont des relations entre vecteurs propres des opérateurs de Hecke. Cela explique l’intérêt de ces relations puisque les coefficients de Fourier de tels vecteurs propres sont multiplicatifs. Existe-t’il d’autres relations de cette sorte ? Un résultat de Lanphier & Takloo-Bighash (juillet 2003) donne la réponse (généralisant Duke (1999) et Ghate (2002)). Si $j \in \{12, 16, 18, 20, 22, 26\}$, l’espace S_j est de dimension 1, on note Δ_j le vecteur propre normalisé.

Théorème. *Il n’existe qu’un nombre fini de triplets* (f, g, n) *avec* f *et* g *des formes modulaires vecteurs propres de Hecke normalisés, tels que* $[g, f]_n$ *est une forme modulaire vecteur propre de Hecke.*

Lanphier & Takloo-Bighash donnent la liste complète des triplets de solutions. Ils proviennent tous de relations entre formes d’espaces de dimension 1.

L'argument de Lanphier & Takloo-Bighash utilise les fonctions L de Rankin-Selberg puisque l'argument final est la

Proposition. *On suppose que* $k = h + \ell + 2n$, *avec* $h, \ell \geq 4$ *des entiers pairs et* $n \geq 0$. *Soit* $f \in S_k$ *et* $g \in M_\ell$. *On a*

$$(f, [g, E_h]_n) = -\frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}} \binom{h+n-1}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(m)\overline{\widehat{g}(m)}}{m^{k-1-n}}.$$

Cette proposition est utilisée *via* son

Corollaire. *On suppose que* $k = h + \ell + 2n$, *avec* $h, \ell \geq 4$ *des entiers pairs et* $n \geq 0$. *Soit* $f \in S_k$ *un vecteur propre normalisé des opérateurs de Hecke. Alors, il existe* $C \in \mathbb{C}^*$ *tel que*

$$\left(f, [E_h, E_\ell]_n\right) = CL(f, k-n-1)L(f, \ell+n).$$

Traitons un cas particulier : supposons que $[E_h, E_\ell]_n \in S_k$ est vecteur propre de Hecke ($\ell > h-1$). Les vecteurs propres de Hecke normalisés de S_k forment une base orthogonale, si $\dim S_k > 1$, il existe donc un autre vecteur propre de Hecke $f \in S_k$ tel que $(f, [E_h, E_\ell]_n) = 0$ ce qui est contredit par le corollaire.

— Remarque —

Les crochets de Rankin-Cohen permettent de travailler avec des dérivées de formes modulaires mais ne résolvent pas le problème de non stabilité de l'algèbre graduée $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_k$ par dérivation.

— 2$^{\text{e}}$ solution : formes quasi-modulaires (Rankin, Zagier) —

Soit $f \in M_k$, on rappelle que

$$\begin{aligned}(cz+d)^{-k-2} D(f)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= D(f)(z) + \frac{k}{2i\pi}\frac{c}{cz+d} f(z)\\ &= P_{f,z}\left(\frac{c}{cz+d}\right).\end{aligned}$$

avec

$$P_{f,z}(X) = D(f)(z) + \frac{k}{2i\pi} f(z) X.$$

La notion de formes quasi-modulaires généralise cette relation.

Soit k et s deux entiers positifs. On appelle forme quasi-modulaire de poids k et profondeur s une fonction holomorphe $f : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ telle que :
pour tout $z \in \mathscr{H}$, il existe un polynôme $P_{f,z}$ de degré s vérifiant, pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$, la relation

$$(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = P_{f,z}\left(\frac{c}{cz+d}\right).$$

on demande aussi une condition de croissance

$$f(z) \ll \left(\frac{y}{1+|z|^2}\right)^{-j}.$$

On note $M_k^{\leq s}$ l'espace des formes de profondeur inférieure ou égale à s.
Exemple : si $f \in M_k$ alors $D(f) \in M_k^{\leq 1}$.
Remarque : on peut montrer l'unicité du poids et de la profondeur.

— Exemple fondamental —

On définit

$$E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) e(nz).$$

On montre que

$$(cz+d)^{-2} E_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = P_{E_2,z}\left(\frac{c}{cz+d}\right)$$

avec

$$P_{E_2,z}(X) = E_2(z) + \frac{6}{i\pi} X.$$

Ainsi, E_2 est quasi-modulaire de poids 2 et de profondeur 1.

♠ Il n'existe pas de forme modulaire de poids 2.

Plein écran

Quitter

— Propriétés —

Si $f \in M_k^{\leq s}$ est de profondeur s, on écrit

$$P_{f,z} = \sum_{n=0}^{s} f_n(z) X^n.$$

Ainsi, pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$, la relation de quasi-modularité est

$$(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \sum_{n=0}^{s} f_n(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^n.$$

En appliquant la relation de quasi-modularité à la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ on obtient $f_0 = f$ puis le choix de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ implique que f est 1-périodique.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

— Stabilité par dérivation —

Par un calcul élémentaire, on prouve la stabilité de l'ensemble de toutes les formes quasi-modulaires.

Lemme. *L'application linéaire* D *est une application de* $M_k^{\leq s}$ *dans* $M_{k+2}^{\leq s+1}$*. Lorsque* $k > 0$*, cette application est injective. Plus précisément, soit* $f \in M_k^{\leq s}$*, si pour toute matrice* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ *on a*

$$(cz+d)^{-k-2} D(f)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \sum_{i=0}^{s+1} g_i(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^i$$

alors

$$g_0 = D(f_0),$$

$$g_n = D(f_n) + \frac{k-n+1}{2i\pi} f_{n-1} \quad si\ 1 \leq n \leq s,$$

et

$$g_{s+1} = \frac{k-s}{2i\pi} f_s.$$

La dérivation augmente le poids de 2 et augmente la profondeur de 1.

L'ensemble $M_k^{\leq s}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} M_k^{\leq s}$ (formes quasi-modulaires dont on oublie la profondeur).

Les espaces $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} M_k^{\leq s}$ sont en sommes directes.

Le produit d'une forme de $M_{k_1}^{\leq s_1}$ et d'une forme de $M_{k_2}^{\leq s_2}$ est une forme de $M_{k_1+k_2}^{\leq s_1+s_2}$:

$$M_{k_1}^{\leq s_1} \cdot M_{k_2}^{\leq s_2} \subset M_{k_1+k_2}^{\leq s_1+s_2}.$$

L'espace

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in\mathbb{N}} M_k^{\leq s}$$

a une structure d'algèbre graduée.

— Somme directe (1) —

Soit $f_1, \ldots, f_r$ des formes quasi-modulaires non identiquement nulles de poids distincts $k_1 < \cdots < k_r$. On note s la plus grande profondeur de ces formes et, pour chaque forme, son polynôme associé est

$$P_{f_i,z}(X) = \sum_{j=0}^{s} f_{ij}(z) X^j.$$

Plein écran

Quitter

Université Montpellier II — Sciences et Techniques du Languedoc

Université Paul Valéry — Arts - Lettres - Langues — Sciences humaines & sociales

CNRS

— Somme directe (2) —

On suppose par l'absurde que $\sum_{i=1}^{r} f_i = 0$. En évaluant cette égalité en $\dfrac{az+b}{cz+d}$ et après multiplication par $(cz+d)^s$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{s} f_{ij}(z)c^j(cz+d)^{k_i+s-j} = 0$$

pour tout $z \in \mathscr{H}$ et tout couple (c,d) d'entiers premiers entre eux. On fixe z et $c = 1$, le polynôme

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{s} f_{ij}(z)(z+X)^{k_i+s-j}$$

s'annule une infinité de fois (en toutes les valeurs entières) et est donc nul. Le coefficient dominant (associé au degré $k_r + s$) est $f_{r0}(z)$ donc $f_{r0}(z) = 0$. On a $f_{r0} = f_r$ donc $f_r = 0$.

— Structure —

On sait décrire la structure des formes quasi-modulaire à l'aide de celle des formes modulaires grâce au

Lemme. *Soit $f \in M_k^{\leq s}$. Alors, pour tout entier naturel $i \leq s$, on a*

$$f_i \in M_{k-2i}^{\leq s-i}.$$

En particulier,

$$f_s \in M_{k-2s}.$$

On rappelle que M_{k-2s} est réduit à zéro si $k-2s<0$ ou si $k-2s$ est impair, on a donc une relation entre le poids et la profondeur :

Corollaire. *Soit f une forme quasi–modulaire de poids k et profondeur s. Alors, k est pair et $k \geq 2s$.*

— Preuve du lemme de structure —

Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, on définit des actions en posant

$$(f \underset{k}{|} \gamma)(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

et

$$\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, MN = \begin{pmatrix} * & * \\ q & r \end{pmatrix}$$

des matrices de $SL(2,\mathbb{Z})$.

On a

$$(5)\quad (f\underset{k}{|}MN)(z) = (\gamma z+\delta)^{-k}(f\underset{k}{|}M)(Nz) = (\gamma z+\delta)^{-k}\sum_{n=0}^{s} f_n(Nz)\left(\frac{c}{cNz+d}\right)^n.$$

En utilisant

$$(6)\quad \frac{c}{cNz+d} = (\gamma z+\delta)^2\left(\frac{q}{qz+r}-\frac{\gamma}{\gamma z+\delta}\right)$$

on obtient

$$(7)\quad (f\underset{k}{|}MN)(z) = \sum_{m=0}^{s}\left[\sum_{n=m}^{s}\binom{n}{m}(-\gamma)^{n-m}(\gamma z+\delta)^{n+m-k}f_n(Nz)\right]\left(\frac{q}{qz+r}\right)^m.$$

Plein écran

Quitter

Or,

$$(8) \qquad (f \underset{k}{|} MN)(z) = \sum_{m=0}^{s} f_m(z) \left(\frac{q}{qz+r} \right)^m .$$

La comparaison de (8) et (7) implique, pour tous γ et δ premiers entre eux

$$(9) \qquad f_m(z) = \sum_{n=m}^{s} \binom{n}{m} (-\gamma)^{n-m} (\gamma z+\delta)^{n+m-k} f_n(Nz)$$

En particulier,

$$f_s(z) = (\gamma z+\delta)^{2s-k} f_s(Nz)$$

et f_s est modulaire de poids $k-2s$.

On fait alors l'hypothèse de récurrence : si $f \in M_k^{\leq s-1}$ alors, pour tout $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$, on a

$$(f \underset{k}{|} \gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s-1} f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j, \quad \text{avec } f_j \in M_{k-2j}^{\leq s-1-j} \text{ pour tout } j.$$

Plein écran

Quitter

Soit $f \in M_k^{\leq s}$ et $g = f - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s E_2^s$. On sait déjà que $f_s \in M_{k-2s}$ de sorte que $g \in M_k^{\leq s-1}$. On a donc

$$(g \underset{k}{|} \gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s-1} g_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j, \quad \text{avec } g_j \in M_{k-2j}^{\leq s-1-j} \text{ pour tout } j.$$

Or,

$$\begin{aligned}(f \underset{k}{|} \gamma)(z) &= \sum_{j=0}^{s-1} g_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j + \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s(z) \left[E_2(z) + \frac{6}{i\pi}\frac{c}{cz+d}\right]^s \\ &= \sum_{j=0}^{s-1} \left[g_j(z) + \left(\frac{i\pi}{6}\right)^{s-j} \binom{s}{j} f_s(z) E_2(z)^{s-j}\right] \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \\ &\quad + f_s(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^s.\end{aligned}$$

On termine en remarquant que

$$g_j + \left(\frac{i\pi}{6}\right)^{s-j} \binom{s}{j} f_s E_2^{s-j} \in M_{k-2j}^{\leq s-j}.$$

Plein écran

Quitter

Le lemme de structure précédent décrit les relations de quasi-modularité plus que les formes quasi-modulaires elles-mêmes.

— Structure (2) —

On a décrit la structure des formes quasi-modulaires à l'aide des fonctions modulaires. On utilise maintenant la fonction E_2.

Corollaire. *Soit $f \in M_k^{\leq s}$. Alors*

$$f = \sum_{i=0}^{s} F_i E_2^i \quad \textit{avec} \quad F_i \in M_{k-2i} \textit{ pour tout } i \in \{0, \ldots, s\}.$$

Autrement dit,

$$M_k^{\leq s} = \bigoplus_{i=0}^{s} M_{k-2i} E_2^i.$$

Démonstration. Soit $f \in M_k^{\leq s}$. On pose

$$g = f - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s E_2^s.$$

D'après le lemme de structure, $f_s \in M_{k-2s}$ et $g \in M_k^{\leq s-1}$. Le résultat énoncé s'obtient alors par récurrence, l'initialisation résultant de $M_k^{\leq 0} = M_k$. $\square$

— Remarque —

Plutôt que les puissances de E_2, on peut utiliser ses dérivées.

Lemme. *Soit $k > 0$. Soit $f \in M_k^{\leq s}$. Alors*

$$f = F_{-1} + \sum_{i=0}^{s-1} F_i D^i(E_2)$$

avec

$$F_i \in M_{k-2i-2} \qquad \text{pour tout } i \in \{-1, \ldots, s-1\}.$$

Autrement dit,

$$M_k^{\leq s} = M_k \oplus \bigoplus_{i=0}^{s-1} M_{k-2i-2} D^i(E_2).$$

— Structure (3) —

Compte-tenu de l'égalité

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_k = \mathbb{C}[E_4, E_6],$$

le lemme précédent conduit à la description naturelle suivante des formes quasi-modulaires :

Proposition. *On a l'égalité*

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in\mathbb{N}} M_k^{\leq s} = \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6].$$

Les fonctions E_2, E_4, E_6 sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$ de sorte qu'il y a un isomorphisme entre les formes quasi-modulaires et l'espace $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ des polynômes en trois variables *via*

$$E_2 \mapsto X, \quad E_4 \mapsto Y, \quad E_6 \mapsto Z.$$

— Indépendance algébrique (1) —

Soit $P \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ tel que $P[E_2,E_4,E_6]=0$. Par regroupement des termes de P, on peut écrire

$$P=\sum_{k=1}^{K}\sum_{\substack{(\alpha,\beta,i)\in\mathbb{N}^3\\4\alpha+6\beta+2i=k}} p_{\alpha\beta i}X^iY^\alpha Z^\beta.$$

Par indépendance linéaire, pour tout k on a l'égalité

$$\sum_{\substack{(\alpha,\beta,i)\in\mathbb{N}^3\\4\alpha+6\beta+2i=k}} p_{\alpha\beta i}E_2^iE_4^\alpha E_6^\beta=0.$$

S'il existe un entier $i_0\neq 0$ tel que $p_{\alpha\beta i_0}\neq 0$ pour au moins un couple (α,β) convenable, alors le terme de gauche est une forme quasi-modulaire de poids k et de profondeur au moins i_0. Mais par unicité de la profondeur, le terme de gauche est de profondeur 0, autrement dit, $p_{\alpha\beta i}=0$ lorsque i est non nul et

$$\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2\\4\alpha+6\beta=k}} p_{\alpha\beta 0}E_4^\alpha E_6^\beta=0.$$

— Indépendance algébrique (2) —

Puisque

$$\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2\\ 4\alpha+6\beta=k}} p_{\alpha\beta 0} E_4^{\alpha} E_6^{\beta} = 0,$$

par indépendance algébrique sur $\mathbb{C}$ de E_4 et E_6, on a finalement la nullité de chacun des coefficients $p_{\alpha\beta 0}$ et enfin de P.

— Applications —

On a

$$D(E_2) \in M_4^{\leq 2}$$

et

$$M_4^{\leq 2} = M_4 + M_2 E_2 + M_0 E_2^2.$$

Or,

$$M_4 = \mathbb{C}E_4, \quad M_2 = \{0\} \quad \text{et} \quad M_0 = \mathbb{C}$$

donc il existe des complexes α et β tels que

$$D(E_2) = \alpha E_4 + \beta E_2^2.$$

Par comparaison des développements de Fourier, on a

$$-24q + O(q) = \alpha\left[1 + 240q + O(q)\right] + \beta\left[1 - 48q + O(q)\right].$$

Ainsi,

$$D(E_2) = \frac{1}{12}\left(E_2^2 - E_4\right).$$

$$\longrightarrow 5\sigma_3(n) = (6n-1)\sigma_1(n) + 12\sum_{m=1}^{n-1} \sigma_1(m)\sigma_1(n-m).$$

De même,

$$D(E_4) \in M_6^{\leq 1},$$

et

$$M_6^{\leq 1} = M_6 + M_4 E_2 = \mathbb{C} E_6 + \mathbb{C} E_4 E_2 .$$

Les premiers coefficients de Fourier conduisent à

$$D(E_4) = \frac{1}{3} \left(E_4 E_2 - E_6 \right) .$$

Plein écran

Quitter

Enfin,

$$D(E_6) \in M_8^{\leq 1}$$

et

$$M_8^{\leq 1} = M_8 + M_6 E_2 = \mathbb{C} E_4^2 + \mathbb{C} E_6 E_2$$

donne

$$D(E_6) = \frac{1}{2}\left(E_6 E_2 - E_4^2\right).$$

De

$$
\begin{aligned}
D(E_2) &= \frac{1}{12}\left(E_2^2 - E_4\right)\\
D(E_4) &= \frac{1}{3}\left(E_4E_2 - E_6\right)\\
D(E_6) &= \frac{1}{2}\left(E_6E_2 - E_4^2\right)
\end{aligned}
$$

on déduit que

$$
\begin{aligned}
D^2(E_2) &= \frac{1}{72}E_2^3 - \frac{1}{24}E_2E_4 + \frac{1}{36}E_6\\
D^3(E_2) &= \frac{1}{288}E_2^4 - \frac{1}{96}E_4^2 - \frac{1}{48}E_2^2E_4 + \frac{1}{36}E_2E_6
\end{aligned}
$$

puis que E_2 est solution de l'équation de Chazy

$$
D^3(E_2) = E_2D^2(E_2) - \frac{3}{2}\left[D(E_2)\right]^2.
$$

Plein écran

Quitter

Un autre corollaire de cette théorie est le

Lemme. *Soit f une forme modulaire. Alors f est solution d'une équation différentielle (non nécessairement linéaire) d'ordre* 3.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\{f, Df, D^2 f, D^3 f\}$ est algébriquement indépendante. Alors, on a un isomorphisme entre $\mathbb{C}[f, Df, D^2 f, D^3 f]$ et $\mathbb{C}[X, Y, Z, T]$. Mais l'inclusion de $\mathbb{C}[f, Df, D^2 f, D^3 f]$ dans $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ contredit alors l'isomorphisme entre $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ et $\mathbb{C}[X, Y, Z]$. $\square$

— Un autre opérateur différentiel —

Soit f une forme modulaire de poids k. On a

$$Df = F_0 + F_1 E_2$$

avec F_0 modulaire de poids $k+2$ et F_1 modulaire de poids k. On en déduit, pour toute matrice $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ et tout $z \in \mathcal{H}$ que

$$(10) \qquad (Df \underset{k+2}{|} \gamma)(z) = F_0(z) + F_1(z)E_2(z) + \frac{6}{i\pi} F_1(z) \frac{c}{cz+d}.$$

D'autre part, on a vu dans le lemme de stabilité par dérivation que

$$(11) \qquad (Df \underset{k+2}{|} \gamma)(z) = Df(z) + \frac{k}{2i\pi} f(z) \frac{c}{cz+d}.$$

Plein écran

Quitter

La comparaison des équations (10) et (11), donne l'équation

$$F_0(z) + F_1(z)E_2(z) + \frac{6}{i\pi}F_1(z)\frac{c}{cz+d} = Df(z) + \frac{k}{2i\pi}f(z)\frac{c}{cz+d}$$

valable pour tout $z \in \mathscr{H}$ et tout couple (c, d) d'entiers premiers entre eux. On en déduit

$$F_0 = Df - \frac{k}{12}fE_2 \quad \text{et} \quad F_1 = \frac{k}{12}f.$$

En particulier, cela montre que l'application ϑ_k définie par

$$\vartheta_k(f) = Df - \frac{k}{12}fE_2$$

est une application de M_k dans M_{k+2}. Les calculs des dérivées de E_4 et E_6 impliquent

$$\vartheta_4(E_4) = -\frac{1}{3}E_6 \quad \text{et} \quad \vartheta_6(E_6) = -\frac{1}{2}E_4^2.$$

— Applications hors théorie des nombres —

L'espace des formes quasi-modulaires apparaît dans des contextes assez variés : par exemple, des travaux de Dijkgraaf et Kaneko-Zagier ont montré qu'il intervient dans le cadre de la théorie de la symétrie miroir en dimension 1. Les formes quasi-modulaires interviennent également en physique des hautes énergies et matières condensées.

W. Lerche, S. Stieberger & N.P. Warner – « *Quartic Gauge Couplings from K3 Geometry* ». hep-th/ 9811228.

C.P. Burgess & C.A. Lütken – « *On the Implication of Discrete Symmetries for the β-function of Quantum Hall Systems* ». cond-mat/ 9812396.

— Formes modulaires presque holomorphes —

L'espace des formes quasi-modulaires est une extension possible des formes modulaires obtenue en transformant la condition de modularité. Cette extension est adaptée à la dérivation habituelle D. On peut aussi généraliser la définition des formes modulaires en changeant la condition d'holomorphie. On étudie cette deuxième extension adaptée à une autre dérivation et on établit un diagramme commutatif reliant les deux extensions et les deux dérivations.

Soit k et s deux entiers positifs. On appelle **forme modulaire presque holomorphe** de poids k et de profondeur égale à s toute fonction $F\colon \mathscr{H} \to \mathbb{C}$, vérifiant

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k F(z)$$

pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$, telle qu'il existe $s+1$ fonctions holomorphes sur $\mathscr{H}$, $f_0, \ldots, f_s$, avec f_s non constamment nulle et

$$F(z) = \sum_{n=0}^{s} \frac{f_n(z)}{y^n},$$

où $z = x + iy$. On demande aussi une condition de croissance
On note $\mathscr{M}_k^{\leq s}$ l'espace des formes modulaires presque holomorphes de poids k et de profondeur inférieure ou égale à s.

$$\mathscr{M}_k^{\leq 0} = M_k.$$

— Exemple fondamental —

On considère la fonction

$$\begin{aligned} E_2^*(z) &= E_2(z) - \frac{3}{\pi y} \\ &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) e(nz) - \frac{3}{\pi y} \end{aligned}$$

est une forme modulaire presque holomorphe de poids 2 et de profondeur 1.

— Lien avec les formes quasi-modulaires (1) —

Les coefficients des formes modulaires presque holomorphes sont des formes quasi-modulaires.

Si $F \in \mathscr{M}_k^{\leq s}$ s'écrit

$$F(z) = \sum_{n=0}^{s} \frac{f_n(z)}{y^n},$$

on a

$$f_n \in M_k^{\leq s-n}$$

pour tout $n \in [0, s]$.

En particulier, f_0 est une forme quasi-modulaire de même poids et même profondeur que la forme modulaire presque holomorphe F.

— Lien avec les formes quasi-modulaires (2) —

Il existe un isomorphisme Υ entre l'espace $M_k^{\leq s}$ des formes quasi-modulaires et l'espace $\mathcal{M}_k^{\leq s}$ des formes modulaires presque holomorphes.

Si $F \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$ s'écrit

$$F(z) = \sum_{n=0}^{s} \frac{f_n(z)}{y^n},$$

on a

$$\Upsilon(F) = f_0.$$

Plein écran

Quitter

Plein écran

Quitter

— Lien avec les formes quasi-modulaires (3) —

Si $f \in M_k^{\leq s}$ est une forme quasi-modulaire de poids k et profondeur s, on lui a associé un polynôme $P_{f,z}$ tel que

$$(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = P_{f,z}\left(\frac{c}{cz+d}\right).$$

L'image inverse de l'isomorphisme $\Upsilon : \mathscr{M}_k^{\leq s} \to M_k^{\leq s}$ est donné par

$$\Upsilon^{-1}(f)(z) = P_{f,z}\left(\frac{1}{2iy}\right).$$

Exemple.

$$E_2^* = \Upsilon(E_2).$$

— Structure —

L'existence de l'isomorphisme Υ et le lemme de structure

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in\mathbb{N}} M_k^{\leq s} = \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6].$$

implique

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_k^{\leq s} = \mathbb{C}[E_2^*, E_4, E_6].$$

— Dérivation —

Sur l'espace $\mathscr{M}_k^{\leq s}$ des formes presque holomorphes de poids k et profondeur au plus s, on définit une dérivation en posant

$$\delta(F)(z) = D(F)(z) - \frac{k}{4\pi y} F(z).$$

Cet opérateur envoie $\mathscr{M}_k^{\leq s}$ dans $\mathscr{M}_{k+2}^{\leq s+1}$.

De même que pour la dérivation D sur les formes quasi-modulaires, la dérivation δ augmente le poids de 2 et augmente la profondeur de 1.

— Bon comportement des dérivations —

On rappelle qu'on a définit un isomorphisme $\Upsilon\colon \mathscr{M}_k^{\leq s} \to M_k^{\leq s}$, des dérivations $D\colon M_k^{\leq s} \to M_{k+2}^{\leq s+1}$ et $\delta\colon \mathscr{M}_k^{\leq s} \to \mathscr{M}_{k+2}^{\leq s+1}$.

On a une relation de commutation :

$$\Upsilon \circ \delta = D \circ \Upsilon.$$

— Références —

Cours de D. Zagier au *Collège de France*, 2001–2002 et 2002–2003.

F. Martin & E. Royer – « Formes modulaires pour la transcendance ». Cours au colloque « formes modulaires et transcendance» CIRM printemps 2003. À paraître. Bientôt disponible à http://www.carva.org/emmanuel.royer.

Plein écran

Quitter