Nombres premiers, on ne sait pas tout !

Tenerife – 2021

Emmanuel Royer

CNRS

2 novembre 2021

Une lettre de Euler à Bernoulli en 1774

Le nombre entier

$$2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$$

est premier.

CALCUL.

EXTRAIT D'UNE LETTRE
de M. Euler le Pere à M. Bernoulli, concernant le Mémoire imprimé parmi ceux de 1771. p. 318.

Le plus grand nombre premier que nous connoiſſions eſt ſans doute $2^{31} - 1 = 2147483647$, que Fermat a déjà aſſuré être premier, & moi je l'ai auſſi prouvé; car puiſque cette formule ne ſauroit admettre d'autres diviſeurs que de l'une & ou de l'autre de ces 2 formes $248n + 1$ & $248n + 63$, j'ai examiné tous les nombres premiers contenus dans ces deux formules juſqu'à 46339, dont aucun ne s'eſt trouvé diviſeur.

Une conférence de Cole en 1903

« Lors de la réunion d'octobre 1903 à New York de l'*American Mathematical Society*, Cole avait un exposé au programme avec le titre modeste *On the factorization of large numbers*. Lorsque le président lui a demandé de présenter sa communication, Cole – qui a toujours été un homme de peu de mots – s'est dirigé vers le tableau et, sans rien dire, a commencé à tracer à la craie les calculs pour élever 2 à la puissance soixante-sept. Puis il soustrait soigneusement 1. Sans un mot, il se dirigea vers un espace libre sur le tableau et multiplia, à la main, $193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287$. Les deux calculs concordent... Pour la première et unique fois dans les annales, le public de l'*American Mathematical Society* a vigoureusement applaudi l'auteur d'un article présenté devant lui. Cole a pris place sans avoir prononcé un mot. Personne ne lui a posé de question. »

Une conférence de Cole en 1903

Le nombre entier

$$2^{67}-1 = 193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287$$

n'est pas premier.

ON THE FACTORING OF LARGE NUMBERS.

BY PROFESSOR F. N. COLE.

(Read before the American Mathematical Society, October 31, 1903.)

Une conférence de Cole en 1903

Le nombre entier

$$2^{67}-1 = 193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287$$

n'est pas premier.

ON THE FACTORING OF LARGE NUMBERS.

BY PROFESSOR F. N. COLE.

(Read before the American Mathematical Society, October 31, 1903.)

L'histoire de l'exposé de Cole, racontée par Bell est probablement enjolivée...

Le plus grand nombre premier connu en 2021

En décembre 2018, l'ordinateur de Patrick Laroche, un volontaire du programme *GIMPS: Great Internet Mersenne Prime* a trouvé que

$$2^{82\,589\,933} - 1$$

est un nombre premier.

Le plus grand nombre premier connu en 2021

En décembre 2018, l'ordinateur de Patrick Laroche, un volontaire du programme *GIMPS: Great Internet Mersenne Prime* a trouvé que

$$2^{82\,589\,933} - 1$$

est un nombre premier. Pour écrire ce nombre en base 10, il faudrait 24 862 048 chiffres. Le 30 octobre 2021, c'est encore le plus grand nombre premier connu.

GIMPS Discovers
Largest Known Prime Number: $2^{82,589,933}$-1

BLOWING ROCK, NC, December 21, 2018 -- The Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) has discovered the largest known prime number, $2^{82,589,933}$-1, having 24,862,048 digits. A computer volunteered by Patrick Laroche made the find on December 7, 2018. Patrick is one of thousands of volunteers using free GIMPS software available at www.mersenne.org/download/.

Une formule

Formule de Minàc et Willan

Le n^{e} nombre premier est donné par

$$1 + \sum_{m=2}^{M(n)} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1 + \sum_{j=2}^{m} \left\lfloor \frac{1+(j-1)!}{j} - \left\lfloor \frac{(j-1)!}{j} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor^{1/n} \right\rfloor.$$

où $M(n)$ vaut 7 si $n \leqslant 4$ et $n\,(\log(n) + \log\log(n))$ sinon.

Une formule

Formule de Minàc et Willan

Le n^{e} nombre premier est donné par

$$1 + \sum_{m=2}^{M(n)} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1 + \sum_{j=2}^{m} \left\lfloor \frac{1+(j-1)!}{j} - \left\lfloor \frac{(j-1)!}{j} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor^{1/n} \right\rfloor.$$

où $M(n)$ vaut 7 si $n \leqslant 4$ et $n\,(\log(n) + \log\log(n))$ sinon. Cette formule vous est largement incompréhensible, mais, on s'en moque parce qu'elle nécessite beaucoup trop de calculs pour être efficace. Mieux vaut utiliser le crible d'Eratosthène.

Une formule

Formule de Minàc et Willan

Eratos.gp

```
M(n)=max(7,floor(n*(log(n)+log(log(n)))));
Crible(n)={
        Premiers=vector(n,i,1);
        for(p=2,sqrt(n),
                if(Premiers[p],
                        k=2;
                        while(k*p<=n,
                                Premiers[k*p]=0;
                                k+=1
                        )

                )
        );
        return([i | i <- [1..n], Premiers[i]]);
};
Premier(n)={
        C=Crible(M(n)+1);
        return(C[n+1]);
}
```

```
? \r Eratos.gp
? Premier(200)
cpu time = 5 ms, real time = 5 ms.
%4 = 1223
```

minac.gp — Modifié

```
P(n)=1+sum(m=1,max(7,n*(log(n)
+log(log(n)))),floor(floor(n/
(1+sum(j=2,m,floor((1+(j-1)!)/j-floor((j-1)!/
j)))))^(1/n)));
```

```
? P(200)
cpu time = 9,778 ms, real time = 9,778 ms.
%6 = 1223
```

Eratosthène (276 avant notre ère – 194 avant notre ère)

Activité

À vous !

Fiche d'activités, activité n^{o} 1.

L'infini ?

- Donnez moi une liste de nombres

L'infini ?

- Donnez moi une liste de nombres
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre plus grand que le plus grand de votre liste ?

L'infini ?

- Donnez moi une liste de nombres
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre plus grand que le plus grand de votre liste ?

OUI

L'infini ?

- Donnez moi une liste de nombres
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre plus grand que le plus grand de votre liste ?

OUI

Il suffit de trouver le plus grand des nombres que vous m'avez donnés

L'infini ?

- Donnez moi une liste de nombres
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre plus grand que le plus grand de votre liste ?

OUI

Il suffit de trouver le plus grand des nombres que vous m'avez donnés et de l'augmenter de 1.

Une infinité...

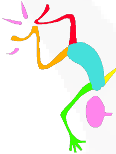
- Donnez moi une liste de nombres premiers,

Une infinité...

- Donnez moi une liste de nombres premiers,
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre premier plus grand que le plus grand de votre liste ?

Une infinité...

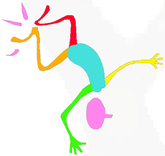
- Donnez moi une liste de nombres premiers,
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre premier plus grand que le plus grand de votre liste ?



OUI

Une infinité...

- Donnez moi une liste de nombres premiers,
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre premier plus grand que le plus grand de votre liste ?

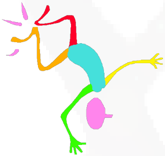


OUI

On dit qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Une infinité...

- Donnez moi une liste de nombres premiers,
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre premier plus grand que le plus grand de votre liste ?

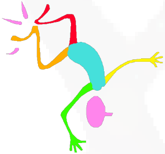


OUI

On dit qu'il y a une infinité de nombres premiers.
Si vous choisissez une liste trop longue, il me sera malgré tout très difficile de construire un tel nombre premier.

Une infinité...

- Donnez moi une liste de nombres premiers,
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre premier plus grand que le plus grand de votre liste ?

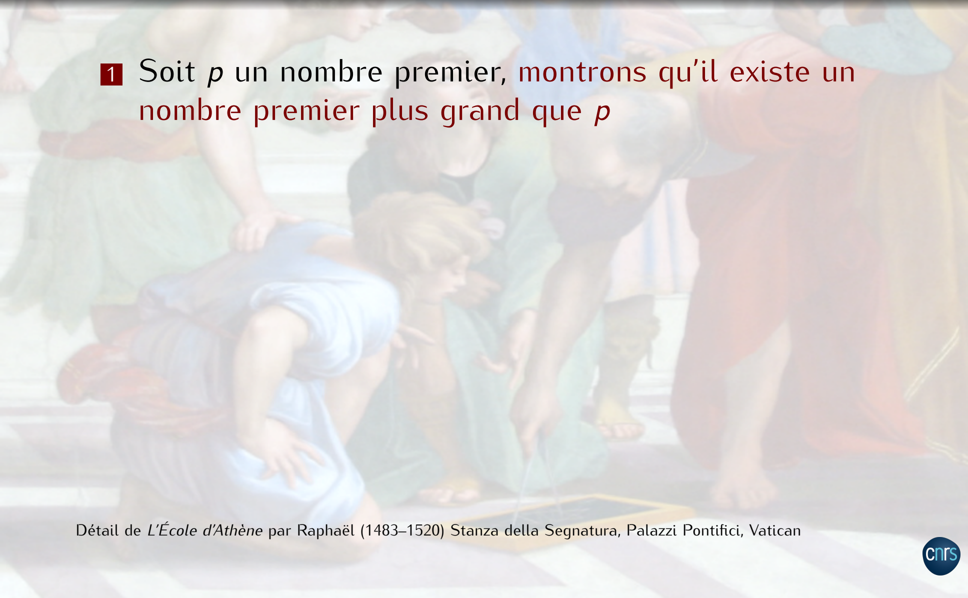
 OUI

On dit qu'il y a une infinité de nombres premiers.
Si vous choisissez une liste trop longue, il me sera malgré tout très difficile de construire un tel nombre premier.
Ça n'empêche pas de savoir qu'il en existe un.

Une infinité de nombres premiers

La preuve d'Euclide (−325 −265)

1. Soit p un nombre premier, montrons qu'il existe un nombre premier plus grand que p

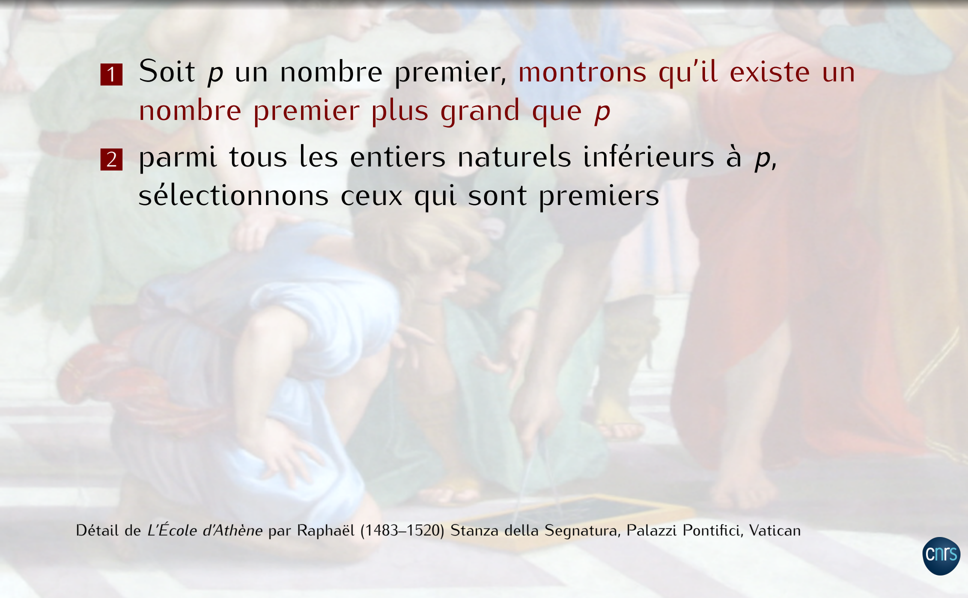


Détail de *L'École d'Athène* par Raphaël (1483–1520) Stanza della Segnatura, Palazzi Pontifici, Vatican

Une infinité de nombres premiers

La preuve d'Euclide (−325 −265)

1. Soit p un nombre premier, montrons qu'il existe un nombre premier plus grand que p
2. parmi tous les entiers naturels inférieurs à p, sélectionnons ceux qui sont premiers

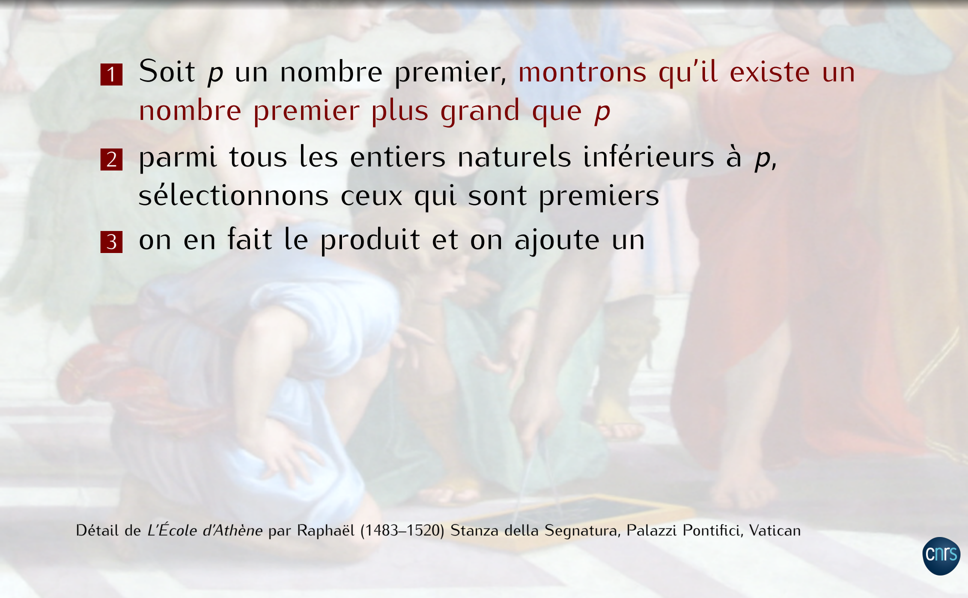


Détail de *L'École d'Athène* par Raphaël (1483–1520) Stanza della Segnatura, Palazzi Pontifici, Vatican

Une infinité de nombres premiers

La preuve d'Euclide (−325 −265)

1. Soit p un nombre premier, montrons qu'il existe un nombre premier plus grand que p
2. parmi tous les entiers naturels inférieurs à p, sélectionnons ceux qui sont premiers
3. on en fait le produit et on ajoute un



Détail de *L'École d'Athène* par Raphaël (1483–1520) Stanza della Segnatura, Palazzi Pontifici, Vatican

Une infinité de nombres premiers

La preuve d'Euclide (−325 −265)

1. Soit p un nombre premier, montrons qu'il existe un nombre premier plus grand que p
2. parmi tous les entiers naturels inférieurs à p, sélectionnons ceux qui sont premiers
3. on en fait le produit et on ajoute un
   - soit le nombre obtenu est premier : on obtient un nombre premier strictement supérieur à p

Détail de *L'École d'Athène* par Raphaël (1483–1520) Stanza della Segnatura, Palazzi Pontifici, Vatican

Une infinité de nombres premiers

La preuve d'Euclide (−325 −265)

1. Soit p un nombre premier, montrons qu'il existe un nombre premier plus grand que p
2. parmi tous les entiers naturels inférieurs à p, sélectionnons ceux qui sont premiers
3. on en fait le produit et on ajoute un
   - soit le nombre obtenu est premier : on obtient un nombre premier strictement supérieur à p
   - soit le nombre premier obtenu n'est pas premier, il est alors divisible par un nombre premier qui ne peut pas être inférieur à p : on obtient un nombre premier strictement supérieur à p.

Détail de *L'École d'Athène* par Raphaël (1483–1520) Stanza della Segnatura, Palazzi Pontifici, Vatican

Des infinités supposées

Les nombres premiers jumeaux

Que dire des couples de nombres

$(3,5)\quad(5,7)\quad(11,13)\quad(17,19)\quad(29,31)\quad(41,43)\quad(59,61)$?

Que dire des couples de nombres

$(3,5) \quad (5,7) \quad (11,13) \quad (17,19) \quad (29,31) \quad (41,43) \quad (59,61)$?

Ils sont constitués de nombres premiers dont la différence est 2. Ils forment des couples de nombres premiers jumeaux.

Nous avons vu que $2^{31}-1$ et $2^{82\,589\,933}-1$ sont des nombres premiers. On a aussi vu que $2^{67}-1$ n'est pas un nombre premier.

Nous avons vu que $2^{31}-1$ et $2^{82\,589\,933}-1$ sont des nombres premiers. On a aussi vu que $2^{67}-1$ n'est pas un nombre premier. Les nombres de la forme 2^n-1 qui sont premiers sont appelés nombres premiers de Mersenne.

Nous avons vu que $2^{31}-1$ et $2^{82\,589\,933}-1$ sont des nombres premiers. On a aussi vu que $2^{67}-1$ n'est pas un nombre premier. Les nombres de la forme 2^n-1 qui sont premiers sont appelés nombres premiers de Mersenne.

Marin Mersenne (1588-1648)

Pour que 2^n-1 soit premiers, il est nécéssaire que n soit premier :

$$2^{ab}-1 = (2^b-1)\left(1+2^b+\ldots+2^{(a-1)b}\right).$$

Que vous inspire le tableau suivant ?

5	7	11	23	47	59	83	107	167	179	227
2	3	5	11	23	29	41	53	83	89	113

Que vous inspire le tableau suivant ?

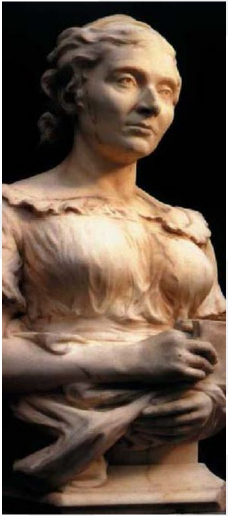
5	7	11	23	47	59	83	107	167	179	227
2	3	5	11	23	29	41	53	83	89	113

Les nombres de la seconde ligne sont premiers, lorsqu'on les multiplie par 2 et ajoute 1, on obtient la première ligne dont les nombres sont aussi premiers. Les nombres premiers p tels que $2p + 1$ est premiers sont les nombres premiers de Germain.

« Comment vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voïant se métamorphoser mon correspondant estimé M. Leblanc en cette illustre personnage, qui donne un exemple aussi brillant de ce que j'aurois peine de croire. Lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos mœurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches epineuses, sait neansmoins franchir ces entraves et penétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talens tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. » (Gauss)

Des infinités supposées

Les nombres premiers de Germain



Sophie Germain (1776–1831)

On ne sait toujours pas s'il existe une infinité de nombres premiers

1. jumeaux
2. de Mersenne
3. de Germain.

Activité

À vous !

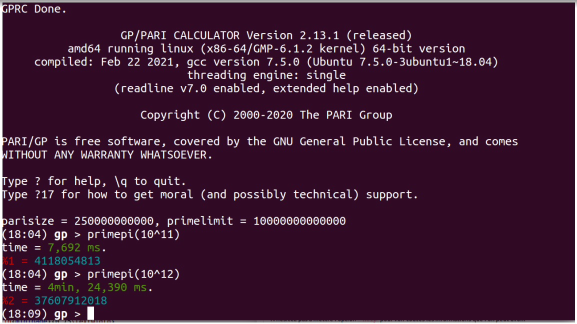
Si $x \geqslant 2$ est réel, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à x. Par exemple, $\pi(10) = 4$ car les nombres premiers inférieurs à 10 sont 2, 3, 5 et 7.

Fiche d'activités, activité n$^{\text{o}}$ 2.

Compter les nombres premiers

Un peu d'expérimentation

N	$\pi(N)$
10	4
10^2	25
10^3	168
10^4	1 229
10^5	9 592
10^6	78 498
10^7	664 579
10^8	5 761 455
10^9	50 847 534
10^{10}	455 052 511



Compter les nombres premiers

Un peu d'expérimentation

N	$\pi(N)$	$N/\pi(N)$
10	4	2,5
10^2	25	4
10^3	168	5,95
10^4	1 229	8,13
10^5	9 592	10,42
10^6	78 498	12,73
10^7	664 579	15,04
10^8	5 761 455	17,35
10^9	50 847 534	19,66
10^{10}	455 052 511	21,97

Compter les nombres premiers

Un peu d'expérimentation

N	$\pi(N)$	$N/\pi(N)$	Écarts
10	4	2,5	
10^2	25	4	1,50
10^3	168	5,95	1,95
10^4	1 229	8,13	2,18
10^5	9 592	10,42	2,28
10^6	78 498	12,73	2,31
10^7	664 579	15,04	2,30
10^8	5 761 455	17,35	2,30
10^9	50 847 534	19,66	2,30
10^{10}	455 052 511	21,97	2,30

Notons
$$Q(x) = \frac{x}{\pi(x)}.$$
Lorsque x devient grand, il semble donc que
$$Q(10x) - Q(x) = 2{,}3\ldots$$

Notons

$$Q(x) = \frac{x}{\pi(x)}.$$

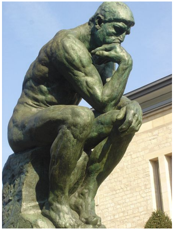
Lorsque x devient grand, il semble donc que

$$Q(10x) - Q(x) = 2{,}3\ldots$$

On cherche une fonction une fonction f vérifiant

$$f(10x) - f(x) = 2{,}3\ldots$$

pour tout $x > 0$.



Rodin, Le penseur.
Musée Rodin, Paris.

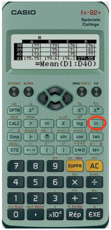
Notons

$$Q(x) = \frac{x}{\pi(x)}.$$

Lorsque x devient grand, il semble donc que

$$Q(10x) - Q(x) = 2{,}3\ldots$$

Une telle fonction existe, la fonction logarithme népérien ln !



Logarithme népérien
sur une calculatrice

Compter les nombres premiers

Une conjecture du jeune Gauss (1777-1855)

Conjecture

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \qquad (x \to +\infty).$$

Conjecture

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \to +\infty).$$

Gauss avait 15 ans lorsqu'il fit les calculs précédents et devina cette première version du théorème des nombres premiers.

Conjecture

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \qquad (x \to +\infty).$$

Gauss avait 15 ans lorsqu'il fit les calculs précédents et devina cette première version du théorème des nombres premiers. Il n'annonça jamais cette conjecture, n'ayant pas de preuve.

La fonction logarithme népérien

Croissance exponentielle

Qui va gagner de l'argent ?

Pendant 30 jours, Alice donne 340 000 € par jour à Bob ?

Pendant 30 jours, Bob donne à Alice 1 cent le premier jour, 2 cents le deuxième jour, et continue de doubler quotidiennement la somme jusqu'au 30^{e} jour.

Qui va gagner de l'argent ?

Pendant 30 jours, Alice donne 340 000 € à Bob ?

Alice donne $30 \times 340000 = 10\,200\,000$ € à Bob.

Pendant 30 jours, Bob donne à Alice 1 cent le premier jour, 2 cents le deuxième jour, et continue de doubler quotidiennement la somme jusqu'au 30e jour.

Bob donne $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{29}$ cents, soit 1 073 741 823 cents ou encore 10 737 418,23 €.

Une voiture augmente régulièrement sa vitesse pendant une heure de la façon suivante : tous les dixièmes d'heure (donc tous les six minutes), la vitesse augmente de 10%.

Une voiture augmente régulièrement sa vitesse pendant une heure de la façon suivante : tous les dixièmes d'heure (donc tous les six minutes), la vitesse augmente de 10%.

On note v_0 la vitesse avant de commencer à accélérer. Le premier dixième d'heure, la vitesse est multipliée par $1,1$ et devient donc $1,01 v_0$. Pendant le deuxième dixième d'heure, la vitesse est de nouveau multipliée par $1,1$: après deux dixième d'heures, la vitesse est $1,1^2 v_0$. En poursuivant : après dix dixièmes d'heure, la vitesse est donc $1,1^{10} v_0$. Après une heure, la vitesse est $1,1^{10} v_0$.

Un autre voiture augmente régulièrement sa vitesse pendant une heure de la façon suivante : tous les centièmes d'heure, la vitesse augmente de 1%.

Un autre voiture augmente régulièrement sa vitesse pendant une heure de la façon suivante : tous les centièmes d'heure, la vitesse augmente de 1%.

On note v_0 la vitesse avant de commencer à accélérer. Le premier centième d'heure, la vitesse est multipliée par $1,01$ et devient donc $1,01v_0$. Pendant le deuxième centième d'heure, la vitesse est de nouveau multipliée par $1,01$: après deux centièmes d'heures, la vitesse est $1,01^2v_0$. En poursuivant : après cent centièmes d'heure, la vitesse est donc $1,01^{100}v_0$. Après une heure, la vitesse est $1,01^{100}v_0$.

On peut aussi considérer des voitures qui augmentent leur vitesse de $0,1\%$ tous les millièmes d'heures, de $0,01\%$ tous les dix-millièmes d'heures... On reporte alors dans la colonne de gauche d'un tableau le nombre par lequel est multipliée la vitesse après une heure et, dans la colonne de droite une valeur approchée de ce nombre.

$1,1^{10}$	$2,593742\dots$
$1,01^{100}$	$2,704813\dots$
$1,001^{1000}$	$2,716923\dots$
$1,0001^{10000}$	$2.718145\dots$
$1,00001^{100000}$	$2,718268\dots$
$1,000001^{1000000}$	$2,718280\dots$

Le facteur par lequel est multipliée la vitesse s'approche de la constante $e = 2,718280\dots$.

Si au lieu de regarder les valeurs de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour n de plus en plus grand, on regarde les valeurs $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$ pour $t > 0$ fixé et n, de plus en plus grand, on s'approche d'un nombre positif qu'on note $\exp(t)$.

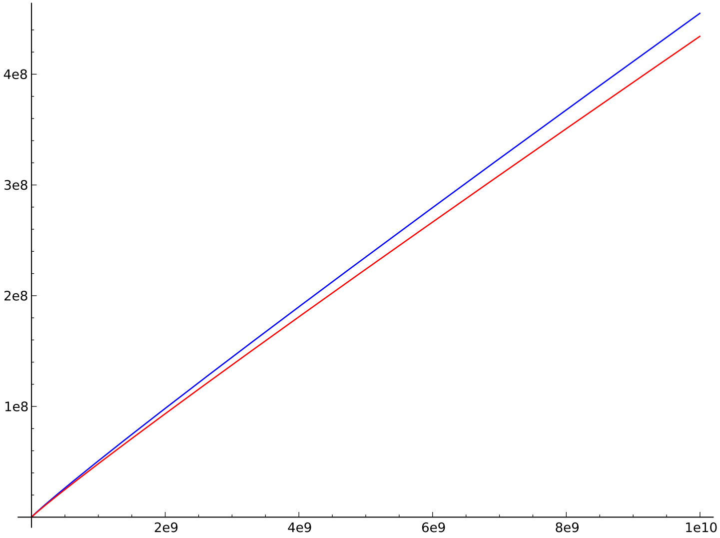
Si au lieu de regarder les valeurs de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour n de plus en plus grand, on regarde les valeurs $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$ pour $t>0$ fixé et n, de plus en plus grand, on s'approche d'un nombre positif qu'on note $\exp(t)$.

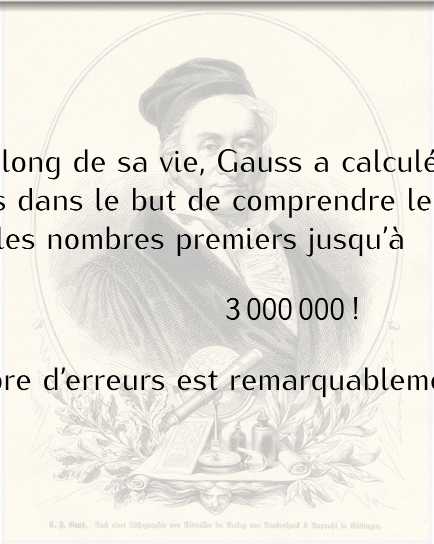
Et la valeur de t. pour laquelle ce nombre $\exp(t)$ est égale à un nombre $v>0$ est le logarithme de v :

$$\exp(t)=v \iff t=\ln(v).$$

Compter les nombres premiers

Précision de la conjecture du jeune Gauss





Tout au long de sa vie, Gauss a calculé des nombres premiers dans le but de comprendre leur distribution. Il a compté les nombres premiers jusqu'à

3 000 000 !

Le nombre d'erreurs est remarquablement faible.

Compter les nombres premiers

Une conjecture du vieux Gauss

Anzahl der Primzahlen zwischen 2000000 und 3000000

	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	
0	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1
1	3	2	2	4	1	3	4	2	2	2	25
2	10	9	9	11	9	6	10	7	15	13	98
3	32	27	29	32	37	35	28	43	30	44	337
4	69	69	73	86	78	88	71	95	85	64	778
5	119	146	138	136	147	136	158	135	140	153	1408
6	197	183	179	176	192	194	195	195	179	187	1878
7	204	201	205	194	189	180	201	188	222	214	1998
8	157	168	168	158	151	170	142	145	132	134	1525
9	115	109	113	112	102	88	96	87	109	103	1034
10	63	52	44	55	58	58	53	67	53	58	561
11	21	18	30	28	23	24	22	24	18	15	223
12	8	9	10	7	7	13	17	9	8	11	99
13	2	4	—	1	5	6	1	2	5	1	27
14	—	3	—	—	—	—	1	—	2	—	6
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
	6874	6857	6849	6787	6766	6804	6762	6714	6744	6705	67862

Compter les nombres premiers

Une conjecture du vieux Gauss

Anzahl der Primzahlen zwischen 2000000 und 3000000

	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	
0	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1
1	3	2	2	4	1	3	4	2	2	2	25
2	10	9	9	11	9	6	10	7	15	13	98
3	32	27	29	32	37	35	28	43	30	44	337
4	69	69	73	86	78	88	71	95	85	64	778
5	119	146	138	136	147	136	158	135	140	153	1408
6	197	183	179	176	192	194	195	195	179	187	1878
7	204	201	205	194	189	180	201	188	222	214	1998
8	157	168	168	168	151	170	142	145	132	134	1525
9	115	109	113	112	102	88	96	87	109	103	1034
10	63	52	44	55	58	58	53	67	53	58	561
11	21	18	30	28	23	24	22	24	18	15	223
12	8	9	10	7	7	13	17	9	8	11	99
13	2	4	—	1	5	6	1	2	5	1	27
14	—	3	—	—	—	—	1	—	2	—	6
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
	6874	6857	6849	6787	6766	6804	6762	6714	6744	6705	67862

Premiers entre 2.10^6 et 2.10^6+10^5

Premiers entre $2.10^6+5.10^5$ et $2.10^6+6.10^5$

Premiers entre 2.10^6 et 3.10^6

Anzahl der Primzahlen zwischen 2000000 und 3000000

	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	
0	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1
1	3	2	2	4	1	3	4	2	2	2	25
2	10	9	9	11	9	6	10	7	15	13	98
3	32	27	29	32	37	35	28	43	30	44	337
4	69	69	73	86	78	88	71	95	85	64	778
5	119	146	138	136	147	136	158	135	140	153	1408
6	197	183	179	176	192	194	195	195	179	187	1878
7	204	201	205	194	189	180	201	188	222	214	1998
8	157	168	168	168	151	170	142	145	132	134	1525
9	115	109	113	112	102	88	96	87	109	103	1034
10	63	52	44	55	58	58	53	67	53	58	561
11	21	18	30	28	23	24	22	24	18	15	223
12	8	9	10	7	7	13	17	9	8	11	99
13	2	4	—	1	5	6	1	2	5	1	27
14	—	3	—	—	—	—	1	—	2	—	6
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
	6874	6857	6849	6787	6766	6804	6762	6714	6744	6705	67862

Il y a 193 intervalles de la forme $[240.10^4+100k, 240.10^4+100k+100[$ inclus dans $[240.10^4, 250.10^4[$ et contenant exactement 6 nombres premiers

Il y a 6 intervalles de la forme $[200.10^4+100k, 200.10^4+100k+100[$ inclus dans $[200.10^4, 300.10^4[$ contenant exactement 14 nombres premiers.

Compter les nombres premiers

Une conjecture du vieux Gauss

Anzahl der Primzahlen zwischen 2000000 und 3000000

	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	3	2	2	4	1	3	4	2	2	2	25
2	10	9	9	10	9	5	10	7	15	13	97
3	32	27	29	33	37	35	28	43	30	43	337
4	69	70	73	86	78	88	70	93	84	65	776
5	119	145	138	135	146	136	159	137	141	152	1408
6	198	183	179	177	193	193	195	195	179	189	1881
7	203	201	205	194	190	179	201	188	222	212	1995
8	158	167	168	157	151	172	141	145	131	135	1525
9	114	110	113	113	102	88	96	86	110	103	1035
10	63	52	44	54	56	57	54	68	53	58	559
11	21	18	30	29	25	25	22	24	18	15	227
12	8	9	10	7	7	13	17	9	7	11	98
13	2	4	0	1	5	6	1	2	6	1	28
14	0	3	0	0	0	0	1	0	2	0	6
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	6872	6857	6849	6791	6770	6808	6765	6717	6747	6707	67883

C. F. Gauß. Nach einer Lithographie von Ritmüller im Verlag von Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen.

Gauss a affiné sa conjecture à la fin de sa vie et, celle-ci n'a été démontrée qu'en 1896 par Hadamard et de la Vallée-Poussin.

C'est un étape importante dans un domaine qui est toujours en pleine expansion et donc l'un des objectifs est de comprendre la répartition des nombres premiers : la théorie analytique des nombres.