Mardi 4 octobre 2016

8h - 13h

Il sera tenu compte de façon importante de la qualité de la rédaction et de l'argumentation. En particulier, répondre juste à une question est valorisé, répondre faux est pénalisé et ne pas répondre n'est ni valorisé ni pénalisé.

Sources : Capes de mathématiques, 2008, seconde épreuve.

Le sujet contient 9 pages, y compris celle-ci

Notations et rappels

• On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs.

• Si E désigne un ensemble fini, on note $\#E$ le *cardinal* de cet ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de E.

• Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ désignent deux suites numériques, on notera $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ pour dire que ces suites sont *équivalentes*. On notera $u_n = o(v_n)$ pour dire que la suite $(u_n)_n$ est *négligeable* devant la suite $(v_n)_n$ et enfin, on notera $u_n = O(v_n)$ pour dire que la suite $(u_n)_n$ est *dominée* par la suite $(v_n)_n$, c'est-à-dire, qu'il existe un réel c et un entier n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n| \leqslant c|v_n|$.

• Si x désigne un réel, on notera $[x]$ sa *partie entière*, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x ; autrement dit, $[x]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

• On rappelle que si a et b sont deux entiers tels que $0 \leqslant b \leqslant a$, le coefficient binomial $\binom{a}{b}$ est égal à $\frac{a!}{(a-b)!\,b!}$.

• Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris dans l'intervalle $[0, n]$; ainsi on a $\pi(0) = \pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, etc. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\delta(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$, de sorte que si l'on pose $\delta(0) = 0$, on voit que δ est la fonction caractéristique de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire, $\delta(n)$ vaut 1 si n est premier, et 0 sinon).

• **Dans tout ce texte la lettre p désignera toujours et exclusivement un nombre premier**, ceci y compris lorsque la lettre p sera utilisée comme symbole d'indice d'une somme ou d'un produit. Par exemple, la notation $\displaystyle\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}$ désigne la somme des inverses des nombres premiers p inférieurs ou égaux au réel x.

• Étant donnés un entier $n \geqslant 1$ et un nombre premier p, on appelle *valuation p-adique* de n l'entier noté $v_p(n)$ et égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par exemple, si l'on prend $n = 350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$ on a $v_2(350) = 1$, $v_3(350) = 0$, $v_5(350) = 2$, $v_7(350) = 1$ et $v_p(350) = 0$ pour tout nombre premier $p \geqslant 11$.

On admet les propriétés élémentaires suivantes :

a) $v_p(n)$ est l'entier k tel que p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n.

b) Pour tout $n \geqslant 1$ fixé, la suite $(v_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$ est nulle à partir d'un certain rang, de sorte que l'on peut écrire $n = \displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$ (ce produit pouvant alors être considéré comme un produit fini). Cette écriture n'est alors rien d'autre que la décompostion en facteurs premiers de l'entier n.

c) Pour tous n, m entiers naturels non nuls et tout $p \in \mathcal{P}$, on a

$$v_p(nm) = v_p(n) + v_p(m)$$

Aucune preuve de ces trois résultats n'est demandée aux candidats.

A. Une estimation à la Tchebychev

I. Une minoration de la fonction π

On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'entier $\Delta_n = \text{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$. Dans cette partie nous allons établir une minoration de Δ_n. Nous en déduirons ensuite une minoration de $\pi(n)$. On considère $a, b \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leqslant b \leqslant a$ et l'on pose :

$$I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,\mathrm{d}x.$$

A.I.1.

A.I.1.a. Expliciter $I(1, a)$ en fonction de a.

A.I.1.b. Montrer que si $b < a$ alors $I(b+1, a) = \dfrac{b}{a-b} I(b, a)$.

A.I.1.c. En déduire que $I(b, a) = \dfrac{1}{b\binom{a}{b}}$.

A.I.2. On se propose dans cette question de donner une autre méthode pour calculer $I(b, a)$. On considère un réel $y \in [0, 1[$.

A.I.2.a. En développant à l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$\int_0^1 (1 - x + xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k, a)$$

A.I.2.b. En calculant maintenant directement l'intégrale, montrer que :

$$\int_0^1 (1 - x + xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}$$

A.I.2.c. En déduire que $I(b, a) = \dfrac{1}{b\binom{a}{b}} = \dfrac{1}{a\binom{a-1}{b-1}}$.

A.I.3.

A.I.3.a. Montrer que $I(b, a) = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$.

A.I.3.b. En déduire que $I(b, a)\Delta_a \in \mathbb{N}$.

A.I.3.c. Prouver que l'entier $b\binom{a}{b}$ divise l'entier Δ_a.

A.I.4. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

A.I.4.a. Montrer que les entiers $n\binom{2n}{n}$ et $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divisent l'entier Δ_{2n+1}.

(Indication : On remarquera que pour tout $k \geqslant 1$, Δ_k divise Δ_{k+1}.)

A.I.4.b. En déduire que l'entier $n(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.

(Indication : On remarquera que les entiers n et $2n+1$ sont toujours premiers entre eux.)

A.I.4.c. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$ on a l'inégalité $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$.

A.I.4.d. En déduire que $(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant 4^n$.

(Indication : On développera l'égalité $4^n = (1+1)^{2n}$.)

A.I.4.e. En déduire que $\Delta_{2n+1} \geqslant n4^n$.

A.I.4.f. Montrer que si $n \geqslant 9$ alors $\Delta_n \geqslant 2^n$ et vérifier que cette inégalité est encore vraie pour $n = 7$ et 8.

A.I.5. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

A.I.5.a. Soit $p \in \mathcal{P}$, montrer que $p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n$.

(Indication : On commencera par exprimer $v_p(\Delta_n)$ en fonction des entiers $v_p(1), \ldots, v_p(n)$.)

A.I.5.b. Montrer que $\Delta_n = \prod\limits_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)}$.

A.I.5.c. En déduire que $\Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}$.

A.I.6.

A.I.6.a. Montrer que pour tout $n \geqslant 7$ on a

$$\pi(n) \geqslant (\ln 2)\frac{n}{\ln n}.$$

A.I.6.b. Pour quels entiers $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ l'inégalité de la question précédente est-elle encore vraie ?

II. Une majoration de la fonction π

A.II.1. On cherche dans cette question à majorer simplement le produit $\prod\limits_{p \leqslant n} p$ en fonction de l'entier $n \geqslant 1$.

A.II.1.a. Soient a et b deux entiers tels que $0 < \frac{b}{2} \leqslant a < b$. Montrer que le produit $\prod\limits_{a<p\leqslant b} p$ divise l'entier $\binom{b}{a}$ (le produit considéré est supposé être égal à 1 dans le cas où il n'y aurait pas de nombre premier p dans l'intervalle $]a, b]$).

A.II.1.b. En déduire que pour tout $m \geqslant 1$, le produit $\prod\limits_{m+1<p\leqslant 2m+1} p$ divise l'entier $\binom{2m+1}{m+1}$.

A.II.1.c. Comparer, pour $m \geqslant 1$, les entiers $\binom{2m+1}{m}$ et $\binom{2m+1}{m+1}$.

A.II.1.d. En déduire que pour tout entier $m \geqslant 1$ on a $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

(Indication : On développera la quantité $(1+1)^{2m+1}$.)

A.II.1.e. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $\prod\limits_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m$.

A.II.1.f. Prouver finalement que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n.$$

(Indication : On pourra montrer par récurrence, pour $n \geqslant 1$, la propriété P_n : pour tout $k \in \{1, \ldots, 2n\}$ on a $\prod\limits_{p \leqslant k} p \leqslant 4^k$.)

A.II.2.

A.II.2.a. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$ on a $m! > \left(\dfrac{m}{\mathrm{e}}\right)^m$.

(Indication : On pourra penser au développement en série entière de la fonction exponentielle.)

A.II.2.b. Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\pi(n)! \leqslant 4^n$ et que par suite, on a

$$\pi(n) \ln \pi(n) - \pi(n) \leqslant n \ln 4$$

A.II.3. On souhaite montrer, à partir du résultat précédent, que pour tout $n \geqslant 3$ on a

$$\pi(n) \leqslant \mathrm{e}\,\frac{n}{\ln n}$$

Pour cela on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 3$ tel que $\pi(n_0) > \mathrm{e}\,\dfrac{n_0}{\ln n_0}$.

A.II.3.a. Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que

$$\frac{\mathrm{e} - \ln 4}{\mathrm{e}} < \frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0}$$

A.II.3.b. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est majorée par e^{-1} sur $[1, +\infty[$. Conclure.

B. Autour d'un théorème de Mertens

I. Une formule de Legendre sur la valuation p-adique de $n!$

On considère un entier $n \geqslant 2$ et un nombre premier p. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on considère les sous-ensembles finis U_k, V_k et Ω_k de $\mathbb{N}$ définis par

$$\begin{aligned} U_k &= \{\, a \in \{1, \ldots, n\} \mid p^k \text{ divise } a \,\} \\ V_k &= \{\, a \in \{1, \ldots, n\} \mid p^k \text{ ne divise pas } a \,\} \\ \Omega_k &= \{\, a \in \{1, \ldots, n\} \mid v_p(a) = k \,\} \end{aligned}$$

B.I.1. Justifier qu'il existe un plus petit entier $k_0 \geqslant 0$ tel que $n < p^{k_0}$. Montrer que $k_0 \geqslant 1$ et expliciter k_0 en fonction de n et p.

B.I.2.

B.I.2.a. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$, l'ensemble U_{k+1} est strictement inclus dans U_k et que pour $k \geqslant k_0$ on a $U_k = \varnothing$.

B.I.2.b. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$, l'ensemble V_k est strictement inclus dans V_{k+1} et que pour $k \geqslant k_0$ on a $V_k = \{1, \ldots, n\}$.

B.I.2.c. Prouver que la famille de parties $\{\Omega_0, \ldots, \Omega_{k_0-1}\}$ forme une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

B.I.3.

B.I.3.a. Pour tout $k \geqslant 0$, établir que $\Omega_k = U_k \cap V_{k+1}$.

B.I.3.b. Calculer, pour tout $k \geqslant 0$, $\#U_k$ et $\#V_k$ puis $\#\Omega_k$ en fonction de n, p.

B.I.4. Montrer que $v_p(n!) = \sum\limits_{k \geqslant 0} k\,\#\Omega_k$ et en déduire que

$$v_p(n!) = \sum_{k \geqslant 1} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

(formule de Legendre)

II. Un théorème de Mertens

Dans toute cette partie **II**, on considère un entier $n \geqslant 2$.

B.II.1. Prouver que pour tout $p \in \mathcal{P}$ on a

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

(Indication : On pourra utiliser l'encadrement $x - 1 < [x] \leqslant x$ valable pour tout réel x et la formule de Legendre.)

B.II.2. En déduire que

$$n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \leqslant n} \ln p < \ln n! \leqslant n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

(Indication : On pourra commencer par montrer que $n! = \prod\limits_{p \leqslant n} p^{v_p(n!)}$.)

B.II.3. Dans cette question on établit plusieurs majorations techniques utiles aux deux questions suivantes.

B.II.3.a. Montrer la convergence de la série $\sum \frac{r}{2^r}$ et prouver que $\sum\limits_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r} = 2$.

(Indication : On pourra s'intéresser à la série entière $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{2^k}$ ainsi qu'à sa série dérivée.)

B.II.3.b. Calculer pour tout entier $r \geqslant 1$ la somme finie $\sum\limits_{2^{r-1} < m \leqslant 2^r} \frac{1}{m(m-1)}$. En déduire que si l'on pose $U_r = \sum\limits_{2^{r-1} < m \leqslant 2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)}$ alors on a $U_r \leqslant \frac{r}{2^r} \ln 2$.

B.II.3.c. Montrer que la série $\sum U_r$ converge. Donner un majorant de $\sum\limits_{r=1}^{+\infty} U_r$.

B.II.3.d. En déduire que la série $\sum \frac{\ln m}{m(m-1)}$ est convergente et que l'on a :

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leqslant \ln 4.$$

B.II.3.e. Montrer que l' on a : $1-\frac{1}{2n} \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{2n}$.

(Indication : On commencera par déterminer pour quels réels u on a les inégalités $u-u^2/2 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$.)

B.II.3.f. En déduire, par récurrence sur n, qu' il existe un réel $\theta_n \in [0,1]$ tel que :

$$\ln n! = n\ln n - n + 1 + \theta_n \ln n.$$

B.II.4. Prouver, en utilisant les résultats des questions B.II.2 et B.II.3, que :

$$\ln n - (1+\ln 4) < \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p}.$$

B.II.5. De même, en utilisant les questions B.II.2, B.II.3 et A.II.1.f, montrer que :

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p} < \ln n + \ln 4.$$

En déduire que

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1)$$

(théorème de Mertens).

III. Le comportement asymptotique de $\left(\sum\limits_{p\leqslant n} \frac{1}{p}\right)_n$

B.III.1. Dans cette question on établit des résultats préliminaires utiles pour la suite.

B.III.1.a. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente, que la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ est divergente et qu'on a

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + O(1)$$

(Indication : On comparera les séries considérées avec les intégrales généralisées $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t}$ et $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t}$.)

B.III.1.b. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n$. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right).$$

B.III.1.c. En déduire qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + \ell + o(1).$$

B.III.2. On note $(\psi(n))_{n\geqslant 2}$ la suite définie par $\psi(n) = \sum\limits_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p}$. On considère un entier $n \geqslant 3$.

B.III.2.a. Montrer que $\sum\limits_{p\leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k)\frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} + \frac{\psi(n)}{\ln n}$.

(Indication : On pourra remarquer que $\sum\limits_{p\leqslant n} \frac{1}{p} = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\delta(k)\ln k}{k}.\frac{1}{\ln k}$ où δ est la fonction caractéristique de $\mathcal{P}$, puis utiliser la transformation d'Abel sous la forme suivante : si $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites numériques et si pour $n \geqslant 1$ on pose $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, alors pour tout $N \geqslant 2$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1})\,)$$

B.III.2.b. Prouver, en utilisant le théorème de Mertens, que :

$$\psi(k)\frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} = \frac{1}{k\ln k} + O\left(\frac{1}{k\ln^2 k}\right)$$

(Indication : On commencera par écrire la fraction $\frac{\ln(1+1/k)}{\ln k\ln(k+1)}$ sous la forme $\frac{1}{\ln k}\frac{t(k)}{1+t(k)}$, où $t(k)$ est une suite qu'on déterminera. On montrera ensuite que $\frac{t(k)}{1+t(k)} = \frac{1}{k\ln k} - \frac{1}{2k^2\ln k} + o\left(\frac{1}{k^2\ln k}\right)$.)

B.III.3. Déduire de ce qui précède qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{1}{p} = \ln\ln n + \lambda + o(1).$$

B.III.4. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on a $\sum\limits_{p\leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} + \frac{\pi(n)}{n}$. En déduire que s'il existe une constante réelle c telle que $\pi(n) \underset{n}{\sim} c\,\frac{n}{\ln n}$ alors $c = 1$ (théorème de Tchebychev).

IV. Une application à l'étude des entiers possédant de grands facteurs premiers

Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on note $P^+(n)$ le plus grand facteur premier apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par exemple, $P^+(50) = P^+(2\cdot 5^2) = 5$. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble A constitué des entiers $n \geqslant 2$ vérifiant $P^+(n) > \sqrt{n}$ (c'est ce qu'on entend par *entiers possédant de grands facteurs premiers* dans le titre de cette partie). L'objectif de cette partie est de montrer que l'ensemble A possède une *densité* valant $\ln 2$. En d'autres termes, si pour un réel $x \geqslant 2$ on pose $A(x) = A \cap [0, x]$ et $a(x) = \#A(x)$ le cardinal de $A(x)$, nous allons montrer que la suite $\left(\frac{a(n)}{n}\right)_n$ possède une limite (on dira alors que A possède une *densité*) et que cette limite vaut $\ln 2$ (qui sera donc appelée la *densité* de A). Ce résultat signifiera que, « moralement », il y a une proportion de $\ln 2 \approx 0{,}69$ d'entiers dans $\mathbb{N}$ qui possèdent de grands facteurs premiers.

B.IV.1. En utilisant la question B.III.3 montrer que la suite $\left(\sum\limits_{\sqrt{n}<p\leqslant n} \frac{1}{p}\right)_n$ possède une limite et donner cette limite.

B.IV.2. Soit $x \geqslant 2$ un réel.

B.IV.2.a. Soient $p \in \mathcal{P}$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $n = mp$. Montrer que

$$(p = P^+(n) \text{ et } n \in A(x)) \iff m < p \leqslant x/m.$$

B.IV.2.b. Soient $p, p' \in \mathcal{P}$ et $m, m' \in \mathbb{N}^*$ tels que $m < p \leqslant x/m$ et $m' < p' \leqslant x/m'$. Montrer que

$$mp = m'p' \iff (p = p' \text{ et } m = m').$$

B.IV.2.c. En déduire que les entiers de la forme mp avec $p \in \mathcal{P}$, $m \in \mathbb{N}^*$, et vérifiant $m < p \leqslant x/m$ décrivent de manière biunivoque l'ensemble $A(x)$.

B.IV.2.d. Prouver finalement que

$$a(x) = \sum_{p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right)$$

B.IV.3. Soit $x \geqslant 1$ un réel.

B.IV.3.a. Montrer que pour tout nombre premier p, on a l'équivalence

$$p - 1 \leqslant [x/p] \iff p \leqslant \varphi(x)$$

où $\varphi(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$.

B.IV.3.b. Montrer que $\sqrt{x} < \varphi(x) < \sqrt{x} + 1$.

B.IV.3.c. En déduire que $a(x) = \sum\limits_{p\leqslant\sqrt{x}} (p-1) + \sum\limits_{\sqrt{x}<p\leqslant x} [x/p]$.

(Indication : On examinera le cas où il existe un nombre premier dans l'intervalle $]\sqrt{x}, \varphi(x)]$ et le cas où il n'en existe pas.)

B.IV.3.d. En utilisant les encadrements obtenus dans la partie A, démontrer que $\sum\limits_{p\leqslant\sqrt{x}} (p-1) = o(x)$.

B.IV.3.e. En utilisant la question B.IV.1 et les encadrements obtenus dans la partie A, montrer que $\sum\limits_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right] = x \ln 2 + o(x)$.

B.IV.3.f. En déduire que $a(x) = x \ln 2 + o(x)$ et conclure.

FIN DE L'ÉPREUVE