Département de mathématiques et informatique
Emmanuel Royer – 30/9/2016, 15:24
Préparation au CAPES

Devoir du 20 septembre 2016 – Corrigé

Problème n° 1

On calcule l'espérance et la variance à tout instant du nombre d'ampoules allumées dans une pièce, la probabilité à chaque instant que l'une des deux ampoules grille étant de 1/2.

Mise en place du problème

1. À l'instant initial, les deux ampoules sont allumées. La variable aléatoire X_0 est donc constante égale à 2. Son espérance est alors 2 et sa variance est nulle.

$$\boxed{P(X_0 = 2) = 1 \quad E(X_0) = 2 \quad V(X_0) = 0.}$$

2. Si deux ampoules sont allumées à l'instant n, la probabilité que les deux grillent est $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. La probabilité que les deux restent allumées est $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. La probabilité qu'une reste allumée et qu'une grille est donc $1 - \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$. On a donc

$$\boxed{P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}, \qquad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.}$$

3. Le résultat est donné table 1.

a \ b	0	1	2
0	1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Table 1 – Probabilité $P_{(X_n=a)}(X_{n+1} = b)$

4. Puisque $(X_{n-1} = k)_{k\in\{0,1,2\}}$ étant un système complet fini d'évènements, la formule des probabilités totales conduit à

$$\forall j \in \{0,1,2\} \qquad P(X_n = j) = \sum_{k=0}^{2} P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = j)P(X_{n-1} = k).$$

Compte-tenu du tableau 1, on trouve

$$\boxed{\begin{aligned} &P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{4}P(X_n = 2)\\ &P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2)\\ &P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}P(X_n = 2). \end{aligned}}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0)\\ P(X_{n+1} = 1)\\ P(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 0)\\ P(X_n = 1)\\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_{n+1} = AU_n.}$$

Espérance et variance des X_n

5.

a. La variable aléatoire X_n prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$. On a donc

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 0\cdot P(X_n = 0) + 1\cdot P(X_n = 1) + 2\cdot P(X_n = 2)\\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 0)\\ P(X_n = 1)\\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad E(X_n) = L_1 U_n.}$$

b. On calcule $L_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{L_1 A = \frac{1}{2}L_1.}$$

Grâce à la question précédente et à la question 4, on calcule alors

$$E(X_{n+1}) = L_1 U_{n+1} = L_1 A U_n = \frac{1}{2}L_1 U_n$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad E(X_{n+1}) = \frac{1}{2}E(X_n).}$$

c. La suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $E(X_0) = 2$ et de raison $1/2$. On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad E(X_n) = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

6.

a. En utilisant la formule de transfert avec la fonction f définie par $f(x) = x^2$ pour tou réel x, on calcule

$$E(X_n^2) = \sum_{k=0}^{2} k^2 P(X_n = k) = P(X_n = 1) + 4P(X_n = 2).$$

On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad E(X_n^2) = L_2 U_n.}$$

b. On calcule $L_2A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$. Pour tout couple (α, β) de réels, on a

$$\begin{aligned} L_2A = \alpha L_1 + \beta L_2 &\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 1/2 \\ 2\alpha + 4\beta = 3/2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 1/2 \\ 2\beta = 1/2 \quad (\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_1) \end{cases}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{L_2A = \frac{1}{4}L_1 + \frac{1}{4}L_2.}$$

c. Grâce aux questions a et b, on calcule

$$E(X_{n+1}^2) = L_2 U_{n+1} = L_2 A U_n = \frac{1}{4}L_1 U_n + \frac{1}{4}L_2 U_n = \frac{1}{4}E(X_n) + \frac{1}{4}E(X_n^2)$$

la dernière égalité étant conséquence de 5a et 6a. En utilisant 5c, on obtient finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad E(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4}E(X_n^2) + \frac{1}{2^{n+1}}.}$$

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule

$$\frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} = u_{n+1}.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.}$$

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n+1}^2) - u_{n+1} \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{E}(\mathrm{X}_n^2) + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}u_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \qquad \text{d'après 6c et 6d} \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathrm{E}(\mathrm{X}_n^2) - u_n\right) \\
&= \frac{1}{4}v_n.
\end{aligned}$$

D'autre part, $v_0 = \mathrm{E}(\mathrm{X}_0^2) - 2$ et $\mathrm{E}(\mathrm{X}_0^2) = 4$ car X_0 est constante égale à 2. On a donc démontré que

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{4} \text{ et de premier terme 2.}}$$

f. Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit de la question précédente que

$$v_n = \frac{2}{4^n} = \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{E}(\mathrm{X}_n^2) = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\mathrm{V}(\mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_n^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X}_n)^2$. En utilisant les question 6f et 5c, on trouve donc

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{2n-2}}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}_n) = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).}$$

Problème n° 2

Partie A : interpolation de Lagrange

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a_1,\dots,a_n$ des réels distincts. On montre qu'il existe un unique polynôme de degré au plus $n-1$ qui prend en chaque a_k la valeur $f(a_k)$. Ce polynôme est le *polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1,\dots,a_n$.*

I. Le polynôme L_k est un polynôme de degré $n-1$ comme produit de $n-1$ polynômes de degré 1. Soit $j \neq k$. Alors

$$L_k(a_j) = \frac{a_j - a_j}{a_k - a_j} \prod_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq j \\ i\neq k}} \frac{a_j - a_i}{a_k - a_i} = 0$$

et si $j = k$ alors

$$L_k(a_k) = \prod_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq k}} \frac{a_k - a_i}{a_k - a_i} = 1.$$

Le polynôme L_k vérifie donc

$$L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Réciproquement, soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

On a alors

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad (P - L_k)(a_i) = 0.$$

Le polynôme $P - L_k$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ admet donc au moins $n > n-1$ racines distinctes. C'est donc le polynôme nul.

Le polynôme L_k est l'unique polynôme de degré inférieur où égal à n qui s'annule en a_i pour tout $i \in [\![1,n]\!] - \{k\}$ et qui prend la valeur 1 en a_k.

II.

1. L'application F est une application entre le sous-espace vectoriel réel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de $\mathbb{R}[X]$ et l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$. Alors

$$\begin{aligned} F(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_1),\dots,(\lambda P + \mu Q)(a_n)) \\ &= (\lambda \cdot P(a_1) + \mu \cdot Q(a_1),\dots,\lambda \cdot P(a_1) + \mu \cdot Q(a_1)) \end{aligned}$$

par définition de l'addition et du produit externe de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

$$= \lambda(P(a_1),\dots,P(a_n)) + \mu(Q(a_1),\dots,Q(a_n))$$

par définition de l'addition et du produit externe de $\mathbb{R}^n$

$$= \lambda F(P) + \mu F(Q).$$

$$\boxed{\text{L'application F est linéaire.}}$$

2. Pour tout entier naturel k, on a

$$\begin{aligned} F(P) = e_k &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] \quad P(a_i) = e_{k,i} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] \quad P(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = L_k. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme P de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } F(P) = e_k. \text{ Ce polynôme est } L_k.}$$

3. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$F(P) = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \Leftrightarrow F(P) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$$

D'autre part,

$$F\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j F(L_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$$

Pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, le polynôme $P = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j$ vérifie $F(P) = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. On en déduit que

$$\boxed{\text{L'application linéaire F est surjective.}}$$

Enfin, F est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie n. La surjectivité suffit donc à prouver que

$$\boxed{\text{L'application linéaire F est bijective.}}$$

III.

1. Puisque $(f(a_1),\dots,f(a_n)) \in \mathbb{R}^n$ et F est bijective, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = ((f(a_1),\dots,f(a_n))$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe un unique polynôme P de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que} \\ \qquad\qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \qquad P(a_i) = f(a_i).\end{array}}$$

2. D'après la question II.3, l'unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ est

$$\boxed{P = \sum_{j=1}^{n} f(a_j) L_j.}$$

Partie B : erreur d'interpolation

On donne un majorant de l'erreur commise en remplaçant une fonction par son polynôme d'interpolation.

I.

1. Le théorème de Rolle s'énonce de la façon suivante.

> Soit g une fonction à valeurs réelles définie et continue sur l'intervalle $[u,v]$ $(u \neq v)$ et dérivable sur $]u,v[$. On suppose $g(u) = g(v)$. Alors, il existe $c \in]u,v[$ tel que $g'(c) = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse « soit h une fonction n fois dérivable sur l'intervalle $[a,b]$ $(a \neq b)$ et s'annulant en $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Alors $h^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[a,b]$ ».

L'hypothèse $\mathcal{H}(1)$ est vraie. Soit en effet h dérivable sur $[a,b]$ s'annulant en u et v tels que $a \leq u < v \leq b$. Alors h est continue sur $[u,v]$ et dérivable sur $]u,v[$. On a $h(u) = h(v)$. En appliquant le théorème de Rolle à h sur $[u,v]$, on trouve que h' s'annule sur $]u,v[\subset [a,b]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Soit f une fonction dérivable $n+1$ fois sur $[a,b]$ et $u_1, \ldots, u_{n+2}$ des réels annulant f tels que

$$a \leq u_1 < \ldots < u_{n+2} \leq b.$$

Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, la fonction f est continue sur $[u_i, u_{i+1}]$, dérivable sur $]u_i, u_{i+1}[$ et $f(u_i) = f(u_{i+1})$. Grâce au théorème de Rolle, il existe $v_i \in]u_i, u_{i+1}[$ tel que $f'(v_i) = 0$. Si $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ est tel que $i \neq j$ alors $]u_i, u_{i+1}[\cap]u_j, u_{j+1}[= \emptyset$ et donc $v_i \neq v_j$. La fonction f' s'annule $n+1$ fois sur $[a,b]$ où elle est est n fois dérivable. Grâce à l'hypothèse de récurrence utilisée avec $h = f'$, on trouve que la dérivée n^{e} de f' s'annule au moins une fois sur $[a,b]$ et donc que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[a,b]$. L'hypothèse $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

L'hypothèse $\mathcal{H}(1)$ est vraie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $\mathcal{H}(n)$ est vraie alors $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que pour tout tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

On a montré le résultat suivant.

> On suppose que g est n fois dérivable sur $[a,b]$ et s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Alors $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a,b]$.

II.

1. Pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, on a $\prod_{k=1}^{n} \frac{a_j - a_k}{c - a_k} = 0$ (puisque le facteur correspondant à $j = k$ est nul) et $f(a_j) = P(a_j)$ puisque P est le polynôme d'interpolation de f en les

points d'abscisse $a_1, \dots, a_n$. On a donc $g_c(a_j) = 0$. Cela fournit n points d'annulation de g_c.

De plus, $\prod_{k=1}^{n} \frac{c-a_k}{c-a_k} = 1$ (chaque facteur du produit est égal à 1) donc

$$g_c(c) = f(c) - \mathrm{P}(c) - (f(c) - \mathrm{P}(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{c-a_k}{c-a_k} = 0.$$

Puisque c n'est pas l'un des réels $a_1, \dots, a_n$, cela fournit un $n+1^{\text{e}}$ point.

$$\boxed{\text{La fonction } g_c \text{ s'annule } n+1 \text{ fois.}}$$

2. La fonction f est dans $\mathcal{C}^n([a,b])$. Elle est donc en particulier n fois dérivable sur $[a,b]$. Les applications P et $x \mapsto \frac{x-a_k}{c-a_k}$ sont polynomiale donc $\mathcal{C}^\infty([a,b]$ et en particulier n fois dérivable sur $[a,b]$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } g_c \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } [a,b].}$$

On a de plus montré dans la question précédente que la fonction g_c s'annule $n+1$ fois dans $[a,b]$. Il résulte alors de la question I.2 que

$$\boxed{\text{la fonction } g_c \text{ s'annule au moins une fois sur } [a,b].}$$

3. Dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on a

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{X}-a_k}{c-a_k} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(c-a_k)} \prod_{k=1}(\mathrm{X}-a_k).$$

C'est un produit de polynômes de degré n et donc un polynôme de degré n. Le coefficient dominant est

$$\mathrm{D} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(c-a_k)}.$$

On a donc $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{D}\mathrm{X}^n + \mathrm{R}(\mathrm{X})$ avec R un polynôme de degré $n-1$ dont la dérivée n^{e} est donc nul. On en déduit que $\mathrm{Q}^{(n)} = n!\mathrm{D}$ et donc

$$\boxed{\forall x \in [a,b] \qquad h_c^{(n)}(x) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(c-a_k)}.}$$

Enfin, le polynôme P étant de degré au plus $n-1$, sa dérivée n^{e} est nulle et donc

$$\boxed{\forall x \in [a,b] \qquad g_c^{(n)}(x) = f_c^{(n)}(x) - \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(c-a_k)}(f(c) - \mathrm{P}(c)).}$$

III.

1. La question II.2 montre que $g_c^{(n)}$ s'annule sur $[a,b]$. Soit donc $\zeta \in [a,b]$ tel que $g_c^{(n)}(\zeta) = 0$. Grâce à II.3, on obtient

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(c-a_k)}\,(f(c)-\mathrm{P}(c)).$$

On a alors

$$f(c)-\mathrm{P}(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(c-a_k).$$

2. Si $c \in \{a_1,\ldots,a_n\}$, on a $\mathrm{P}(c) = f(c)$ par définition de P comme polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisse $a_1,\ldots,a_n$. D'autre part, $\prod_{k=1}^{n}(c-a_k) = 0$ puisque l'un des facteurs est nul. Le résultat de la question précédente est donc encore valable s'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $c = a_j$. Finalement,

$$\forall c \in [a,b] \quad \exists \zeta \in [a,b] \qquad f(c)-\mathrm{P}(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(c-a_k).$$

3. La fonction f appartenant à $\mathcal{C}^n([a,b])$, la fonction $f^{(n)}$ est continue sur $[a,b]$. La fonction $\left|f^{(n)}\right|$ admet donc un maximum sur $[a,b]$ et

$$\forall \zeta \in [a,b] \qquad \left|f^{(n)}(\zeta)\right| \leq \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n)}(x)\right|.$$

La fonction $c \mapsto \prod_{k=1}^{n}(c-a_k)$ est polynomiale donc continue sur $[a,b]$. La fonction $c \mapsto \prod_{k=1}^{n}|c-a_k|$ est donc continue sur $[a,b]$ et admet un maximum. On a alors

$$\forall c \in [a,b] \qquad \left|\prod_{k=1}^{n}(c-a_k)\right| \leq \max_{x\in[a,b]}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|.$$

Il résulte donc de la question précédente que

$$\forall c \in [a,b] \qquad |f(c)-\mathrm{P}(c)| \leq \frac{1}{n!}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n)}(x)\right| \times \max_{x\in[a,b]}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|.$$

Enfin, la fonction $|f-\mathrm{P}|$ est continue sur $[a,b]$, elle admet donc un maximum. Ce maximum est atteint en au moins un réel $c_0 \in [a,b]$ et on applique l'inégalité précédente à $c = c_0$. On trouve

$$\boxed{\max_{x\in[a,b]}|f(x)-\mathrm{P}(x)| \leq \frac{1}{n!}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n)}(x)\right| \times \max_{x\in[a,b]}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|.}$$

Partie C : un exemple

Sur un exemple, on compare deux méthodes d'approximation basées sur les polynômes d'interpolation. Dans les deux méhodes, on divise l'intervalle de définition de la fonction en n sous-intervalles de même longueur.

— 1re méthode : on approche la fonction par le polynôme d'interpolation en les points d'abscisses définies par les bords des sous-intervalles ;
— 2e méthode : sur chacun des sous-intervalles, on approche la fonction par le polynôme d'interpolation en les points d'abscisses les bords des sous-intervalles.

I. **Première méthode.**

1. Grâce à A.III.2, on a

$$P = f(0)L_1 + f\left(\frac{\pi}{2}\right)L_2 + f(\pi)L_3 = L_2$$

et donc

$$P = \frac{X-0}{\pi/2-0} \cdot \frac{X-\pi}{\pi/2-\pi}$$

puis

$$\boxed{P = -\frac{4}{\pi^2}X(X-\pi).}$$

2. Grâce à B.III.3, on a

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,\pi] \quad |f(x)-P(x)| &\leq \max_{t\in[0,\pi]} |f(x)-P(x)| \\ &\leq \frac{1}{3!}\max_{t\in[0,\pi]}\left|\sin^{(3)}(t)\right| \max_{t\in[0,\pi]}\left(|t-0|\cdot\left|t-\frac{\pi}{2}\right|\cdot|t-\pi|\right).\end{aligned}$$

Pour tout réel t, on a $\left|\sin^{(3)}(t)\right| = |\cos(t)| \leq 1$ donc

$$\boxed{\forall x \in [0,\pi] \qquad |f(x)-P(x)| \leq \max_{t\in[0,\pi]} \frac{\left|t\left(t-\frac{\pi}{2}\right)(t-\pi)\right|}{6}.}$$

3. La fonction $M\colon t \mapsto t\left(t-\frac{\pi}{2}\right)(t-\pi)$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et

$$\forall t \in [0,\pi] \qquad M'(t) = 3t^2 - 3\pi t + \frac{\pi^2}{2}.$$

Le discriminant du polynôme $3X^2 - 3\pi X + \frac{\pi^2}{2}$ est $3\pi^2 > 0$ et les racines

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} M\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right) &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right) \\ &= \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \sqrt{3}\left(3 - \sqrt{3}\right)\left(3 + \sqrt{3}\right) = \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \sqrt{3} \cdot 6 \\ &= \frac{\pi^3\sqrt{3}}{36}. \end{aligned}$$

De semblable façon,

$$\begin{aligned} M\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right) &= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right) \cdot \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right) \\ &= -\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \sqrt{3}\left(3 - \sqrt{3}\right)\left(3 + \sqrt{3}\right) = -\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \sqrt{3} \cdot 6 \\ &= -\frac{\pi^3\sqrt{3}}{36}. \end{aligned}$$

Le tableau de variations de M est le tableau suivant.

t	0		$\pi/2 - \pi\sqrt{3}/6$		$\pi/2 + \pi\sqrt{3}/6$		π
$M'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$M(t)$	0	$\nearrow$	$\pi^3\sqrt{3}/36$	$\searrow$	$-\pi^3\sqrt{3}/36$	$\nearrow$	0

Puisque la fonction M est continue sur $[0, \pi]$, on déduit de ce tableau de variations que

$$\forall t \in [0, \pi] \qquad -\frac{\pi^3\sqrt{3}}{36} \leq M(t) \leq \frac{\pi^3\sqrt{3}}{36}$$

et donc

$$\forall t \in [0, \pi] \qquad |M(t)| \leq \frac{\pi^3\sqrt{3}}{36}.$$

On déduit alors de la question précédente que

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi] \qquad |f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}.}$$

II. Seconde méthode.

1. Si $n = 1$, le polynôme P_0 est le polynôme d'interpolation de f en 0 et π. On a donc

$$P_0 = \sin(0)L_1 + \sin(\pi)L_2 = 0.$$

On a donc

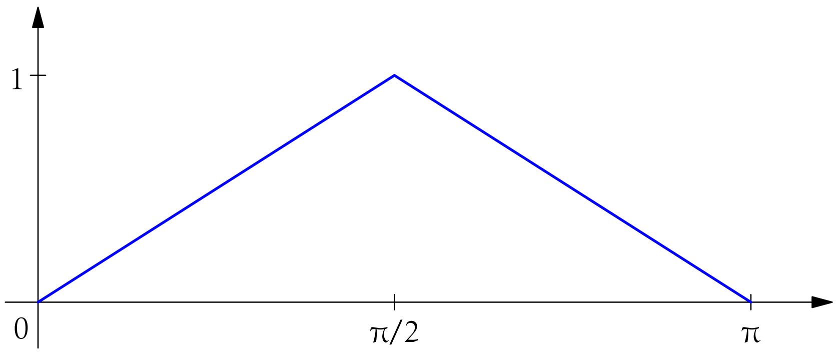

FIGURE 1 – Graphe de Q_2

$$\boxed{Q_1 = 0.}$$

Si $n = 2$ alors

— le polynôme P_0 est le polynôme d'interpolation de f en 0 et $\pi/2$ donc

$$P_0 = \sin(0)L_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)L_2 = L_2 = \frac{X-0}{\pi/2-0} = \frac{2}{\pi}X\,;$$

— le polynôme P_1 est le polynôme d'interpolation de f en $\pi/2$ et π donc

$$P_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)L_1 + \sin(\pi)L_2 = L_1 = \frac{X-\pi}{\pi/2-\pi} = -\frac{2}{\pi}(X-\pi).$$

On en déduit que

$$\boxed{Q_2(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\,; \\[2ex] -\dfrac{2}{\pi}(x-\pi) & \text{si } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi-\right[. \end{cases}}$$

Le graphe de Q_2 est représenté figure 1.

2. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction P_j est continue sur $\left[\frac{j\pi}{n}, \frac{(j+1)\pi}{n}\right]$ car polynomiale. La fonction Q_n est donc continue sur $[0,1]$ sauf éventuellement en les réels $\frac{j\pi}{n}$ avec $j \in [\![1, n-1]\!]$.

Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. Par continuité à gauche de Q_n en $\frac{j\pi}{n}$, on a

$$\lim_{\substack{x \to j\pi/n \\ x < j\pi/n}} Q_n(x) = P_{j-1}\left(\frac{j\pi}{n}\right).$$

Par continuité à droite de Q_n en $\frac{j\pi}{n}$, on a

$$\lim_{\substack{x \to j\pi/n \\ x > j\pi/n}} Q_n(x) = P_j\left(\frac{j\pi}{n}\right).$$

La fonction Q_n est donc continue en $\frac{j\pi}{n}$ si et seulement si

$$P_{j-1}\left(\frac{j\pi}{n}\right) = P_j\left(\frac{j\pi}{n}\right).$$

Puisque P_{j-1} est le polynôme d'interpolation de sin en les points d'abscisses $\frac{(j-1)\pi}{n}$ et $\frac{j\pi}{n}$, on a

$$P_{j-1}\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \sin\frac{j\pi}{n}.$$

Puisque P_j est le polynôme d'interpolation de sin en les points d'abscisses $\frac{j\pi}{n}$ et $\frac{(j+1)\pi}{n}$, on a

$$P_j\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \sin\frac{j\pi}{n}.$$

On a donc

$$P_{j-1}\left(\frac{j\pi}{n}\right) = P_j\left(\frac{j\pi}{n}\right).$$

Finalement,

$$\boxed{\text{la fonction } Q_n \text{ est continue sur } [0,\pi].}$$

3. Soit $a < b$ deux réels. La fonction $x \mapsto (x-a)(x-b)$ est négative sur $[a,b]$ et minimale en $\frac{a+b}{2}$ (sa dérivée est $2x-(a+b)$). Son minimum vaut $-\frac{(b-a)^2}{4}$ et donc

$$\forall x \in [a,b] \qquad |(x-a)(x-b)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

En appliquant ceci à $a = \frac{k\pi}{n}$ et $b = \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}$, on obtient que

$$\boxed{\forall x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right] \qquad \left|\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right| \leq \frac{\pi^2}{4n^2}.}$$

4. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Pour tout $x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right[$, on a

$$|f(x) - Q_n(x)| = |f(x) - P_k(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right[} \left|\left(t - \frac{k\pi}{n}\right)\left(t - \frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right|$$

grâce à B.III.3 et parce que $\left|\sin^{(2)}\right| = |\sin| \leq 1$. En utilisant la question précédente, on trouve

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

On a

$$[0,\pi[= \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right[\qquad \text{et } f(\pi) = P_{n-1}(\pi) = Q_n(\pi).$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [0,\pi] \qquad |f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{\pi^2}{8n^2}.}$$

III. Dans la première méthode, l'erreur commise en approchant f par le polynôme P est au plus $\frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}$. Dans la deuxième méthode, l'erreur commise en approchant f par la fonction affine par morceaux Q_n est au plus $\frac{\pi^2}{8n^2}$. On dira que la première méthode est meilleure que la première si et seulement si l'on est sûr que l'erreur commise en appliquant la première méthode est inférieure au majorant de l'erreur commise en utilisant la deuxième méthode. La première méthode est donc meilleure si et seulement si

$$\frac{\pi^3\sqrt{3}}{216} \leq \frac{\pi^2}{8n^2} \Leftrightarrow n \leq \left\lfloor \sqrt{\frac{27}{\pi\sqrt{3}}} \right\rfloor.$$

On en déduit que

- La première méthode est meilleure si $n \leq 2$;
- le seconde méthode est meilleure du $n \geq 3$.

Partie D : déterminant de Vandermonde

En utilisant deux méthodes, on établit une condition nécessaire et suffisante à l'inversibilité de la matrice de Vandermonde. La première méthode utilise la bijectivité de l'application linéaire F introduite partie A. La deuxième méthode repose sur un calcul de déterminant par récurrence. Ce calcul n'utilise que les propriétés élémentaires du déterminant.

I. Si $n = 2$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{\text{si } n = 2 \text{ alors } \det A = a_2 - a_1.}$$

Si $n = 3$, alors

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) \\ 0 & a_3 - a_1 & (a_3 - a_1)(a_3 + a_1) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_3 \to \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1 \end{matrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2 + a_1 \\ 1 & a_1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & 1 & a_2+a_1 \\ 1 & 1 & a_3+a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & 1 & a_2+a_1 \\ 0 & 0 & a_3-a_2 \end{vmatrix} \mathcal{L}_3 \to \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_2$$
$$= (a_3 - a_2).$$

On en déduit

$$\boxed{\text{si } n = 3 \text{ alors } \det \mathrm{A} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).}$$

II. Première méthode.

1. On munit $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ de sa base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \dots, \mathrm{X}^{n-1})$ et $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}^j) = (a_1^j, \dots, a_n^j) = \sum_{k=1}^{n} a_k^j e_k.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{la matrice A est la matrice de F dans les bases canoniques de } \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] \text{ et } \mathbb{R}^n.}$$

2. Supposons que pout tout $(j,k) \in [\![0, n-1]\!]^2$, si $j \neq k$ alors $a_j \neq a_k$. L'application linéaire F est donc bijective grâce à la question A.II.3. La matrice de F dans toute base est donc inversible. En particulier,

$$\boxed{\text{Si les } a_k \text{ sont deux à deux distincts alors A est inversible.}}$$

3. S'il existe $(j,k) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tel que $j \neq k$ et $a_j = a_k$, alors la matrice A a deux lignes identiques. Son déterminant et donc nul.

$$\boxed{\text{Si deux des } a_k \text{ sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.}}$$

4. Les deux questions précédentes montrent que

$$\boxed{\text{la matrice } a \text{ est inversible si et seulement si les } a_k \text{ sont deux à deux distincts.}}$$

III. Seconde méthode.

1. Le polynôme P est de degré $n-1$ comme produit de $n-1$ polynômes de degré 1. Chacun des facteurs de degré 1 a 1 pour terme dominant. On en déduit :

$$\boxed{\text{il existe } (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ tel que } \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{n-1} + \lambda_{n-2}\mathrm{X}^{n-2} + \dots + \lambda_1 \mathrm{X} + \lambda_0.}$$

2. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, le j^{e} terme de la colonne $\mathrm{C}_n + \lambda_{n-2}\mathrm{C}_{n-1} + \dots + \lambda_0 \mathrm{C}_1$ est

$$a_j^{n-1} + \lambda_{n-2} a_j^{n-2} + \dots + \lambda_0 a_j^0 = \mathrm{P}(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq n-1 \,; \\ \mathrm{P}(a_n) & \text{si } j = n. \end{cases}$$

On a donc

$$\boxed{C_n + \lambda_{n-2} C_{n-1} + \ldots + \lambda_0 C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}.}$$

3. L'opération élémentaire $C_n \leftarrow C_n + \lambda_{n-2} C_{n-1} + \ldots + \lambda_0 C_1$, montre que

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & 0 \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & P(a_n) \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve

$$\boxed{\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-2}^2 & \ldots & a_{n-2}^{n-2} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.}$$

4. Pour tout entier $n \geq 2$, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on note

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse : « pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq k < \ell \leq n} (a_\ell - a_k)$ ».

D'après I, pour tout $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $\Delta_2 = a_2 - a_1$. Or $\prod_{1 \leq k < \ell \leq 2} (a_\ell - a_k) = a_2 - a_1$. L'hypothèse $\mathcal{H}(2)$ est vraie.

Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Soit $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors, par III.3, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(a_1, \ldots, a_{n+1}) &= \left(\prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \right) \Delta(a_1, \ldots, a_n) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \right) \prod_{1 \leq k < \ell \leq n} (a_\ell - a_k) \qquad \text{grâce à } \mathcal{H}(n) \\
&= \prod_{1 \leq k < \ell \leq n+1} (a_\ell - a_k).
\end{aligned}$$

L'hypothèse $\mathcal{H}(n+1)$ est donc vraie.

L'hypothèse $\mathcal{H}(2)$ est vraie. pour tout entier $n \geq 2$, si l'hypothèse $\mathcal{H}(n)$ est vraie, alors l'hypothèse $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq k < \ell \leq n} (a_\ell - a_k).}$$

5. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or le produit $\prod_{1 \leq k < \ell \leq n} (a_\ell - a_k)$ est nul si et seulement si l'un des facteurs $a_\ell - a_k$ est nul donc si et seulement si au moins deux des a_k sont égaux.

$$\boxed{\text{La matrice } a \text{ est inversible si et seulement si les } a_k \text{ sont deux à deux distincts.}}$$

Partie E : application à la recherche de paraboles

Soit A_1, A_2 et A_3 trois points distincts du plan affine euclidien. On montre qu'il existe au moins une parabole passant par ces trois points si et seulement s'ils ne sont pas alignés et que s'il existe une telle parabole, alors il en existe une infinité dont on caractérise les axes.

I.

1. Pour toute parabole $\mathcal{P}$ d'axe parallèle à D, il existe $(\gamma, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que l'équation de $\mathcal{P}$ est $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Un point du plan de coordonnées (x, y) passe donc par une parabole d'axe D si et seulement s'il existe $(\gamma, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. On en déduit qu'

il existe une parabole d'axe parallèle à D et passant par A_1, A_2 et A_3 si et seulement s'il existe $(\gamma, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que

$$(S) \quad \begin{cases} \gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha = b_1 \\ \gamma + a_2\beta + a_3^2\alpha = b_2 \\ \gamma + a_3\beta + a_3^2\alpha = b_3. \end{cases}$$

2. Soit $(j,k) \in [\![1,3]\!]^2$ tels que $j \neq k$ et $a_j = a_k$. Alors les lignes j et k du système S ont même membre de gauche. Dans ce cas, si le système a des solutions, alors $b_j = a_k$ et alors $A_j = a_k$ ce qui contredit les hypothèses.

Si deux des points A_1, A_2 et A_3 ont même abscisse, alors le système (S) n'a pas de solution.

3.

a. La matrice du système (S) est $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}$. Puisque a_1, a_2 et a_3 sont deux à deux distincts, la partie D implique que cette matrice est inversible. Le système S a donc une solution unique

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Si a_1, a_2 et a_3 sont deux à deux distincts, le système (S) a une solution unique.

b. D'après la formule de Cramer, on a

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}}.$$

Or, par les opérations élémentaires $\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1$, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ 0 & a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix}.$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}}$$

Voilà une méthode alternative si l'on ne connaît pas la formule de Cramer. Puisque

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

on utilise la méthode du pivot de Gauss pour inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}$. On obtient la suite de tableaux suivante.

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|} 1 & a_1 & a_1^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. , \quad \left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & a_1 & a_1^2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & a_2 - a_1 & (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) & -1 & 1 & 0 & \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 \\ 0 & a_3 - a_1 & (a_3 - a_1)(a_3 + a_1) & -1 & 0 & 1 & \mathcal{L}_3 \to \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & a_1 & a_1^2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & a_2 + a_1 & -\frac{1}{a_2-a_1} & \frac{1}{a_2-a_1} & 0 & \mathcal{L}_2 \to \frac{1}{a_2-a_1}\mathcal{L}_2 \ (a_2 \neq a_1) \\ 0 & 1 & a_3 + a_1 & -\frac{1}{a_3-a_1} & 0 & \frac{1}{a_3-a_1} & \mathcal{L}_3 \to \frac{1}{a_3-a_1}\mathcal{L}_3 \ (a_3 \neq a_1) \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & a_1 & a_1^2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & a_2 + a_1 & -\frac{1}{a_2-a_1} & \frac{1}{a_2-a_1} & 0 & \mathcal{L}_2 \to \frac{1}{a_2-a_1}\mathcal{L}_2 \ (a_2 \neq a_1) \\ 0 & 0 & a_3 - a_2 & \frac{a_3-a_2}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} & -\frac{1}{a_2-a_1} & \frac{1}{a_3-a_1} & \mathcal{L}_3 \to \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & a_1 & a_1^2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & a_2 + a_1 & -\frac{1}{a_2-a_1} & \frac{1}{a_2-a_1} & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} & -\frac{1}{(a_3-a_2)(a_2-a_1)} & \frac{1}{(a_3-a_2)(a_3-a_1)} & \mathcal{L}_3 \to \frac{1}{a_3-a_2}\mathcal{L}_3 \ (a_3 \neq a_2) \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & a_1 & 0 & \frac{a_2a_3-a_1a_2-a_1a_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} & \frac{a_1^2}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)} & -\frac{a_1^2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} & \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1 - a_1^2\mathcal{L}_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a_2+a_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} & \frac{a_1+a_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)} & -\frac{a_1+a_2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} & \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_2 - (a_1 + a_2)\mathcal{L}_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} & -\frac{1}{(a_3-a_2)(a_2-a_1)} & \frac{1}{(a_3-a_2)(a_3-a_1)} & \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a_2a_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} & -\frac{a_1a_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)} & \frac{a_1a_2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a_2+a_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} & \frac{a_1+a_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)} & -\frac{a_1+a_2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} & -\frac{1}{(a_3-a_2)(a_2-a_1)} & \frac{1}{(a_3-a_2)(a_3-a_1)} \end{array}\right| \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1 - a_1\mathcal{L}_2$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_2a_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} & -\frac{a_1a_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)} & \frac{a_1a_2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \\ -\frac{a_2+a_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} & \frac{a_1+a_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)} & -\frac{a_1+a_2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \\ \frac{1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} & -\frac{1}{(a_3-a_2)(a_2-a_1)} & \frac{1}{(a_3-a_2)(a_3-a_1)} \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{b_1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} - \frac{b_2}{(a_3-a_2)(a_2-a_1)} + \frac{b_3}{(a_3-a_2)(a_3-a_1)} \\ &= \frac{-a_2b_1 + a_3b_1 + a_1b_2 - a_3b_2 - a_1b_3 + a_2b_3}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}. \end{aligned}$$

Au dénominateur, la question D.III.4 permet de reconnaître le déterminant de A. Au numérateur, c'est la question E.I.3.c qui met sur la piste : en développant $(a_2-a_1)(b_3-b_1)-(a_3-a_1)(b_2-b_1)$, on voit que

$$-a_2b_1+a_3b_1+a_1b_2-a_3b_2-a_1b_3+a_2b_3 = (a_2-a_1)(b_3-b_1)-(a_3-a_1)(b_2-b_1) = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix}$$

et on retrouve donc

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}}.$$

c.

La question précédente implique l'équivalence de $\alpha = 0$ et de $\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix} = 0.$

On a donc i) $\Leftrightarrow$ ii).

Supposons $\alpha = 0$. Puisque (γ, β, α) est solution du système (S), on a alors $\beta a_j + \gamma = b_j$ pour tout $j \in [\![1,3]\!]$. Les points de coordonnées (a_j, b_j) sont alors sur la droite d'équation $y = \beta x + \gamma$, autrement dit les points A_1, A_2 et A_3 sont alignés. On a donc i) $\Rightarrow$ iii).

Supposons enfin que les points A_1, A_2 et A_3 sont alignés. Il existe alors $(\beta', \gamma') \in \mathbb{R}^2$ tel que chacun de ces points appartient à la droite d'équation $y = \beta' x + \gamma'$, autrement dit $\beta' a_j + \gamma' = b_j$ pour tout $j \in [\![1,3]\!]$. On en déduit que $(\gamma', \beta', 0)$ est solution de (S). Par unicité de la solution de (S) on obtient $(\gamma', \beta', 0) = (\gamma, \beta, \alpha)$ et en particulier $\alpha = 0$. On a donc iii) $\Rightarrow$ i) puis i) $\Leftrightarrow$ iii).

Enfin l'équivalence ii) $\Leftrightarrow$ iii) résulte de ii) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ iii) et iii) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ ii).

Les assertions suivantes sont équivalentes

i) $\alpha = 0$

ii) $\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0$

iii) A_1, A_2 et A_3 sont alginés.

4. Le problème posé en I admet au moins une solution

— si et seulement si le système (S) admet au moins une solution (γ, β, α) avec $\alpha \neq 0$ d'après I.1 ;
— si et seulement si les points A_1, A_2 et A_3 ont des abscisses distinctes et ne sont pas alignés d'après I.2 et I.3 ;
— si et seulement si les points A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés et auncun couple de ces points ne déterminent une droite parallèle à l'axe des ordonnées (axe qui est la droite D).

Il existe une parabole d'axe parallèle à D passant par A_1, A_2 et A_3 si et seulement si ces points ne sont pas alignés et aucune des droites (A_1A_2), (A_1A_3) et (A_2A_3) n'est parallèle à D.

II.

1. S'il existait une parabole contenant A_1, A_2 et A_3, soit D l'axe de cette parabole. Alors la parabole contenant A_1, A_2 et A_3 serait une solution au problème posé en I. Cela contredirait la conclusion trouvée en I.4.

Si A_1, A_2 et A_3 sont alignés, aucune parabole ne les contient.

2. Il existe une infinité de droite non parallèle à l'une des droites (A_1A_2), (A_1A_3) et (A_2A_3). Soit D une telle droite. D'après I.4, il existe une parabole d'axe D passant par A_1, A_2 et A_3. Comme deux paraboles d'axes distincts sont nécessairement distinctes, on en déduit qu'

Si A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés, il existe une infinité de paraboles les contenant.