Mardi 6 septembre 2016

8h - 13h

Le sujet comporte un problème et un exercice

Il sera tenu compte de façon importante de la qualité de la rédaction et de l'argumentation. En particulier, répondre juste à une question est valorisé, répondre faux est pénalisé et ne pas répondre n'est ni valorisé ni pénalisé.

Le sujet comporte quatre pages en plus de cette page de présentation.

Sources
concours Arts et métiers ParisTech - ESTP - Polytech, mathématiques A PSI, 2014
concours Arts et métiers ParisTech - ESTP - Polytech, mathématiques 1 MP, 2016

Problème

Etant donné un entier naturel n on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et dont le degré est inférieur ou égal à n.

Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que P est de degré n lorsque le coefficient a_n est non nul ; ce coefficient est alors appelé « *coefficient dominant de P* ». Dans tout le problème on identifie le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et sa fonction polynomiale associée.

Pour tout entier naturel n, on appelle c_n la fonction définie pour $x \in [-1, 1]$ par : $c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

PARTIE 1.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, la fonction c_n est continue sur [-1,1].

2. Pour $x \in [-1, 1]$, donner une expression polynomiale de $c_0(x)$, $c_1(x)$, $c_2(x)$ et $c_3(x)$.

3. Représenter graphiquement dans un même repère orthonormal les fonctions c_0, c_1, c_2 et c_3.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1, 1]$, $c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2\,x\,c_n(x)$.

5. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrer que pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.

6. Prouver que, pour tout entier naturel n, la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = c_n(x)$.

PARTIE 2.

1. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

1.1 Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.

Dans toute la suite du problème $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire.

1.2 Soient p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(p\,\theta)\,\cos(q\,\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Démontrer que, si l'on a $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$.

Calculer $I_{p,p}$.

1.3 Montrer que, pour tout entier naturel n, la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ définie dans la partie **1** est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Cette base est-elle orthonormale ?

1.4 Prouver que pour tout entier naturel n non nul, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1.5 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(X^n|T_n) = \dfrac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ des réels et P le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

2.1 Justifier l'existence d'une unique famille de réels $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ telle que l'on a : $P = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k$

2.2 Calculer b_n.

2.3 Montrer que l'on a : $\|P\|^2 \geqslant \dfrac{\pi}{2} b_n^2$

2.4 En déduire la valeur de :

$$\operatorname*{Inf}_{(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t \right)$$

Partie 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on pose $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\,\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

1. Vérifier que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynôme T_n défini dans la partie **1** .

2. Soit $\mathscr{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $(x_1, \ldots, x_n)$, c'est-à-dire les polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui, pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_i^j$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker : $\delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

2.1 $\mathscr{L}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

2.2 Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall\, G \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, G(x_i) \quad \text{avec} \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_j = \int_{-1}^{1} \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$$

2.3 Soit $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

2.3a Justifier l'existence et l'unicité de deux polynômes S et U de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que : $R = S\, T_n + U$.

2.3b Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, R(x_i)$$

2.4 Dans toute cette question on fixe un entier naturel k dans $[\![1, n]\!]$.

2.4a On rappelle que $\forall x \in [-1, 1],\ T_n(x) = c_n(x)$ (voir partie 1.).

Montrer que :

$$T_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1}\, n}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1}\, n}{\sin(\theta_k)}$$

2.4b Soit la fonction $\psi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} \psi_k(x) = \dfrac{T_n(x)}{(x - x_k)\, T_n'(x_k)} & \text{lorsque } \; x \neq x_k \\ \text{et} & \\ \psi_k(x_k) = 1 & \end{cases}$

Vérifier que, pour tout x réel, on a : $\psi_k(x) = L_k(x)$.

2.4c Soit $j \in \mathbb{N}$.

Calculer $\displaystyle\lim_{\theta \to \theta_k} \frac{\cos(j\,\theta) - \cos(j\,\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle u_j = \int_0^\pi \frac{\cos(j\,\theta) - \cos(j\,\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} \,\mathrm{d}\theta$ existe.

Montrer que l'on a $\lambda_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{n}\, u_n \, \sin(\theta_k)$.

2.4d Vérifier que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad u_{j+2} - 2\, u_{j+1} \cos(\theta_k) + u_j = 0$$

2.4e En déduire que $\lambda_k = \dfrac{\pi}{n}$.

3. Démontrer que, pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a la relation :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} R\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\,\pi}{2n}\right)\right)$$

Exercice

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.

On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0,1[$ et le produit B avec la probabilité $1-p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = \max(X,Y)$.

1. On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X, la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

2. Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N = n]$ est réalisé ?

3. Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).

4. En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

5. Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6. En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\mathbf{Cov}(X, N)$.

7. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k,x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $\mathbf{P}(Z \leq k)$ en fonction de λ, $S(k,\lambda p)$ et $S(k,\lambda(1-p))$.

8. On utilise dans cette question le langage de programmation PYTHON.

(a) Définir la fonction `S(k,x)` qui calcule $S(k,x)$ à partir des valeurs de k et x données.

(b) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.