Département de mathématiques et informatique
Emmanuel Royer – 30/9/2016, 15:49
Préparation au CAPES

Devoir du 6 septembre 2016 – Corrigé

Problème

Partie 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on montre que la fonction $x \mapsto c_n(n \arccos x)$ définie sur $[-1,1]$ coïncide avec la restriction à $[-1,1]$ d'une fonction polynomiale T_n puis que la famille $(\mathrm{T}_0,\dots,\mathrm{T}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction arccos est continue sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,\pi]$. La fonction $n\arccos$ est continue sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,n\pi] \subset \mathbb{R}$. La fonction cos étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de composition des fonctions continues implique que $x \mapsto \cos(n \arccos x))$ est continue sur $[-1,1]$.

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } c_n \text{ est continue sur } [-1,1].}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule

$$c_0(x) = \cos(0 \arccos x) = \cos(0) = 1$$

puis

$$c_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

et

$$c_2(x) = \cos(2\arccos x) = 2\cos^2(2\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Pour calculer c_3, on commence par évaluer $\cos(3a)$ pour tout réel a. On a

$$\begin{aligned}
\cos(3a) = \mathfrak{Re}(e^{3ia}) &= \mathfrak{Re}\left((\cos a + i\sin a)^3\right)\\
&= \mathfrak{Re}\left(\cos^3 a + 3\cos^2(a)(i\sin a) + 3\cos(a)(i\sin a)^2 + (i\sin a)^3\right)\\
&= \cos^3 a - 3\cos(a)\sin^2 a = \cos^3 a - 3\cos(a)(1-\cos^2 a) = 4\cos^3 a - 3\cos a.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\cos^3(3\arccos x) = 4\cos^3(\arccos x) - 3\cos(\arccos x) = 4x^3 - 3x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a montré

$$\boxed{c_0(x) = 1,\ c_1(x) = x,\ c_2(x) = 2x^2 - 1,\ c_3(x) = 4x^3 - 3x.}$$

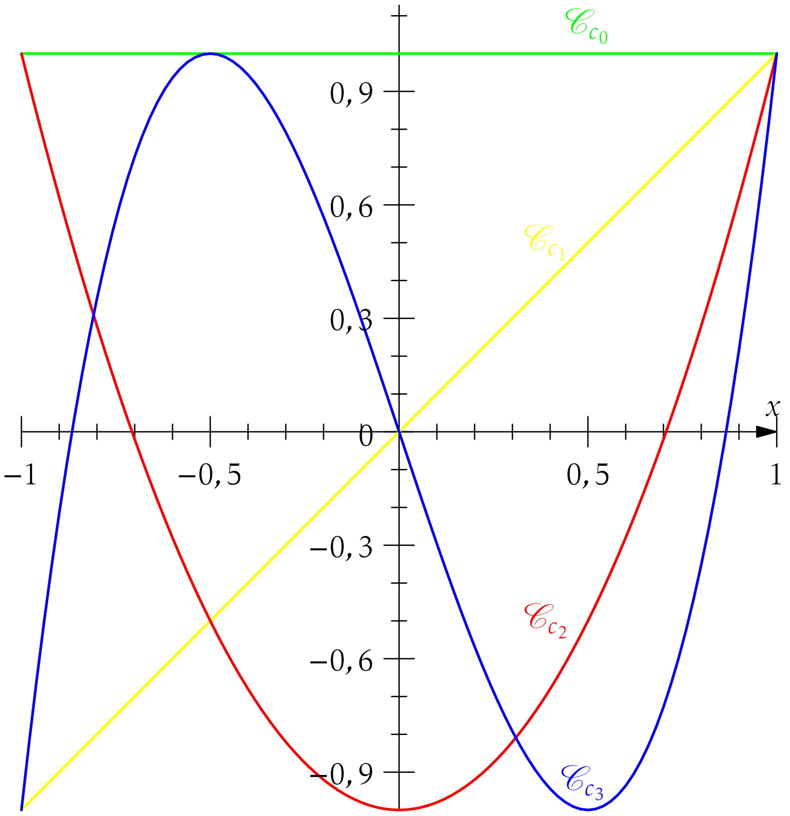

FIGURE 1 – Graphes de c_0, c_1, c_2 et c_3

3. Le graphe de c_0 est un segment horizontal d'ordonnée 1 (en vert) et le graphe de c_1 une droite de pente 1 passant par l'origine (en jaune). Le graphe de c_2 est un arc de parabole. Pour tout $x \in]-1,1[$, on calcule $c_2'(x) = 4x$ de sorte que c_2 est strictement décroissante sur $]-1,0[$ et strictement croissante sur $]0,1[$. On a $c_2(-1) = c_2(1) = 1$, $c_2(0) = -1$. De plus c_2 s'annule en $\pm\sqrt{2}/2$. Le graphe de c_2 est représenté en rouge. Enfin, pour tout $x \in]-1,1[$, on calcule $c_3'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1)$ de sorte que c_3 est strictement croissante sur $]-1,-1/2[$, strictement décroissante sur $]-1/2,1/2[$ et enfin strictement croissante sur $]1/2,1[$. On a $c_3(-1) = -1$, $c_3(1) = 1$, $c_3(-1/2) = 1$ et $c_3(1/2) = -1$. Enfin $c_3(x) = x(4x^2 - 3)$ donc c_3 s'annule en 0, en $-\sqrt{3}/2$ et en $\sqrt{3}/2$. Le graphe de c_3 est représenté en bleu. Les graphes de quatre fonctions sont représentés figure 1.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$. On calcule

$$\begin{aligned} c_{n+1}(x) &= \cos\left(n \arccos x + \arccos x\right) \\ &= \cos(n \arccos x)\cos(\arccos x) - \sin(n \arccos x)\sin(\arccos x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n-1}(x) &= \cos(n\arccos x - \arccos x) \\ &= \cos(n\arccos x)\cos(\arccos x) + \sin(n\arccos x)\sin(\arccos x). \end{aligned}$$

En sommant, on obtient

$$c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2\cos(n\arccos x)\cos(\arccos x) = 2c_n(x)x.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$, on a montré

$$\boxed{c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x).}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse :

pour tout entier naturel $k \leq n$, T_k est un polynôme de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1}.

Puisque $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, l'hypothèse $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. On a $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$. Grâce à $\mathcal{H}(n)$, T_n et T_{n-1} sont des polynômes. T_{n+1} est alors obtenu par somme et produit de polynôme, c'est un polynôme. Grâce à $\mathcal{H}(n)$, T_n et T_{n-1} sont de degrés respectifs n et $n-1$. On a donc

$$T_n = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \quad \text{et} \quad T_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j.$$

On en tire

$$T_{n+1} = 2\sum_{j=0}^{n} a_j X^{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j = 2a_n X^{n+1} + 2a_{n-1}X^n + \sum_{\ell=1}^{n-1}(2a_{\ell-1} - b_\ell)X^\ell - b_0.$$

Le coefficient de X^{n+1} est $2a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n \neq 0$ grâce à $\mathcal{H}(n)$. On en déduit que T_{n+1} est de degré $n+1$ et coefficient dominant 2^n. L'hypothèse $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

L'hypothèse $\mathcal{H}(1)$ est vraie. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si $\mathcal{H}(n)$ alors $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{T_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et coefficient dominant } 2^{n-1}.}$$

6. La famille $(T_j)_{0\leq j\leq n}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, cette famille contient $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments. On en déduit que

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la faminle } T_0, \ldots, T_n \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Note– Pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, soit P_j un polynôme de degré j. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse : la famille $P_0, \dots, P_n$ est une famille libre. L'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est vraie : en effet, $\deg P_0 = 0$ donc P_0 est non nul et alors la famille (P_0) est libre. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$ une famille de réels tels que

$$Q = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j P_j = 0.$$

Notons $p_{n+1} \neq 0$ le coefficient dominant de P_{n+1}, c'est le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1}. Le coefficient en X^{n+1} de Q est $\lambda_{n+1} p_{n+1}$. Puisque $X^0, \dots, X^{n+1}$ est une famille libre, on a donc $\lambda_{n+1} p_{n+1} = 0$. Ainsi $\lambda_{n+1} = 0$ et

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j = 0.$$

Grâce à $\mathcal{H}(n)$, on a alors $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$. Finalement, $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $P_0, \dots, P_n$ est une famille libre.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse

$$\forall k \leq n \qquad \forall x \in [-1,1], \qquad c_n(x) = T_n(x).$$

L'hypothèse $\mathcal{H}(1)$ est vraie car $c_1(x) = 1$ pour tout $x \in [-1,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. On a alors

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \begin{cases} T_n(x) = c_n(x) \\ T_{n-1}(x) = c_{n-1}(x). \end{cases}$$

Or, pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$\begin{aligned} c_{n+1}(x) &= 2x c_n(x) - c_{n-1}(x) \quad \text{par 4)} \\ &= 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{par } \mathcal{H}(n) \\ &= T_{n+1}(x) \quad \text{par 5).} \end{aligned}$$

Par récurrence, on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1] \quad c_n(x) = T_n(x).}$$

Partie 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On montre que la base $(T_0, \ldots, T_n)$ est orthogonale pour ce produit scalaire. On utilise ce résultat pour calculer la borne inférieure d'une famille d'intégrale paramétrée sur $\mathbb{R}^n$.

1.

1.1. Soit P et Q deux polynômes. La fonction $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. L'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ est donc définie si et seulement si elle est convergente en -1 et en 1. Or,

$$\forall t \in [0,1[\qquad \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$ est bornée (car continue) sur $[0,2]$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable en 1 puisqu'une primitive est $t \mapsto -2\sqrt{1-t}$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ est donc définie. De façon similaire,

$$\forall t \in]-1,0] \qquad \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}}$ est bornée (car continue) sur $[-2,0]$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ est intégrable en -1 puisqu'une primitive est $t \mapsto 2\sqrt{1-t}$. L'intégrale $\int_{-1}^{0} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ est donc définie.

Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on peut donc définir

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

L'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ est bilinéaire sur $\mathbb{R}[X]^2$ par bilinéarité du produit de $\mathbb{R}[X]$ et linéarité de l'intégrale.

L'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ est bilinéaire sur $\mathbb{R}[X]^2$ par symétrie du produit de $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $t \in]0,1[$, on a $\frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\langle P,P\rangle \geq 0$. L'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ est donc positive sur $\mathbb{R}[X]^2$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P,P\rangle = 0$. L'application $t \mapsto \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. On déduit donc de $\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0$ que $P(t) = 0$ pour tout $t \in]-1,1[$. Le polynôme P a donc une infinité de racine et il est nul. L'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ est donc définie sur $\mathbb{R}[X]^2$.

$$\boxed{\text{L'application } (P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

1.2. Pour tout $(p,q,\theta) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\cos(p\theta)\cos(q\theta) = \frac{1}{2}\cos((p+q)\theta) + \frac{1}{2}\cos((p-q)\theta).$$

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \neq q$. On a $p-q \neq 0$. De plus $p+q \neq 0$ puisque dans le cas contraire, on aurait $p=q=0$. On en déduit

$$\mathrm{I}_{p,q} = \frac{1}{2(p+q)}\Big[\sin((p+q)\theta)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2(p-q)}\Big[\sin((p-q)\theta)\Big]_0^{\pi} = 0.$$

D'autre part, pour tout $(p,\theta) \in \mathbb{R}^2$, on a $\cos^2(p\theta) = \frac{1}{2}(1+\cos(2p\theta))$. Si $p \neq 0$, on en déduit

$$\mathrm{I}_{p,p} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4p}\Big[\sin(2p\theta)\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

et si $p=0$, on en déduit $\mathrm{I}_{0,0} = \pi$.

Pour tous $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a montré

$$\boxed{\mathrm{I}_{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q\,; \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } p \neq 0 \text{ et } q = p\,; \\ \pi & \text{si } p = q = 0. \end{cases}}$$

1.3. Soit p et q deux entiers distincts dans $\{0,\ldots,n\}$, on doit montrer que $\langle \mathrm{T}_p, \mathrm{T}_q\rangle = 0$. On a

$$\langle \mathrm{T}_p, \mathrm{T}_q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{c_p(t)c_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(p\arccos(t))\cos(q\arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

d'après la question 7 de la partie 1. La fonction arccos étant dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée $t \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, on trouve

$$\langle \mathrm{T}_p, \mathrm{T}_q\rangle = -\int_{-1}^{1} \cos(p\arccos(t))\cos(q\arccos(t))\arccos'(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction arccos est C^1 sur $]-1,1[$, strictement décroissante sur $]-1,1[$ et à valeurs dans $]0,\pi[$. Par changement de variables, on a donc

$$\langle \mathrm{T}_p, \mathrm{T}_q\rangle = \int_0^{\pi} \cos(pu)\cos(qu)\,\mathrm{d}u = \mathrm{I}_{p,q} = 0$$

et la base $(\mathrm{T}_0,\ldots,\mathrm{T}_n)$ est orthogonale.

D'autre part, si $n > 0$, $\langle \mathrm{T}_n, \mathrm{T}_n\rangle = \pi/2 \neq 1$ et donc la base n'est pas orthonormale.

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}\text{, la base } (\mathrm{T}_0,\ldots,\mathrm{T}_n) \text{ est orthognonale mais n'est pas orthonormale.}}$

1.4. D'après la question 6 de la partie 1, la famille $(\mathrm{T}_0,\ldots,\mathrm{T}_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. D'après la question précédente, pour tout entier $j \in \{0,\ldots,n-1\}$, on a $\langle \mathrm{T}_j, \mathrm{T}_n\rangle = 0$. Par linéarité à gauche du produit scalaire, on a donc $\langle \mathrm{P}, \mathrm{T}_n\rangle = 0$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{, le polynôme } \mathrm{T}_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}].}$

1.5. Puisque X^n est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ dont une base est $(T_0,\dots,T_n)$, il existe $(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$X^n=\sum_{j=0}^{n}x_jT_j=\sum_{j=0}^{n-1}x_jT_j+x_nT_n \quad \text{avec} \quad \sum_{j=0}^{n-1}x_jT_j\in\mathbb{R}_{n-1}[X].$$

D'après la question précédente, on a donc

$$\langle X^n,T_n\rangle=x_n\langle T_n,T_n\rangle=x_n\|T_n\|^2.$$

Puisque $X^n-x_nT_n$ est de degré $n-1$ au plus, le coefficient dominant de x_nT_n est 1. D'après la question 5 de la partie 1, on en tire $2^{n-1}x_n=1$ puis $x_n=1/2^{n-1}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \langle X^n,T_n\rangle=\frac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}.}$$

2.

2.1. Le polynôme P est un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Une base de cet espace vectoriel est $(T_0,\dots,T_n)$ d'après la question 6 de la partie 1. On en déduit qu'

$$\boxed{\text{il existe une unique famille de réels } (b_0,\dots,b_n) \text{ telle que } P=\sum_{k=0}^{n}b_kT_k.}$$

2.2. Le coefficient dominant de P est 1. D'autre part, grâce à la question 5 de la partie 1, le coefficient dominant de $\sum_{k=0}^{n}b_kT_k$ est $2^{n-1}b_n$. On en déduit que

$$\boxed{b_n=\frac{1}{2^{n-1}}.}$$

2.3. On calcule

$$\langle P,P\rangle=\left\langle\sum_{k=0}^{n}b_kT_k,\sum_{j=0}^{n}b_jT_j\right\rangle=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}b_kb_j\langle T_k,T_j\rangle$$

par bilinéarité du produit scalaire. La base $(T_0,\dots,T_n)$ étant orthogonale, on obtient alors

$$\langle P,P\rangle=\sum_{k=0}^{n}b_k^2\langle T_k,T_k\rangle$$

et donc

$$\|P\|^2=\sum_{k=0}^{n}b_k^2\|T_k\|^2.$$

Puisque $\sum_{k=0}^{n-1}b_k^2\|T_k\|^2\geq 0$, on trouve

$$\|P\|^2\geq b_n^2\|T_n\|^2=\frac{\pi}{2}b_n^2$$

grâce à la question 1.2 de la partie 2.

$$\boxed{\|P\|^2 \geq \frac{\pi}{2} b_n^2.}$$

2.4. Notons $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$, on a donc

$$\mathcal{P}_n = \left\{ P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ avec } (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}.$$

Ainsi,

$$\inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-1}^{1} \frac{\left(t_n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0\right)^2}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|P\|^2.$$

D'après les questions 2.3 et 2.2 précédentes, on a

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|P\|^2 \geq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{2^{2n-2}} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

D'autre part, $2^{1-n}T_n \in \mathcal{P}_n$ et

$$\|2^{1-n}T_n\|^2 = 2^{2-2n}\|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$$

d'après la question 1.3 de la partie 2 donc

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|P\|^2 \leq \frac{\pi}{2^{2n-1}} \quad \text{et} \quad \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|P\|^2 = \frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

On a donc

$$\boxed{\inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-1}^{1} \frac{\left(t_n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0\right)^2}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2^{2n-1}}.}$$

Partie 3.

Pour tout polynôme P de degré impair, on calcule la valeur de

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{R}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$ on a $\mathrm{T}_n(x_k) = c_n(\cos\theta_k) = \cos(n\arccos(\cos\theta_k))$. Puisque $\theta_k \in [0,\pi]$, on a $\arccos(\cos\theta_k) = \theta_k$ et donc $\mathrm{T}_n(x_k) = \cos(k\pi - \pi/2) = 0$. Pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, le réel x_k est donc une racine de T_n. D'autre part, si k et k' sont deux entiers distincts de $\{1,\dots,n\}$, on a $x_k \neq x_{k'}$. On a donc trouvé n racines distinctes du polynôme T_n de degré n. On en déduit que

$$\boxed{x_1,\dots,x_n \text{ sont les racines de } \mathrm{T}_n.}$$

2.

2.1. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{L}_i = 0.$$

Soit $j \in \{1,\dots,n\}$. On évalue l'égalité précédente en x_j et on obtient

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i^j = \lambda_j.$$

Ainsi, pour tout j, $\lambda_j = 0$; la famille $\mathcal{L}$ est libre. De plus, cette famille contient n éléments et $n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ donc

$$\boxed{\text{la famille } \mathcal{L} \text{ est une base de } \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}].}$$

2.2. Pour tout polynôme P, l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ convergne pour les raisons données à la question 1.1 de la partie 2. Soit $\mathrm{G} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. D'après la question précédente, il existe des réels $g_1,\dots,g_n$ tels que

$$\mathrm{G} = \sum_{j=1}^{n} g_j \mathrm{L}_j.$$

Pour tout i, on a

$$\mathrm{G}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} g_j \mathrm{L}_j(x_i) = g_i$$

et donc

$$\mathrm{G} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{G}(x_j) \mathrm{L}_j.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit

$$\int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{j=1}^{n} G(x_j) \int_{-1}^{1} \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

$$\boxed{\forall G \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j G(x_j) \text{ avec } \lambda_j = \int_{-1}^{1} \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}$$

pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$.

2.3.

2.3a. Puisque T_n est un polynôme non nul de degré n, le théorème de division euclidienne des polynômes donne l'existence d'un unique couple de polynômes (S,U) tel que $R = ST_n + U$ et $U \in \mathbb{R}_{n-1}$. Le polynôme S est non nul car R est de degré $2n-1 > n-1$. On a donc $\deg(ST_n) \geq n > \deg(U)$ puis $\deg R = \deg(ST_n)$ et donc $\deg S = \deg R - n = n-1$.

$$\boxed{\text{Il existe un unique couple } (S,U) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2 \text{ tel que } R = ST_n + U.}$$

2.3b. On déduit de la question précédente que

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{S(t)T_(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{U(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \langle S, T_n\rangle + \int_{-1}^{1} \frac{U(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Puisque $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, la question 1.4 de la partie 2 implique $\langle S, T_n\rangle = 0$. De plus, $U \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, la question 2.2 de la partie 3 implique donc

$$\int_{-1}^{1} \frac{U(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j U(x_j).$$

Or, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, on calcule

$$U(x_j) = R(x_j) - S(x_j)T_n(x_j) = R(x_j)$$

puisque x_j est une racine de T_n.

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j R(x_j).}$$

2.4.

2.4a. La fonction c_n est dérivable sur $]-1,1[$ puisque arccos est dérivable sur $]-1,1[$ sur cos est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$c_n'(x) = -n \arccos'(x) \sin(n \arccos(x)) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n\arccos(x)).$$

Pour tout k, on a $\cos\theta_k \in [-1,1]$ et $\cos\theta_k \neq \pm 1$ car $\theta_k \in]0,\pi[$. On a donc

$$c_n'(x_k) = \frac{n}{\sqrt{1-x_k^2}} \sin(n \arccos(\cos\theta_k))$$

On a vu à la question 1 de la partie 3 que $\arccos(\cos\theta_k) = \theta_k$ est donc $\sin(n\arccos(\cos\theta_k)) = \sin(k\pi - \pi/2) = (-1)^{k+1}$. On trouve finalement

$$\boxed{c_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sqrt{1-x_k^2}}.}$$

Enfin, $1 - x_k^2 = 1 - \cos^2(\theta_k) = \sin^2(\theta_k)$ donc $\sqrt{1-x_k^2} = |\sin\theta_k|$. Mais $\theta_k \in]0,\pi[$ donc $\sin\theta_k > 0$ puis $|\sin\theta_k| = \sin\theta_k$. Finalement

$$\boxed{c_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sin\theta_k}.}$$

2.4b. D'après la question précédente, $T_n'(x_k) \neq 0$. La fonction

$$\varphi_k : x \mapsto \frac{T_n(x)}{(x-x_k)T_n'(x_k)}$$

est donc continue sur $]-\infty, x_k[$ et sur $]x_k, +\infty[$. De plus, si $x \in \mathbb{R} - \{x_k\}$, on a

$$\frac{T_n(x)}{(x-x_k)T_n'(x_k)} = \frac{1}{T_n'(x_k)} \cdot \frac{T_n(x) - T_n(x_k)}{x - x_k}$$

car x_k est une racine de T_n. La fonction T_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\lim_{x\to x_k} \frac{T_n(x) - T_n(x_k)}{x-x_k} = T_n'(x_k) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_k} \frac{T_n(x)}{(x-x_k)T_n'(x_k)} = 1.$$

La fonction ψ_k est donc le prolongement par continuité en 1 de φ_k.

Puisque x_k est une racine de T_n, la fonction $x \mapsto \frac{T_n(x)}{x-x_k}$ coïncide sur $\mathbb{R} - \{x_k\}$ avec une fonction polynomiale de degré $\deg(T_n) - 1 = n-1$. Puisque ψ_k est continue, elle est égale à cette fonction polynomiale.

Si $j \neq k$, alors $T_n(x_j) = 0$ et donc $\psi_k(x_j) = 0$. De plus $\psi_k(x_k) = 1$. La fonction polynomiale ψ_k de degré $n-1$ coïncide avec la fonction polynomiale L_k de degré $n-1$ en $n-1$ points distincts. Ces deux fonctions polynomiales sont donc égales.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \psi_k(x) = L_k(x).}$$

2.4c. Si $\theta \in]0,\pi[$ est différent de θ_k, alors

$$\frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos\theta - \cos\theta_k} = \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\theta - \theta_k} \cdot \frac{1}{\frac{\cos\theta - \cos\theta_k}{\theta-\theta_k}}.$$

La fonction $u \mapsto \cos(ju)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $u \mapsto -j\sin(ju)$. On a a donc

$$\lim_{\theta\to\theta_k} \frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\theta-\theta_k} = -j\sin(j\theta_k).$$

De la même façon (avec $j = 1$), on a

$$\lim_{\theta\to\theta_k} \frac{\cos(\theta)-\cos(j\theta_k)}{\theta-\theta_k} = -\sin(\theta_k) \neq 0$$

puisque $\theta_k \in]0,\pi[$. On en déduit

$$\boxed{\lim_{\theta\to\theta_k} \frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\cos\theta-\cos\theta_k} = j\frac{\sin(j\theta_k)}{\sin(\theta_k)}.}$$

La fonction $\theta \mapsto \frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\cos\theta-\cos\theta_k}$ est continue sur $[0,\pi]-\{\theta_k\}$ est prolongeable par continuité en θ_k. Ainsi

$$\boxed{u_j = \int_0^\pi \frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\cos\theta-\cos\theta_k}\,\mathrm{d}\theta \text{ existe.}}$$

On a

$$\lambda_k = \int_{-1}^1 \frac{L_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{\psi_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T_n'(x_k)}\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)}{x-x_k}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Puisque $T_n(x_k) = 0$, on en déduit

$$\lambda_k = \frac{1}{T_n'(x_k)}\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)-T_n(x_k)}{x-x_k}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{T_n'(x_k)}\int_{-1}^1 \frac{c_n(x)-c_n(x_k)}{x-x_k}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a donc

$$\lambda_k = -\frac{1}{T_n'(x_k)}\int_{-1}^1 \frac{\cos(n\arccos x)-\cos(n\arccos x_k)}{\cos(\arccos x)-\cos\theta_k}\arccos'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par changement de variable (comme à la question 1.3 de la partie 2), on obtient

$$\lambda_k = \frac{1}{T_n'(x_k)}\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta)-\cos(n\theta_k)}{\cos\theta-\cos\theta_k}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{T_n'(x_k)}u_n.$$

La valeur de $T_n'(x_k)$ calculer à la question 2.4a de cette partie permet de trouver

$$\boxed{\lambda_k = (-1)^{k+1}\frac{u_n}{n}\sin\theta_k.}$$

2.4.d. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $v_j = \cos(j\theta) - \cos(j\theta_k) = c_j(\cos\theta) - c_j(\cos\theta_k)$. Soit $j \in \mathbb{N}$. Grâce à la question 4 de la partie 1 (appliquée à $j = n+1$), on a

$$v_{j+2} = 2\cos(\theta)c_{j+1}(\cos\theta) - c_j(\cos\theta) - \Big(2\cos(\theta_k)c_{j+1}(\cos\theta_k) - c_j(\cos\theta_k)\Big).$$

et donc

$$v_{j+2} = 2\cos(\theta_k)\Big(c_{j+1}(\cos\theta) - c_{j+1}(\cos\theta_k)\Big) - 2(\cos\theta_k - \cos\theta)c_{j+1}(\cos\theta) - \Big(c_j(\cos\theta) - c_j(\cos\theta_k)\Big)$$

c'est-à-dire

$$v_{j+2} = 2v_{j+1}\cos\theta_k - v_j - 2(\cos\theta_k - \cos\theta))c_{j+1}(\cos\theta).$$

En intégrant, on trouve

$$u_{j+2} = 2u_{j+1}\cos\theta_k - u_j + 2\int_0^\pi c_{j+1}(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

On calcule alors

$$\int_0^\pi c_{j+1}(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos(j+1)\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{j+1}\Big[\sin(j+1)\theta\Big]_0^\pi = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N} \qquad u_{j+2} = 2u_{j+1}\cos\theta_k - u_j.}$$

2.4.e. La suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est déterminée par $u_0 = 0$, $u_1 = \pi$ et la relation de récurrence d'ordre 2

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad u_{j+2} - 2\cos(\theta_k)u_{j+1} + u_j = 0.$$

L'équation caractéristique de cette récurrence d'ordre 2 est

$$r^2 - 2\cos(\theta_k)r + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4\cos^2\theta_k - 4 = -4\sin^2\theta_k$. Les racines sont donc $e^{i\theta_k}$ et $e^{-i\theta_k}$. Il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad u_j = \lambda\cos(j\theta_k) + \mu\sin(j\theta_k).$$

De $u_0 = 0$ et $u_1 = \pi$, on tire $\lambda = 0$ et $\mu = \pi/\sin\theta_k$. On a donc

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad u_j = \frac{\sin(j\theta_k)}{\sin\theta_k}\pi.$$

Finalement,

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{k+1}}{n}\pi\sin(n\theta_k) = \frac{(-1)^{k+1}\pi}{n}\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

et donc

$$\boxed{\lambda_k = \frac{\pi}{n}.}$$

On note que cette valeur ne dépend pas de k.

3. D'après la question 2.3b de cette partie et la question précédente, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j R(x_j) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} R(x_j).$$

En remplaçant x_j par sa valeur, on trouve

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} R\left(\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right)\right).}$$

Exercice

On étudie deux variables aléatoires : l'une N suivant une loi de Poisson et l'autre X telle que la loi de X sachant N suit une loi binomiale. En particulier, on montre le résultat assez contre-intuitif suivant : la variable aléatoire X et la variable aléatoire N − X sont indépendantes.

1. Chacun des 4 clients réalise une expérience de Bernoulli de paramètre p : le succès de l'épreuve est l'achat du produit A et l'échec est le non achat du produit A – et donc l'achat du produit B. La variable aléatoire X est la somme des résultats des 4 épreuves de Bernouilli de paramètre p. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètre 4 et p. En particulier, la variable aléatoire X est à valeurs dans $\{0,\dots,4\}$ et pour tout $k \in \{0,\dots,4\}$, on a $P(X=k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}$. De même, la variable aléatoire Y est la somme de 4 épreuves de Bernoulli pour lesquelles la réussite est l'achat de B, dont la probabilité est $1-p$. La variable aléatoire Y suit donc la loi binomiale de paramètre 4 et $1-p$. En particulier, la variable aléatoire Y est à valeurs dans $\{0,\dots,4\}$ et pour tout $k \in \{0,\dots,4\}$, on a $P(Y=k) = \binom{4}{k}(1-p)^k p^{4-k}$. On obtient les lois suivantes pour X et Y :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4
$P(Y=k)$	p^4	$4p^3(1-p)$	$6p^2(1-p)^2$	$4p(1-p)^3$	$(1-p)^4$

Puisque X est binomiale de paramètre 4 et p, puisque Y est binomiale de paramètre 4 et $1-p$, les espérances de X et Y sont

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = 4p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{E}(Y) = 4(1-p).}$$

Avec 4 clients, le nombre de produits vendues est a produits A et b produits avec $a+b=4$ et donc $\max(a,b)+\min(a,b)=4$. Or $2\max(a,b) \geq \max(a,b)+\min(a,b)=4$ donc $\max(a,b) \geq 2$. La variable aléatoire Z est donc à valeur dans $\{2,3,4\}$.

Si $\max(a,b)=2$, on a $\max(a,b)+\min(a,b)=4$ si et seulement si $2+\min(a,b)=4$ et alors $a=b=2$. L'évènement $(Z=4)$ est donc l'évènement $(X,Y)=(2,2)$ encore équivalent à $(X=2)$ (puisque $X+Y=4$). Ainsi, $P(Z=2)=P(X=2)=6p^2(1-p)^2$.

Ensuite $\max(a,b)=3$, si et seulement si $a=3$ et $b=1$, ou $a=1$ et $b=3$. On en déduit

$$P(Z=3)=P(X=3)+P(X=1)=4p^3(1-p)+4p(1-p)^3=4p(1-2p+p^2).$$

Enfin $\max(a,b)=4$, si et seulement si $a=4$ et $b=0$, ou $a=0$ et $b=4$. On en déduit

$$P(Z=4)=P(X=4)+P(X=0)=p^4+(1-p)^4.$$

La loi de Z est donc

k	2	3	4
$P(Z=k)$	$6p^2(1-p)^2$	$p(1-2p+p^2)$	$p^4+(1-p)^4$

La variable aléatoire Z est le nombre de boîtes ouvertes dans la journée.

2. Chacun des n clients réalise une expérience de Bernoulli de paramètre p : le succès de l'épreuve est l'achat du produit A et l'échec est le non achat du produit A – et donc l'achat du produit B. La variable aléatoire X sachant N est la somme des résultats des n épreuves de Bernoulli de paramètre p. La variable aléatoire X sachant $N=n$ suit donc la loi binomiale de paramètre n et p.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0,\ldots,n\}, \qquad P(X=k|N=n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0,\ldots,n\}$. Par définition de la loi conditionnelle de X sachant $N=n$, on a

$$P(X=k|N=n)=\frac{P((X,N)=(k,n))}{P(N=n)}.$$

Or, N suit une loi de Poisson donc $P(X=n)=\lambda^n e^{-\lambda}/n!$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0,\ldots,n\}, \qquad P((X,N)=(k,n))=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}.$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Commençons par remarquer que si $k>n$ alors $P(X=k|N=n)=0$. Par la formule des probabilités totales, on a

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=k|N=n)P(N=n)$$

et donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}\lambda^n.$$

Or,

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}\lambda^n=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{\ell!}(1-p)^{\ell}\lambda^{\ell+k}=\lambda^k e^{\lambda(1-p)}$$

donc

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}\qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}.}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\text{la variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda p.}$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathrm{X})=\lambda p\quad\text{et}\quad\mathbf{V}(\mathrm{X})=\lambda p.}$$

5. Pour montrer l'indépendance de X et Y, montrons

$$\forall(k,\ell)\in\mathbb{N}^2\qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=\ell)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\mathrm{P}(y=\ell).$$

Puisque $\mathrm{X}+\mathrm{Y}=\mathrm{N}$ – chaque client achète un et un seul produit parmi A et B – les évènements $(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=\ell)$ et $(\mathrm{X}=k,\mathrm{N}=k+\ell)$ sont identiques. Soit $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$, on a donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=\ell)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{N}=k+\ell).$$

Grâce à la question 3, on a donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=\ell)=\binom{k+\ell}{k}p^k(1-p)^{\ell}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}e^{-\lambda}=\frac{1}{k!}(\lambda p)^k\cdot\frac{1}{\ell!}\left(\lambda(1-p)\right)^{\ell}e^{-\lambda}.$$

Comme $e^{-\lambda}=e^{-\lambda p}e^{-\lambda(1-p)}$ on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=\ell)=\frac{1}{k!}(\lambda p)^k e^{-\lambda p}\cdot\frac{1}{\ell!}\left(\lambda(1-p)\right)^{\ell}e^{-\lambda(1-p)}.$$

De même que X sachant $\mathrm{N}=n$ suit une loi binomiale de paramètre n et p, la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètre n et $1-p$. Par un calcul similaire à celui de la question 4, on a donc

$$\frac{1}{\ell!}\left(\lambda(1-p)\right)^{\ell}e^{-\lambda(1-p)}=\mathrm{P}(\mathrm{Y}=\ell).$$

Ainsi,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=\ell)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=\ell)$$

et

$$\boxed{\text{X et Y sont indépendantes.}}$$

6. Par définition

$$\mathbf{Cov}(X,N) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))(N - \mathbf{E}(N))\right) = \mathbf{E}(XN) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N).$$

Or, $N = X + Y$ donc

$$\mathbf{E}(XN) = \mathbf{E}(X^2) + \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X^2) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

la première égalité résultant de la linéarité de l'espérance, la seconde de l'indépendance de X et Y. De même

$$\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N) = \mathbf{E}(X)^2 + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

Finalement,

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{V}(X)$$

et donc

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \lambda p.$$

7. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'évènement $(Z \leq k$ est réalisé si et seulement si on a $X \leq k$ et $Y = k$. On a donc

$$P(Z \leq k) = P(X \leq k, Y \leq k) = P(X \leq k)P(Y \leq k)$$

les variables aléatoires X et Y étant indépendantes. Or,

$$P(X \leq k) = \sum_{j=0}^{k} P(X = j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda p)^j}{j!} e^{-\lambda p} = S(k, \lambda p) e^{-\lambda p}.$$

De même,

$$P(Y \leq k) = S\left(k, \lambda(1-p)\right) e^{-\lambda(1-p)}.$$

On en déduit

$$\boxed{P(Z \leq k) = S(k, \lambda p) S\left(k, \lambda(1-p)\right) e^{-\lambda}.}$$

8.

(a). La fonction S(k,x) est définie figure 2.

(b). Le commerçant tombe en rupture de stock si $Z > 5$. La probabilité de cet évènement est $1 - P(Z \leq 5)$. Or

$$P(Z \leq 5) = S(5,5)^2 e^{-10}.$$

Les instructions nécessaires sont données figure 2.

```
royer — Python — 117×56
Last login: Thu Sep 15 22:05:47 on ttys002
[|22:09|Mac~>python
Python 2.7.12 (v2.7.12:d33e0cf91556, Jun 26 2016, 12:10:39)
[GCC 4.2.1 (Apple Inc. build 5666) (dot 3)] on darwin
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
[>>> def S(k,x):
[...     n,d=1,1
[...     s=n/d
[...     for j in range(1,k+1):
[...             n*=x
[...             d*=j
[...             s+=n/d
[...     return s
[...
[>>> from math import exp, pow
[>>> 1-pow(S(5,5),2)*exp(-10)
0.6322605689238727
>>>
```

Figure 2 – Programme Python