Département de mathématiques et informatique
L1S2, mathématiques générales 2

Mathématiques générales 2

Emmanuel Royer

emmanuel.royer@uca.fr

Table des matières

1 Expressions mathématiques **3**

1.1 La négation 3
1.2 L'opération *ou* 3
1.3 L'opération *et* 3
1.4 Négation de *et*, négation de *ou* 3
1.5 L'expression *pour tout* 4
1.6 L'expression *il existe* 4
1.7 Négation de *pour tout* et *il existe* 4
1.8 L'implication 5
1.9 Négation de l'implication 6
1.10 L'équivalence 6

2 Nombres rationnels, nombres réels **6**

2.1 Nombres rationnels 6
2.2 Les nombres réels 8

3 Limite et continuité d'une fonction réelle de la variable réelle **12**

3.1 Continuité 12
3.2 Continuité au bord d'un intervalle 14
3.3 Limite finie en un réel 19
3.4 Limite en l'infini, limites infinies 29
3.5 Limites et comparaisons 34
3.6 Image des intervalles par les fonctions continues 38
3.7 Fonctions réciproques 44

4 Dérivabilité d'une fonction de la variable réelle **47**

4.1 Dérivée d'une fonction de la variable réelle 47
4.2 Calculs de dérivées 51
4.3 Utilisation de la dérivée 58
4.4 Étude de fonction 72
4.4.1 Plan d'étude 72
4.4.2 Exemple de la fonction $\arcsin$ 74
4.4.3 Exemple de la fonction $\arctan$ 76
4.4.4 Une fraction rationnelle 76
4.5 Fonctions $\mathcal{C}^k$ 80

5 Fonctions usuelles **90**

5.1 Logarithme et exponentielle 90
5.2 Fonctions puissances 98
5.3 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques 101
5.3.1 Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques 101
5.3.2 Les fonctions hyperboliques réciproques 105

6 Compléments **108**
6.1 Une caractérisation des intervalles 108
6.1.1 Bornes inférieure et supérieure 108
6.1.2 Caractérisation des intervalles comme convexes de $\mathbb{R}$ 111
6.2 Fonctions continues sur un intervalle compact 112
6.3 Sur la notion de période 113

1 Expressions mathématiques

On peut effectuer un certain nombre d'opérations sur les énoncés mathématiques.

1.1) La négation

Si P est un énoncé mathématique, on note $\mathrm{non}(P)$ sa négation. Un, et un seul, des énoncés P et $\mathrm{non}(P)$ est vrai. L'autre est donc faux. La négation de l'énoncé

$$\text{le nombre } \frac{13^{127}-13}{127} \text{ est un entier}$$

est

$$\text{le nombre } \frac{13^{127}-13}{127} \text{ n'est pas un entier.}$$

1.2) L'opération *ou*

Si P et Q sont deux énoncés mathématiques, l'énoncé P ou Q est vrai si et seulement si l'un au moins des énoncés P et Q est vrai. Un tel exemple d'énoncé est « il existe deux entiers a et b tels que $127 = ab$ ou $\frac{13^{127}-13}{127}$ est un entier ».

1.3) L'opération *et*

Si P et Q sont deux énoncés mathématiques, l'énoncé P et Q est vrai si et seulement si les énoncés P et Q sont tous deux vrais. Autrement dit, pour que l'énoncé P et Q soit faux, il suffit que P soit faux ou que Q soit faux.

1.4) Négation de *et*, négation de *ou*

La négation $\mathrm{non}(P \text{ et } Q)$ de $(P \text{ et } Q)$ est $\mathrm{non}(P)$ ou $\mathrm{non}(Q)$.

Exemple 1– La négation de « l'entier n est pair et strictement supérieur à 7 » est « l'entier n est impair ou inférieur à 7 ».

La négation $\mathrm{non}(P \text{ ou } Q)$ de (P ou Q) est $\mathrm{non}(P)$ et $\mathrm{non}(Q)$.

Exemple 2– La négation de « l'entier n est pair ou impair » est « l'entier n est impair et pair ».

1.5) L'expression *pour tout*

Pour exprimer qu'une propriété $\mathcal{P}(\lambda)$ dépendant d'un paramètre λ est vraie pour chaque valeur λ d'un ensemble Λ, on utilise l'expression *pour tout*. Le symbole correspondant est $\forall$. Ainsi dit-on :

pour tout λ dans Λ, la propriété $\mathcal{P}(\lambda)$ est vraie

et, on peut écrire

$$\forall \lambda \in \Lambda, \mathcal{P}(\lambda).$$

1.6) L'expression *il existe*

Pour exprimer qu'une propriété $\mathcal{P}(\lambda)$ dépendant d'un paramètre λ est vraie pour au moins une valeur λ d'un ensemble Λ, on utilise l'expression *il existe*. Le symbole correspondant est $\exists$. Ainsi dit-on :

il existe λ dans Λ tel que la propriété $\mathcal{P}(\lambda)$ est vraie

et, on peut écrire

$$\exists \lambda \in \Lambda, \mathcal{P}(\lambda).$$

1.7) Négation de *pour tout* et *il existe*

L'énoncé « pour tout λ dans Λ, la propriété $\mathcal{P}(\lambda)$ est vraie » est fausse si on peut trouver au moins une valeur de λ dans Λ pour laquelle $\mathcal{P}(\lambda)$ est fausse.

La négation de

$$\forall \lambda \in \Lambda, \mathcal{P}(\lambda)$$

est

$$\exists \lambda \in \Lambda, \mathrm{non}\,(\mathcal{P}(\lambda)).$$

Exemple 3– L'énoncé

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$$

est faux. Sa négation

$$\exists x \in \mathbb{R}, x < 0$$

est vraie.

L'énoncé « il existe λ dans Λ tel que la propriété $\mathcal{P}(\lambda)$ est vraie » est fausse si pour chaque valeur de λ dans Λ, la propriété $\mathcal{P}(\lambda)$ est fausse.

La négation de

$$\exists \lambda \in \Lambda, \mathcal{P}(\lambda)$$

est

$$\forall \lambda \in \Lambda, \operatorname{non}(\mathcal{P}(\lambda)).$$

Exemple 4– L'énoncé

$$\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 = 2$$

est faux. Sa négation

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \neq 2$$

est vraie.

1.8) L'implication

Si P et Q sont des énoncés, l'énoncé

si P alors Q

exprime que si P est vrai, alors Q l'est.
⚠Cet énoncé ne dit pas que Q est vrai. En effet P peut être faux. Si P est faux, l'énoncé « si P alors Q » n'exprime rien sur Q.

La proposition « si P alors Q » est notée $P \Rightarrow Q$. On la lit aussi « si P implique Q ».
⚠On prendra garde à ne *jamais* utiliser le symbole $\Rightarrow$ comme raccourci pour « donc ». Si vraiment, une grosse fatigue poussait à ne pas écrire donc, on utiliserait le symbole $\therefore$ à la place.

On peut exprimer l'implication à l'aide des opérateurs déjà rencontrés.

L'énoncé

$$P \Rightarrow Q$$

est

$$\operatorname{non}(P) \text{ ou } Q.$$

L'énoncé $P \Rightarrow Q$ indique que, soit P est vrai, et alors Q est vrai ; soit P est faux.

L'énoncé

$$P \Rightarrow Q$$

est le même que

$$\mathrm{non}(Q) \Rightarrow \mathrm{non}(P).$$

1.9) Négation de l'implication

On a exprimé l'énoncé $P \Rightarrow Q$ à l'aide de la négation et de l'opérateur *ou*. De plus, on sait prendre la négation de cet opérateur.

La négation de l'énoncé

$$P \Rightarrow Q$$

est

$$P \text{ et } \mathrm{non}(Q).$$

Exemple 5– La négation de

pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x^2 = 4$ alors $x = 2$

est

il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 4$ et $x \neq 2$.

L'un de ces deux énoncés est faux, l'autre est vrai. (Lequel est vrai ?)

1.10) L'équivalence

La proposition

$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)$$

se note $P \Leftrightarrow Q$ et se lit « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ». Elle exprime que P et Q sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

2 Nombres rationnels, nombres réels

2.1) Nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui sont obtenus par division d'un entier relatif par un entier naturel non nul.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Cet ensemble contient l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. En effet, si $n \in \mathbb{Z}$ alors

$$n = \frac{n}{1} \in \mathbb{Q}.$$

La représentation d'un nombre rationnel comme fraction n'est pas unique. Par exemple,

$$\frac{2}{7} = \frac{8}{28} = \frac{26}{91}.$$

En revanche, la représentation d'un nombre rationnel non nul est unique sous forme de fraction irréductible. Si $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}$, la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible si p et q n'ont pas de facteur commun.

On peut additionner et multiplier les nombres rationnels. Ces opérations vérifient les propriétés suivantes (a, c et e sont des entiers relatifs, b, d et f sont des entiers naturels non nuls.)

($*$) La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{ad + bc}{bd}.$$

($*$) L'addition est *associative* :

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right).$$

($*$) L'addition est *commutative* :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$$

($*$) L'addition admet un *élément neutre* :

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}.$$

($*$) Tout nombre rationnel admet un *opposé* :

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0.$$

($**$) Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

($**$) Le produit est associatif :

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right).$$

($**$) Le produit est commutatif :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

($\ast\ast$) Le produit admet un élément neutre :

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}.$$

($\ast\ast$) Tout nombre rationnel *non nul* admet un *inverse* : si $a \neq 0$ alors

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

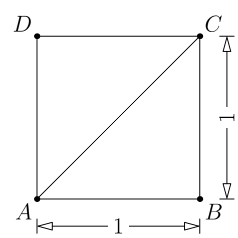
($\ast\ast$) Le produit est *distributif* sur l'addition :

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.$$

Pour résumer toutes ces propriétés, on dit que l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de l'addition et du produit est un *corps*.

2.2) Les nombres réels

Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels. Considérons par exemple un carré $ABCD$ de côtés de longueur 1. Le triangle ABC est rectangle en B. Le théorème de Pythagore donne donc



$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

c'est-à-dire

$$AC^2 = 2.$$

On note $\sqrt{2}$ l'unique nombre positif dont le carré vaut 2.

***Proposition* 6–** *Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.*

Pour démontrer cette proposition, on a besoin du résultat intermédiaire suivant.

***Lemme* 7–** *Soit a un entier naturel. Si a^2 est pair, alors a est pair.*

Démonstration. Nous démontrons de résultat par contraposée.

Démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$ par *contraposée*, c'est démontrer l'implication équivalente $\mathrm{non}(Q) \Rightarrow \mathrm{non}(P)$.

Ici, l'énoncé P est « a^2 est pair » et l'énoncé Q est « a est pair ». L'énoncé $\mathrm{non}(Q)$ est « a est impair » et l'énoncé $\mathrm{non}(P)$ est « a^2 est impair ». Nous allons donc démontrer que si a est impair, alors a^2 est impair.

Si a est impair, alors $a = 2\alpha + 1$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$. On en déduit

$$a^2 = (2\alpha+1)^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 1 + 2(2\alpha^2 + 2\alpha).$$

Comme $2\alpha^2 + 2\alpha$ est entier, on en déduit que a^2 est impair. □

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, on va faire une démonstration *par l'absurde*.

Démontrer qu'un énoncé P est vrai par l'absurde, c'est supposer qu'il est faux puis en en déduire qu'un énoncé Q – dont on sait par ailleurs qu'il est faux – est vrai. Comme l'énoncé Q ne peut pas être vrai et faux, on en déduit que l'énoncé P est vrai.

Démonstration de la proposition 6. On fait une démonstration par l'absurde. On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il peut donc s'écrire comme fraction irréductible : il existe deux entiers naturels non nuls et sans facteur commun a et b tels que $\sqrt{2} = a/b$. En particulier, a et b ne sont pas tous les deux pairs. En élevant au carré puis en multipliant par b^2, on en déduit $a^2 = 2b^2$. Ainsi, a^2 est pair et, grâce au lemme 7, l'entier a est pair. Il existe un entier non nul α tel que $a = 2\alpha$ et donc $a^2 = 4\alpha^2$. On en déduit $4\alpha^2 = 2b^2$ et donc $b^2 = 2\alpha^2$. L'entier b^2 est donc pair et, grâce au lemme 7, l'entier b est lui aussi pair. Les deux entiers a et b sont pairs. Ainsi, $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. □

Un nombre non rationnel est appelé irrationnel. Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, le lemme suivant permet de construire une infinité de nombres irrationnels en sommant n'importe quel nombre rationnel avec $\sqrt{2}$.

Lemme 8– *Si x est un nombre irrationnel et y est un nombre rationnel, alors $x + y$ est un nombre irrationnel.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $x+y$ est rationnel. Le nombre $-y$ est rationnel et la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel. On en déduit que $x = x+y-y$ est rationnel ce qui contredit le fait qu'il est irrationnel. Le nombre $x+y$ est donc irrationnel. □

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Ce sont les nombres qui ont un développement décimal. Cet ensemble, muni de l'addition et de la multiplication, est un corps. Ce corps est *archimédien*. Cela signifie que, pour tout réel A, il existe un entier naturel n tel que $n > A$. On utilise cette propriété pour construire la partie entière.

Proposition 9– *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif k tel que*

$$k \leq x < k + 1.$$

Cet entier k s'appelle la partie entière *de x. On le note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.*

Pour tout réel x, sa partie entière est donc le seul entier $\lfloor x \rfloor$ tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

C'est le plus grand entier inférieur à x.

Démonstration. Soit x un nombre réel. L'énoncé contient deux informations.

— Information 1 – Il existe un entier k tel que $k \leq x < k+1$.
— Information 2 – Cet entier est unique : si k' est un entier tel que $k' \leq x < k'+1$ alors $k = k'$.

Démontrons séparément ces deux informations.

— Information 1 –
  — Supposons $x \geq 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $n > x$. Si p est un entier naturel tel que $p \leq x$ alors $0 \leq p < n$. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'entiers naturels inférieurs à x (il y en a au plus n). Parmi cette collection finie d'entiers naturels inférieurs à x, il y en a un plus grand : on le note k. On a $k \leq x$. Comme $k+1$ est strictement supérieur à k, l'entier $k+1$ n'est pas dans la collection finie d'entiers naturels inférieurs à x. On a donc $k+1 > x$.
  — Supposons $x < 0$. Le réel $-x$ est positif. Il existe un entier naturel n tel que $n > -x$, c'est-à-dire $-n < x$. Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers p tels que $-n \leq p \leq x$. On note k le plus grand d'entre eux. On a $k \leq x$ et $x < k+1$.

— Information 2 – Cet entier est unique : si k' est un entier tel que $k' \leq x < k'+1$ alors

$$k \leq x < k+1 \qquad \text{et} \qquad k' \leq x < k'+1$$

donc

$$k < k'+1 \qquad \text{et} \qquad k' < k+1$$

puis

$$k-1 < k' \qquad \text{et} \qquad k' < k+1.$$

L'entier k' est donc inclus dans l'intervalle $]k-1, k+1[$. Cet intervalle ne contient qu'un seul entier : k. On a donc $k' = k$.

□

Remarque 10– La notion de partie entière repose sur les propriétés fondamentales suivantes des ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.

— Toute partie non vide et finie de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit et un plus grand élément.
— L'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien.

On montre une autre conséquence du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien.

***Proposition* 11–** *Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un nombre rationnel et un nombre irrationnel.*

Démonstration. Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Montrons que $]a, b[$ contient un nombre rationnel. On cherche un entier relatif p et un entier naturel non nul q tels que $a < \frac{p}{q} < b$. Cette inégalité équivaut à $qa < p < qb$. Si un intervalle est de longueur strictement supérieure à 1, on peut y trouver un entier. Il suffit donc de trouver un entier naturel q tel que $qb - qa > 1$, c'est-à-dire tel que $q > \frac{1}{b-a}$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, un tel entier naturel q existe. On peut alors choisir un entier relatif p dans l'intervalle $]qa, qb[$. On a bien $a < \frac{p}{q} < b$.

On montre ensuite que $]a, b[$ contient un nombre irrationnel. D'après ce qui précède, l'intervalle $\left]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}\right[$ contient un nombre rationnel x. Le nombre $x + \sqrt{2}$ est irrationnel, d'après le lemme 8 page 9, et il est dans l'intervalle $]a, b[$. □

On a $\sqrt{2} = 1,41421356237\cdots$. Sa partie entiere est

$$\left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1.$$

On a $10\sqrt{2} = 14,1421356237\cdots$ et $\left\lfloor 10\sqrt{2} \right\rfloor = 14$ puis

$$\frac{\left\lfloor 10\sqrt{2} \right\rfloor}{10} = 1,4.$$

On a ensuite $100\sqrt{2} = 141,421356237\cdots$ et $\left\lfloor 100\sqrt{2} \right\rfloor = 141$ puis

$$\frac{\left\lfloor 100\sqrt{2} \right\rfloor}{100} = 1,41.$$

On construit ainsi une suite de nombres rationnels ayant de plus en plus de décimales en commun avec le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. Les nombres de cette suite sont même décimaux.

Définition 12– *Un nombre réel x est décimal s'il existe un entier naturel n et un entier relatif b tels que $10^n x = b$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.*

Si $x \in \mathbb{D}$, il existe $b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{b}{10^n}$. Comme $10^n \in \mathbb{N}^*$, on a $x \in \mathbb{Q}$. Ainsi, $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}.$$

Puisque $\lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$, on a $u_n \in \mathbb{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus,

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

donc

$$u_n \leq x < u_n + \frac{1}{10^n}$$

puis

$$0 \leq x - u_n < \frac{1}{10^n} \tag{1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{10^n} = 0.$$

Par le théorème d'encadrement, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} (x - u_n) = 0$$

puis

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = x.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle l'*approximation décimale* de x. L'encadrement (1) se réécrit $|x - u_n| \leq 10^{-n}$. Pour tout entier n, le nombre décimal u_n est donc une approximation de x à 10^{-n} près.

En particulier, ce qui précède montre que tout nombre réel peut être approché par une suite de nombre décimaux (et donc par une suite de nombres rationnels).

3 Limite et continuité d'une fonction réelle de la variable réelle

3.1) Continuité

Au premier semestre, vous avez vu la définition séquentielle de la continuité, que nous rappelons.

Définition 13 (Définition séquentielle de la continuité)– *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le réel a. Si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans le domaine de définition de f et tendant vers a, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$, on dit que f est continue en a.*

Les propriétés générales des limites de suites permettent d'établir les propriétés générales suivantes.

***Proposition* 14–** *Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert contenant le réel a. On suppose que f et g sont continues en a. Les propriétés suivantes sont alors vraies.*

1) *La fonction $f + g$ est continue en a.*
2) *La fonction fg est continue en a.*
3) *Si $g(a) \neq 0$, la fonction f/g est continue en a.*

***Proposition* 15–** *Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $g(a)$. On suppose que g est continue en a et que f est continue en $g(a)$. Alors, la fonction*

$$f \circ g \colon x \mapsto f(g(x))$$

est continue en a.

Si cette définition est pratique pour démontrer des propriétés générales ou pour démontrer qu'une fonction n'est *pas* continue en un réel, elle l'est moins pour démontrer qu'une fonction *est* continue en un réel. Pour obtenir une définition plus pratique, on rappelle la notion de limite de suite.

Définition 16 (Limite d'une suite)– *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et ℓ un nombre réel. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$.*

Remarque 17– Au premier semestre, vous avez sans doute vu la définition de la limite d'une suite où $|u_n - \ell| < \varepsilon$ est remplacé par $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Montrons que les deux définitions sont équivalentes. On considère donc les énoncés suivants.
Énoncé 1 – $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.
Énoncé 2 – $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

1) Supposons vrai l'énoncé 1 et montrons qu'alors l'énoncé 2 est vrai. Cela est conséquence de l'implication $x < y \Rightarrow x \leq y$ vraie pour tous réels x et y.
2) Supposons vrai l'énoncé 2 et montrons qu'alors l'énoncé 1 est vrai. Soit $\varepsilon > 0$. Nous devons trouver un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Appliquons l'énoncé 2 à $\varepsilon/2$. Cela fournit n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$. Comme $\varepsilon > 0$, on a $\varepsilon/2 < \varepsilon$. Ainsi, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

On peut maintenant donner une définition équivalente de la continuité. Cette nouvelle caractérisation traduit l'idée intuitive qu'une fonction f est continue en a si, à condition de prendre x suffisamment proche de a, on peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de $f(a)$.

***Théorème* 18–** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1) La fonction f est continue en a.

2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$,

$$\text{si } |x - a| < \delta \text{ alors } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Remarque 19– Le deuxième énoncé s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Sa négation est donc

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in I \quad \mathrm{non}\,(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

La négation $\mathrm{non}\,(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$ de $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ est

$$|x - a| < \delta \quad \text{et} \quad \mathrm{non}\,(|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

c'est-à-dire

$$|x - a| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

La négation du deuxième énoncé du théorème 18 est donc

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in I \quad |x - a| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Démonstration du théorème 18. On doit montrer l'équivalence des deux énoncés. On montre d'abord que si le premier énoncé est vrai, alors le deuxième l'est. On montre ensuite que si le deuxième énoncé est vrai alors le premier l'est.

1) On veut montrer que si le premier énoncé est vrai alors le deuxième l'est. Pour cela, on raisonne par contraposée. On suppose donc que le deuxième énoncé est faux et on doit en déduire que le premier énoncé est faux. On suppose donc

   non(2)

   il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe un réel x dans I vérifiant $|x-a| < \delta$ et $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

   En utilisant cette propriété, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans I, tendant vers a mais telle que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers $f(a)$. On en déduira que f n'est pas continue en a. Pour tout entier $n > 0$, on applique $\mathrm{non}(2)$ à $\delta = 1/n$. On obtient un réel x_n appartenant à I vérifiant $|x_n - a| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I, tendant vers a (puisque $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0). Mais

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

   donc $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers $f(a)$.

2) On montre que si le deuxième énoncé est vrai, alors le premier est vrai. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers a. On doit montrer que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que,

   $(\sharp)$

   pour tout $x \in I$, si $|x - a| < \delta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

   Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, il existe n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $|x_n - a| < \delta$. Par ailleurs, $x_n \in I$ pour tout entier naturel n. Pour tout $n \geq n_0$, on peut donc appliquer $(\sharp)$ à $x = x_n$. On obtient que $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ on a $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$: la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

□

3.2) Continuité au bord d'un intervalle

Nous n'avons défini la continuité d'une fonction qu'en un point contenu dans un intervalle *ouvert* contenant ce point. Cependant, la condition $x \in I$ de la définition permet de se passer de cette hypothèse. On peut alors légèrement généraliser la définition de la continuité.

Définition 20– Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$,

$$\text{si } |x - a| < \delta \text{ alors } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Remarque 21– La continuité est une notion *locale*. Pour étudier la continuité de f en un réel a, il suffit de connaître f sur un intervalle non réduit à $\{a\}$ mais aussi petit que l'on veut.

Exemple 22– La fonction $\sqrt{\ }$ est définie sur l'intervalle fermé à gauche et ouvert à droite $I = [0, +\infty[$. Montrons qu'elle est continue en 0. Soit $\varepsilon > 0$, on doit trouver $\delta > 0$ tel que, si $x \in I$ et si $|x - 0| < \delta$ alors $\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| < \varepsilon$. On doit donc trouver $\delta > 0$ tel que, si $0 \leq x < \delta$, alors $\sqrt{x} < \varepsilon$. Pour tout réel positif x, l'inégalité $\sqrt{x} < \varepsilon$ est *équivalente* à l'inégalité $x < \varepsilon^2$. En particulier, si $0 \leq x < \varepsilon^2$ alors $\sqrt{x} < \varepsilon$. On peut donc choisir $\delta = \varepsilon^2$.

On peut alors aussi généraliser les propriétés générales.

***Proposition* 23–** *Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle contenant le réel a. On suppose que f et g sont continues en a. Les propriétés suivantes sont alors vraies.*

1) *La fonction $f + g$ est continue en a.*
2) *La fonction fg est continue en a.*
3) *Si $g(a) \neq 0$, la fonction f/g est continue en a.*

Démonstration. On suppose f et g définies sur l'intervalle I contenant a et continues en a.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en a, il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$,

$$\text{si } |x - a| < \delta_1 \text{ alors } |f(x) - f(a)| < \varepsilon/2. \tag{2}$$

Puisque g est continue en a, il existe $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$,

$$\text{si } |x - a| < \delta_2 \text{ alors } |g(x) - g(a)| < \varepsilon/2. \tag{3}$$

Pour tout $x \in I$, l'inégalité triangulaire implique

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| &= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|. \end{aligned}$$

Soit δ le plus petits des deux réels δ_1 et δ_2. Si $x \in I$ et $|x - a| < \delta$ alors $|x - a| < \delta_1$ et on peut appliquer (2). On a aussi $|x - a| < \delta_2$ et on peut appliquer (3). On a alors

$$|f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On en déduit que si $x \in I$ et $|x - a| < \delta$ alors

$$|(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| < \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x - a| < \delta$ alors $|(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| < \varepsilon$. On en déduit que $f + g$ est continue en a.

2) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in I$, on a

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - f(a))\,g(x) + (g(x) - g(a))\,f(a)$$

et donc

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq |f(x) - f(a)| \cdot |g(x)| + |g(x) - g(a)| \cdot |f(a)|. \tag{4}$$

Puisque g est continue en a, il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x-a| < \delta_1$ alors

$$|g(x) - g(a)| < 1.$$

Or, pour tout $x \in I$, on a

$$|g(x)| = |g(x) - g(a) + g(a)| \leq |g(x) - g(a)| + |g(a)|.$$

Pour tout $x \in I$, si $|x-a| < \delta_1$, on a alors

$$|g(x)| \leq 1 + |g(a)|. \tag{5}$$

Puisque f est continue en a, il existe $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x-a| < \delta_2$ alors

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2\,(1 + |g(a)|)}. \tag{6}$$

Puisque g est continue en a, il existe $\delta_3 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x-a| < \delta_3$ alors

$$|g(x) - g(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2\,(1 + |f(a)|)}. \tag{7}$$

On choisit δ le plus petit des trois réels δ_1, δ_2 et δ_3. Si $x \in I$ est tel que $|x-a| \leq \delta$, alors les inégalités (5), (6) et (7) sont satisfaites. On les reporte dans (4) et on obtient

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(a)g(a)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\,(1 + |g(a)|)} \cdot (1 + |g(a)|) + \frac{\varepsilon}{2\,(1 + |f(a)|)} \cdot |f(a)| && (8)\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && (9)\\
&\leq \varepsilon. && (10)
\end{aligned}$$

3) On va montrer que f/g est continue en a en trois étapes. En première étape, on montre que $1/g$ est définie dans un intervalle contenant a. En deuxième étape, on montre que $1/g$ est continue en a. On conclut en troisième étape de f/g est continue en a.

Étape 1) La fonction g est continue en a. Il existe donc $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x-a| < \delta_1$ alors

$$|g(x) - g(a)| < \frac{1}{2}|g(a)|$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2}|g(a)| < g(x) - g(a) < \frac{1}{2}|g(a)|$$

puis

$$g(a) - \frac{1}{2}|g(a)| < g(x) < g(a) + \frac{1}{2}|g(a)| \tag{11}$$

Cette équation va impliquer que g est de signe constant non nulle sur $I \cap]a-\delta_1, a+\delta_1[$, et donc que $1/g$ est définie sur cet intervalle. Comme $g(a) \neq 0$, on a $g(a) > 0$ ou $g(a) < 0$.

Cas 1 : $g(a) > 0$. On a alors $g(a) = |g(a)|$. L'encadrement (11) devient

$$|g(a)| - \frac{1}{2}|g(a)| < g(x) < |g(a)| + \frac{1}{2}|g(a)|$$

et en particulier,

$$g(x) > \frac{1}{2}|g(a)|$$

pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta_1$. En particulier, $g(x) > 0$ et donc $1/g(x)$ est défini pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta_1$. Si $g(x) > 0$ alors $|g(x)| = g(x)$ et donc

$$|g(x)| > \frac{1}{2}|g(a)|$$

pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta_1$.

Cas 2 : $g(a) < 0$. On a alors $g(a) = -|g(a)|$. L'encadrement (11) devient

$$-|g(a)| - \frac{1}{2}|g(a)| < g(x) < -|g(a)| + \frac{1}{2}|g(a)|$$

et en particulier,

$$g(x) < -\frac{1}{2}|g(a)|$$

pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta_1$. En particulier, $g(x) < 0$ et donc $1/g(x)$ est défini pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| < \delta_1$. Si $g(x) < 0$ alors $g(x) = -|g(x)|$ et donc

$$-|g(x)| < -\frac{1}{2}|g(a)|$$

puis

$$|g(x)| > \frac{1}{2}|g(a)|$$

pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta_1$.

La synthèse de cette première étape est que $1/g(x)$ est défini pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta_1$ et que, pour ces valeurs de x, on a

$$|g(x)| > \frac{1}{2}|g(a)|. \tag{12}$$

Étape 2) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta_1$, on a

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(x) - g(a)|}{|g(x)| \cdot |g(a)|} < \frac{2|g(x) - g(a)|}{|g(a)|^2} \tag{13}$$

grâce à (12). Puisque g est continue en a, il existe δ_2 tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta_2$, on a

$$|g(x) - g(a)| < \frac{|g(a)|^2}{2}\varepsilon. \tag{14}$$

On choisit pour δ le plus petit des deux nombres réels δ_1 et δ_2. Soit $x \in I$ tel que $|x-a| < \delta$. Par report de (14) dans (12), on obtient

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| < \varepsilon.$$

La fonction $1/g$ est donc continue en a.

Étape 3) La fonction f est continue en a. La fonction $1/g$ est continue en a. Par produit, la fonction $f/g = f \cdot (1/g)$ est donc continue en a.

□

Exemple 24– Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels. Soit $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions définies sur un intervalle I et continues en un réel a de I. Pour tout i, la fonction constante λ_i est continue en a (le lecteur s'en convaincra à titre d'exercice). Le produit $\lambda_i f_i$ est donc continu en a et la somme

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$$

est continue en a. On dit, en on retiendra que

> Les combinaisons linéaires de fonctions continues en un réel sont continues en ce réel.

***Proposition* 25–** *Soit g une fonction définie sur un intervalle I contenant a. Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant $g(I)$. On suppose que g est continue en a et que f est continue en $g(a)$. Alors, la fonction*

$$f \circ g \colon x \mapsto f(g(x))$$

est continue en a.

Démonstration. On note J un intervalle contenant $g(I)$ sur lequel f est définie. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en $g(a)$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $y \in J$, si $\left|y - g(a)\right| < \delta_1$ alors $\left|f(y) - f(g(a))\right| < \varepsilon$. En particulier, pour tous les réels $x \in I$ tels que $|g(x) - g(a)| < \delta_1$, on a $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$. La fonction g est continue en a. Il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x-a| < \delta$ alors $|g(x) - g(a)| < \delta_1$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| < \delta$, on a $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$. La fonction $f \circ g$ est continue en a. □

Enfin, on définit la notion de continuité sur un intervalle.

Définition 26 (Continuité sur un intervalle)– *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I.*

3.3) Limite finie en un réel

De même qu'on a introduit la notion de continuité, on veut traduire de manière précise la notion de limite réelle ℓ d'une fonction f en un réel a. Ce que l'on veut préciser est l'idée que les valeurs $f(x)$ sont de plus en plus proches de ℓ lorsque x est de plus en plus proche de a.

Définition 27– Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un réel qui
- *appartient à I ;*
- *ou bien est une extrémité de I.*

Soit f une fonction définie sur $I - \{a\}$. Soit ℓ un réel. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ différent de a, si $|x - a| < \delta$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

On note

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Remarque 28– La définition de $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a se réécrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I - \{a\}, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

La négation de $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a est donc

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in I - \{a\}, |x - a| < \delta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Exemple 29– Soit $a > 0$. Montrons que

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \geq 0$, on a

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

On choisit $\delta = \varepsilon\sqrt{a} > 0$. Si $|x - a| < \delta$ alors,

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} \leq \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, +\infty[- \{a\}$, si $|x - a| < \delta$ alors $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \leq \varepsilon$. On en déduit que $\sqrt{x}$ tend vers $\sqrt{a}$ lorsque x tend vers a.

Exemple 30– Montrons que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \varepsilon^2$. Soit $x > 0$. Si $|x| < \delta$, alors $\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$. On en déduit que $\sqrt{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

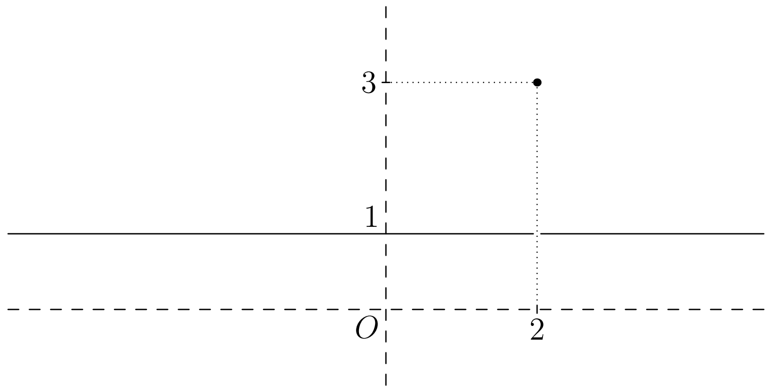


Figure 1

Exemple 31– On donne maintenant un exemple illustrant la possibilité qu'on s'est donné dans la définition d'avoir $x \neq a$. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

(voir la figure 1). Montrons que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si $x \neq 2$, on a $|f(x) - 1| = 0 < \varepsilon$. On peut donc choisir δ comme on veut, par exemple $\delta = 10$. On obtient : pour tout réel x différent de 2, si $|x - 2| < \delta$ alors $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

Remarque 32– La fonction f de l'exemple 31 n'est pas continue en 2, montrons le. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 2 - 1/n$ pour tout entier $n > 0$. Cette suite tend vers 2. Comme $u_n \neq 2$, on a $f(u_n) = 1$ pour tout $n > 0$. La suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers 1. On a construit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers 2 telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $1 \neq f(2)$. On en déduit que f n'est pas continue en 2.

L'exemple 31 et la remarque 32 font entrevoir un lien entre les notions de continuité et de limite. On donne ce lien dans la proposition suivante.

***Proposition* 33–** *Soit I un intervalle. Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est continue en a si et seulement si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Démonstration. Cet énoncé donne deux informations. Il énonce que si f est continue en a, alors $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a. Il énonce aussi la réciproque : si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a alors f est continue en a. On montre donc ces deux propriétés. Il faut remarquer la différence dans les définitions de *continuité* en a et *limite* en a entre d'une part « pour tout $x \in I$ » et d'autre part « pour tout $x \in I - \{a\}$ ».

— Supposons que f est continue en a et déduisons en que $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, si $|x-a| < \delta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Cela implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. On a donc

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

— Supposons que $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a et déduisons en que f est continue en a. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$. On trouve $\delta > 0$ tel que tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Si $x = a$, on a $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. On a donc : pour tout $x \in I$, si $|x-a| < \delta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. La fonction f est continue en a.

□

Exemple 34– À l'aide de la définition séquentielle de la continuité, vous avez vu en S1 que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout entier $n \geq 0$, pour tous réels $a_0, \ldots, a_n$ et pour tout réel x_0, on a

$$\lim_{x \to x_0} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n.$$

Pour démontrer l'unicité de la limite d'une fonction dès lors qu'elle en admet une, on a besoin d'un résultat intermédiaire qui a son intérêt propre. Cette énoncé implique qu'une fonction qui admet une limite réelle ℓ en un réel a est bornée *au voisinage épointé* de a.

***Proposition* 35–** *Soit I un intervalle et a un réel qui*
- *appartient à I ;*
- *ou bien est une extrémité de I.*

Soit f une fonction définie sur $I - \{a\}$. Soit ℓ, m et M des réels. On suppose que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

et que $m < \ell < M$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta$ alors $m < f(x) < M$.

Démonstration. On applique la définition de « $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend a » avec $\varepsilon = \ell - m > 0$. On trouve $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta_1$ alors $|f(x) - \ell| < \ell - m$. Or, pour tout $x \in I - \{a\}$, l'encadrement $|f(x) - \ell| < \ell - m$ équivaut à

$$-\ell + m < f(x) - \ell < \ell - m$$

donc à

$$m < f(x) < 2\ell - m.$$

En particulier, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta_1$ alors $f(x) > m$.

On applique la définition de « $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend a » avec $\varepsilon = M - \ell > 0$. On trouve $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x - a| < \delta_2$ alors $|f(x) - \ell| < M - \ell$. Or, pour tout $x \in I - \{a\}$, l'encadrement $|f(x) - \ell| < M - \ell$ équivaut à

$$\ell - M < f(x) - \ell < M - \ell$$

donc à

$$2\ell - M < f(x) < M.$$

En particulier, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x - a| < \delta_2$ alors $f(x) < M$.

Soit alors δ le plus petits des deux réels δ_1 et δ_2, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x - a| < \delta$ alors

- $|x - a| < \delta_1$ et $m < f(x)$
- $|x - a| < \delta_2$ et $f(x) < M$

donc $m < f(x) < M$. □

Proposition 36– *Si f admet une limite réelle ℓ en un réel a, alors ℓ est sa seule limite réelle en a.*

Démonstration. Soit f définie sur l'intervalle $I - \{a\}$. On suppose que ℓ et ℓ' sont des limites de f en a. On va montrer que $\ell = \ell'$ *par l'absurde*. On suppose pour cela que $\ell \neq \ell'$. On note ℓ_1 le plus petit des deux réels ℓ et ℓ' et ℓ_2 le plus grand. On a $\ell_1 < \ell_2$. On peut alors trouver μ tel que $\ell_1 < \mu < \ell_2$ (par exemple, μ peut être choisi comme milieu de ℓ_1 et ℓ_2 en posant $\mu = (\ell_1 + \ell_2)/2$). Comme μ est strictement inférieur à une limite de f en a, la proposition 35 page précédente implique qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x - a| < \delta_1$ alors $\mu < f(x)$. Mais μ est aussi strictement supérieur à une limite de f en a, la proposition 35 implique donc qu'il existe $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x - a| < \delta_2$ alors $f(x) < \mu$. Soit δ le plus petit des deux réels δ_1 et δ_2. Pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x - a| < \delta$ alors $\mu < f(x) < \mu$. On en déduit en particulier la contradiction $\mu < \mu$. On a donc $\ell = \ell'$. □

On montre ensuite comment se comportent les limites vis à vis des opérations usuelles. Les démonstrations sont assez proches de celles que vous avez rencontrées concernant les suites, ou la continuité des sommes, produits et quotients de fonctions continues. Le lecteur devrait donc tenter de faire ces preuves par lui-même avant de les lire.

Proposition 37– *Soit f et g des fonctions. Soit a, ℓ et ℓ' des réels. On suppose que lorsque x tend vers a, $f(x)$ tend vers ℓ et $g(x)$ tend vers ℓ'.*

1) La fonction somme $f+g$ admet une limite en a et

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \ell+\ell'.$$

2) La fonction produit fg admet une limite en a et

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \ell\ell'.$$

3) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. La fonction λf admet une limite en a et

$$\lim_{x\to a}\lambda f(x) = \lambda\ell.$$

4) Si $\ell'\neq 0$, la fonction quotient admet une limite en a et

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

Démonstration. Soit I un intervalle et a un réel. On suppose que $a\in I$ ou que a est une extrémité de I. On suppose aussi que f et g sont définies sur $I-\{a\}$.

1) Soit $\varepsilon>0$. Il existe $\delta_1>0$ et $\delta_2>0$ tels que, pour tout $x\in I-\{a\}$, si $|x-a|<\delta_1$ alors $|f(x)-\ell|<\varepsilon/2$ et si $|x-a|<\delta_2$ alors $|g(x)-\ell'|<\varepsilon/2$. On note δ le plus petit des deux réels δ_1 et δ_2. Pour tout $x\in I-\{a\}$, si $|x-a|<\delta$ alors

$$\Big|(f(x)+g(x))-(\ell+\ell')\Big| = \Big|(f(x)-\ell)-(g(x)-\ell')\Big| \le |f(x)-\ell|+\Big|g(x)-\ell'\Big| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On en déduit que $f(x)+g(x)$ tend vers $\ell+\ell'$ lorsque x tend vers a.

2) Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $x\in I-\{a\}$, on a

$$f(x)g(x)-\ell\ell' = (f(x)-\ell)\,g(x)+(g(x)-\ell')\,\ell$$

et donc

$$\Big|f(x)g(x)-\ell\ell'\Big| \le |f(x)-\ell|\cdot|g(x)|+\Big|g(x)-\ell'\Big|\cdot|\ell|. \tag{15}$$

Il existe $\delta_1>0$ tel que, pour tout $x\in I-\{a\}$, si $|x-a|<\delta_1$ alors $|g(x)-\ell'|<1$. Pour tout $x\in I-\{a\}$, si $|x-a|<\delta_1$, on a alors

$$|g(x)| = \Big|(g(x)-\ell')+\ell'\Big| \le \Big|g(x)-\ell'\Big|+|\ell'| < 1+|\ell'|. \tag{16}$$

Il existe $\delta_2>0$ tel que, pour tout $x\in I-\{a\}$, si $|x-a|<\delta_2$ alors

$$|f(x)-\ell| < \frac{\varepsilon}{2\,(|\ell'|+1)}. \tag{17}$$

Enfin, il existe $\delta_3 > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta_3$ alors

$$\left|g(x) - \ell'\right| < \frac{\varepsilon}{2\,(|\ell|+1)}. \tag{18}$$

On note δ le plus petit des réels δ_1, δ_2 et δ_3. Par report de (16), (17) et (18) dans (15) on obtient : pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta$ alors

$$\begin{aligned}\left|f(x)g(x) - \ell\ell'\right| &\leq \frac{\varepsilon}{2\,(|\ell'|+1)} \cdot (|\ell'|+1) + \frac{\varepsilon}{2\,(|\ell|+1)} \cdot |\ell| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|\ell|}{|\ell|+1} \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

3) La fonction constante égale à λ admet λ comme limite en a. Par produit, on en déduit que $\lambda f(x)$ tend vers $\lambda\ell$ lorsque x tend vers a.

4) Il faut d'abord s'assurer que f/g est bien définie sur un intervalle contenant a ou ayant a comme extrémité. Si $\ell' > 0$, on a $\ell'/2 < \ell'$. D'après la proposition 35 page 21, il existe $\delta_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta_0$ alors $g(x) > \ell'/2 > 0$. Si $\ell' < 0$, on a $\ell'/2 > \ell'$. D'après la proposition 35, il existe $\delta_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta_0$ alors $g(x) < \ell'/2 < 0$. Quelque soit le signe de ℓ', on a donc trouvé $\delta_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta_0$ alors $g(x) \neq 0$. La fonction f/g est donc définie sur $I \cap]a-\delta_0, a+\delta_0[- \{a\}$. De plus, sur cet intervalle, on a $|g(x)| > |\ell'|/2$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in I \cap]a-\delta_0, a+\delta_0[- \{a\}$, on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'} = \frac{f(x)\ell' - g(x)\ell}{g(x)\ell'}$$

et donc

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \frac{|f(x)\ell' - g(x)\ell|}{|g(x)| \cdot |\ell'|} \leq \frac{2|f(x)\ell' - g(x)\ell|}{|\ell'|^2}$$

D'après les points précédents, on a

$$\lim_{x \to a} f(x)\ell' - g(x)\ell = \ell\ell' - \ell'\ell = 0.$$

Il existe donc $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta_1$ alors $|f(x)\ell' - g(x)\ell| < \varepsilon\ell'^2/2$. Notons δ le plus petits des deux réels δ_0 et δ_1, pour tout $x \in I - \{a\}$, si $|x-a| < \delta$ alors

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| \leq \varepsilon$$

et $f(x)/g(x)$ tend vers ℓ/ℓ' lorsque x tend vers a.

□

(a) si $x_0 > 2$ (b) si $x_0 < 2$

FIGURE 2 – Choix de x_0

Proposition 38 (Composition des limites)**–** *Soit I un intervalle et a un réel qui*
- *appartient à I ;*
- *ou bien est une extrémité de I.*

Soit f une fonction définie sur $I - \{a\}$. On suppose que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a. Soit J un intervalle contenant ℓ tel que $f(I) \subset J$. Soit g une fonction définie sur J. On suppose que $g(x)$ tend vers $g(\ell)$ lorsque x tend vers ℓ. Alors $g(f(x))$ tend vers $g(\ell)$ lorsque x tend vers a.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque g tend vers $g(\ell)$ en ℓ, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall y \in J - \{\ell\} \qquad |y - \ell| < \delta_1 \Rightarrow \left|g(y) - g(\ell)\right| < \varepsilon. \tag{19}$$

Bien sûr, on a aussi $\left|g(y) - g(\ell)\right| < \varepsilon$ lorsque $y = \ell$. D'autre part, f tend vers ℓ en a. Il existe donc $\delta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in I - \{a\} \qquad |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \delta_1.$$

On choisit $y = f(x)$ dans (19), on a alors

$$\forall x \in I - \{a\} \qquad |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(f(x)) - g(\ell)| < \varepsilon.$$

Ainsi, $g \circ f$ tend vers $g(\ell)$ en a. □

Reprenons l'exemple 31, c'est-à-dire la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Nous avons vu que cette fonction n'est pas continue en 2 puisque

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1 \neq f(2).$$

Montrons qu'en revanche, elle est continue en tout réel différent de 2. Soit x_0 un réel différent de 2. On va construire un intervalle contenant x_0 sur lequel f est constante et donc continue. On en déduira en particulier la continuité de f en x_0.

Si $x_0 > 2$, on choisit $\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta$ soit le milieu $[2, x_0]$ (voir figure 2a). On choisit donc

$$\delta = \frac{x_0 - 2}{2} > 0.$$

Dans ce cas, la fonction est constante égale à 1 sur l'intervalle $]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Elle est donc continue en $x_0 \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Si $x_0<2$, on choisit $\delta>0$ tel que $x_0+\delta$ soit le milieu $[x_0, 2]$ (voir figure 2b page précédente). On choisit donc

$$\delta = \frac{2-x_0}{2} > 0.$$

Dans ce cas, la fonction est constante égale à 1 sur l'intervalle $]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Elle est donc continue en x_0.

La fonction f est donc continue en tous les réels de son ensemble de définition, sauf un. Dans ce cas, il suffit de la modifier très légèrement pour la transformer en une fonction continue. En effet, la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 2 \\ \lim\limits_{t\to 2} f(t) = 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est en effet continue, comme f en tout réel de $\mathbb{R}-\{2\}$ et en 2 parce qu'elle est égale à sa limite.

Définition 39– *Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit $f : I-\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I-\{x_0\}$. On suppose que f admet une limite en x_0. Alors, la fonction $\widetilde{f}$ définie sur I par*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I-\{x_0\} \\ \lim\limits_{t\to x_0} f(t) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue sur I. On l'appelle le prolongement par continuité *de f en x_0.*

Exemple 40– La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}^*$. En effet, son numérateur est combinaison linéaire des fonctions continues $\cos$ et $x \mapsto 1$ alors que le dénominateur est continu et ne s'annule qu'en 0. Vous avez vu au premier semestre qu'en 0, on a le développement limité

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On en déduit que

$$f(x) = -\frac{1}{2} + o(1)$$

autrement dit que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

Le prolongement par continuité de f en 0 est donc la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exemple 41– Soit $n \geq 1$. On pose

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Par sommation des termes d'une suite géométrique, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

pour tout $x \neq 1$. Or, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a

$$\lim_{x \to 1} x^k = 1 \quad \text{et donc} \quad \lim_{x \to 1} \sum_{k=0}^{n} x^k = n + 1.$$

Le prolongement par continuité de f est donc la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Considérons maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(voir la figure 3 page suivante). Elle n'est pas continue (considérer la suite de terme général $-1/n$ et la suite de terme général de terme général $1/n$). Si on suit la courbe de gauche à droite, on se rapproche du point $(0, 0)$ avant le saut. En revanche, si on la suit de droite à gauche, on se rapproche du point $(0, 1)$ avant le saut. On introduit une notion d'analyse pour décrire ce phénomène.

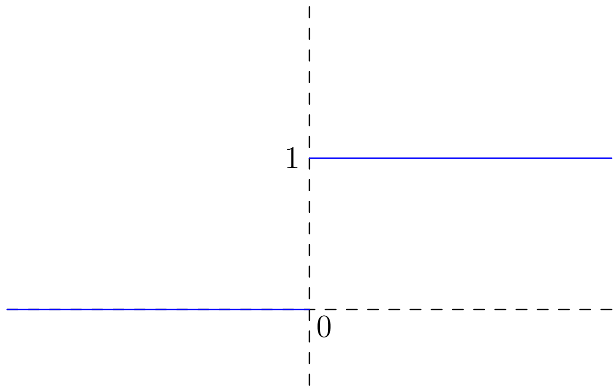


FIGURE 3

Définition 42– Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert. Soit $x_0 \in]a,b[$ et soit f une fonction définie sur $]a,b[-\{x_0\}$. On définit les fonctions f_g et f_d par

$$\begin{array}{rccc} f_g : &]a,x_0[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} f_d : &]x_0,b[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à gauche, et on note

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$$

si

$$\lim_{x \to x_0} f_g(x) = \ell.$$

On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite, et on note

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$$

si

$$\lim_{x \to x_0} f_d(x) = \ell.$$

À l'aide des quantificateurs, la fonction f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à gauche si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a,x_0[, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

La fonction f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]x_0,b[, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

En comparant ces deux définitions à celle de la limite, on voit donc qu'une fonction admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et une limite à droite et ces deux limites sont égales.

3.4) Limite en l'infini, limites infinies

Définition 43 (Limite finie en $+\infty$)– *Soit I un intervalle dont la borne droite est $+\infty$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

Définition 44 (Limite finie en $-\infty$)– *Soit I un intervalle dont la borne gauche est $-\infty$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x < m \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell.$$

Exemple 45– On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Elle est en particulier définie sur $I =]-1, +\infty[$. Montrons qu'elle tend vers 1 en $+\infty$. Pour tout $x \in I$, on a

$$|f(x) - 1| = \frac{1}{x+1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $M = 1/\varepsilon - 1$. Si $x \in I$ vérifie $x > M$, on a alors $x + 1 > 1/\varepsilon$. Comme $1/\varepsilon > 0$, on en déduit

$$\frac{1}{x+1} > \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, si $x > M$ alors $|f(x) - 1| < \varepsilon$. On en déduit que f admet une limite en $+\infty$ et que cette limite est 1.

Elle est en aussi définie sur $J =]-\infty, -1[$. Montrons qu'elle tend vers 1 en $-\infty$. Pour tout $x \in J$, on a

$$|f(x) - 1| = \frac{1}{-x-1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $m = -1 - 1/\varepsilon$. Si $x \in J$ vérifie $x < m$, on a alors $-x - 1 > 1/\varepsilon$. Comme $1/\varepsilon > 0$, on en déduit

$$\frac{1}{-x-1} > \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in J$, si $x < m$ alors $|f(x) - 1| < \varepsilon$. On en déduit que f admet une limite en $-\infty$ et que cette limite est 1.

Exemple 46– Soit a, b, c et d des réels. On suppose $c > 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-d/c\}$ par

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Elle est en particulier définie sur $I =]-d/c, +\infty[$. Montrons qu'elle tend vers a/c en $+\infty$. Pour tout $x \in I$, on a

$$\left|f(x) - \frac{a}{c}\right| = K \cdot \frac{1}{cx+d} \quad \text{avec} \quad K = \left|\frac{bc-ad}{c}\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$M = \frac{1}{c}\left(\frac{K}{\varepsilon} - d\right).$$

Si $x \in I$ vérifie $x > M$, on a alors $cx + d > K/\varepsilon$. Comme $K/\varepsilon > 0$, on en déduit

$$K \cdot \frac{1}{cx+d} > \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, si $x > M$ alors $|f(x) - a/c| < \varepsilon$. On en déduit que f admet une limite en $+\infty$ et que cette limite est a/c.

Elle est en aussi définie sur $J =]-\infty, -d/c[$. Montrons qu'elle tend vers a/c en $-\infty$. Pour tout $x \in J$, on a

$$\left|f(x) - \frac{a}{c}\right| = K \cdot \frac{1}{-cx-d}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$M = \frac{1}{c}\left(-\frac{K}{\varepsilon} - d\right).$$

Si $x \in J$ vérifie $x < m$, on a alors $-cx - d > 1K\varepsilon$. Comme $K/\varepsilon > 0$, on en déduit

$$\frac{1}{-cx-d} > \frac{\varepsilon}{K}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in J$, si $x < m$ alors $|f(x) - a/c| < \varepsilon$. On en déduit que f admet une limite en $-\infty$ et que cette limite est a/c.

L'équivalent de la proposition 35 relatif aux limites en l'infini est la suivante.

Proposition 47–

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont la borne droite est $+\infty$. On suppose que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Soit a et b des réels tels que $a < \ell < b$. Il existe $K > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $x > K$ alors $a < f(x) < b$.

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont la borne gauche est $-\infty$. On suppose que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$. Soit a et b des réels tels que $a < \ell < b$. Il existe $k > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $x < k$ alors $a < f(x) < b$.

La preuve est très semblable à celle de la proposition 35. Le lecteur la fera à titre d'exercice.

Un corollaire de la proposition 47 est l'unicité de la limite en $+\infty$ et l'unicité de la limite en $-\infty$. Autrement dit, si ℓ et ℓ' sont des limites de f en $+\infty$, alors $\ell = \ell'$. De même, si ℓ et ℓ' sont des limites de f en $-\infty$, alors $\ell = \ell'$. La encore, la démonstration, très proche de celle de l'unicité de la limite réel en un réel est laissée au lecteur.

De même, comme pour les limites en un réel, on peut additionner et multiplier les limites réelles en l'infini, on peut prendre l'inverse d'une limite réelle non nulle en l'infini.

Traitons maintenant le cas des fonctions qui deviennent de plus en plus grande, ou de plus en plus négatives lorsque la variable se rapproche d'un réel fixe ou de l'infini.

Définition 48 (Limite infinie en un réel)– *Soit I un intervalle et x_0 un réel. On suppose que $x_0 \in I$ ou que x_0 est une extrémité de I. Soit f une fonction définie sur $I - \{x_0\}$.*

1) On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0, et on note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

si,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

2) On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0, et on note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

si,

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < m.$$

Définition 49 (Limite infinie en l'infini)– *Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.*

1) *On suppose que l'extrémité droite de I est $+\infty$.*
   a) *On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et on note*
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
   si
   $$\forall M \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x > K \Rightarrow f(x) > M.$$
   b) *On dit que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$, et on note*
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
   si
   $$\forall m \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x > K \Rightarrow f(x) < m.$$
2) *On suppose que l'extrémité droite de I est $-\infty$.*
   a) *On dit que f tend vers $+\infty$ en $-\infty$, et on note*
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
   si
   $$\forall M \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x < k \Rightarrow f(x) > M.$$
   b) *On dit que f tend vers $-\infty$ en $-\infty$, et on note*
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
   si
   $$\forall m \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x < k \Rightarrow f(x) < m.$$

Les opérations que l'on peut faire sur les limites sont données dans la tableau 1 page suivante. La notation a peut désigner soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Le symbole ✎ indique les cas qui requièrent un travail adapté à chaque situation particulière.

Le lecteur est invité à démontrer chaque résultat. À titre d'exemple, montrons le résultat suivant : si $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers le réel x_0, alors :

1) La fonction f ne s'annule pas sur un intervalle contenant x_0 ou dont x_0 est une extrémité, éventuellement privé de x_0 ;
2) La fonction $1/f$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0.

Soit I un intervalle contenant x_0 ou dont x_0 est une extrémité. On suppose que f est définie sur $I - \{x_0\}$.

Hypothèses	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ avec $M \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = L+M$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = M$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$
	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = LM$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{(si } M>0) \\ -\infty & \text{(si } M<0) \end{cases}$
	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{(si } M>0) \\ -\infty & \text{(si } M<0) \end{cases}$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = L$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$
	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) =$
	$\lim\limits_{x\to a}\left\lvert \dfrac{f(x)}{g(x)} \right\rvert = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\lim\limits_{x\to a}\left\lvert \dfrac{f(x)}{g(x)} \right\rvert = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) =$
	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \begin{cases} -\infty & \text{(si } L>0) \\ +\infty & \text{(si } L<0) \end{cases}$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) =$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$
	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

Tableau 1 – Opérations sur les limites

1) De
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$
on tire, pour tout réel M l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{x_0\}$, si $|x - x_0| < \delta$ alors $f(x) > M$. En choisissant $M = 1$, on trouve δ tel que, pour tout $x \in I - \{x_0\}$, si $|x - x_0| < \delta$ alors $f(x) > 1$ et en particulier $f(x) \neq 0$. On rappelle que
$$\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$
et on pose $J = I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. C'est un intervalle contenant x_0 ou dont x_0 est une extrémité. Ce qui précède montre que f ne s'annule pas sur $J - \{x_0\}$.

2) On peut donc considérer la fonction $1/f$ définie sur $J - \{x_0\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous devons trouver $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in J - \{x_0\}$, si $|x - x_0| < \delta$ alors $|1/f(x)| < \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$. De
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$
on tire, pour tout réel M l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{x_0\}$, si $|x - x_0| < \delta$ alors $f(x) > M$. On choisit $M = 1/\varepsilon$. On obtient $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{x_0\}$, si $|x - x_0| < \delta$ alors $f(x) > 1/\varepsilon > 0$. Comme J est inclus dans I, pour tout $x \in J - \{x_0\}$, si $|x - x_0| < \delta$ alors $|1/f(x)| < \varepsilon$.

3.5) Limites et comparaisons

Les inégalités *larges* passent à la limite.

***Théorème* 50–** *Soit I un intervalle. Soit x_0 un réel dans I ou une extrémité de I, éventuellement $\pm\infty$. Soit f et g des fonctions définies sur $I - \{x_0\}$ telles que*
$$\forall x \in I - \{x_0\},\ f(x) \leq g(x).$$
On suppose
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}.$$
Alors, $\ell \leq \ell'$.

Remarque 51– Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ ne représentent pas des nombres réels. La notation $I - \{x_0\}$ est donc un abus lorsque $x_0 = -\infty$ ou $x_0 = +\infty$. On lève cet abus en définissant $I - \{-\infty\} = I$ et $I - \{+\infty\} = I$.

Démonstration.

1) On suppose d'abord $x_0 = -\infty$. On raisonne par contraposition. On suppose que $\ell' < \ell$ et on doit montrer l'existence de $x \in I$ tel que $f(x) > g(x)$. La fonction $g - f$ tend vers $\ell' - \ell$ en $-\infty$. Comme $\ell' - \ell < 0$, il existe M tel que, pour tout $x > M$, on a $g(x) - f(x) < 0$. En particulier, il existe $x \in I$ tel que $g(x) < f(x)$.

2) On suppose ensuite $x_0 \in \mathbb{R}$. On raisonne par contraposition. On suppose que $\ell' < \ell$ et on doit montrer l'existence de $x \in I$ tel que $f(x) > g(x)$. La fonction $g - f$ tend vers $\ell' - \ell$ en $-\infty$. Comme $\ell' - \ell < 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{x_0\}$ tel que $|x - x_0| < \delta$, on a $g(x) - f(x) < 0$. En particulier, il existe $x \in I$ tel que $g(x) < f(x)$ (on peut par exemple choisir $x = x_0 + \delta/2$).
3) Enfin, on suppose $x_0 = +\infty$. Soit $J = \{x \in \mathbb{R}, -x \in I\}$. On définit sur I les fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ en posant
$$\forall x \in I, \quad \widetilde{f}(x) = f(-x), \quad \widetilde{g}(x) = g(-x).$$
La fonction $\widetilde{f}$ tend vers ℓ en $-\infty$. La fonction $\widetilde{g}$ tend vers ℓ' en $-\infty$. De plus, pour tout $x \in J$ on a $\widetilde{f}(x) \le \widetilde{g}(x)$. Grâce au premier point de la preuve, on en déduit $\ell \le \ell'$.

□

Le théorème précédent exige que l'on sache déjà l'existence de limites pour les fonctions f et g. Le théorème suivant en revanche permet de démontrer qu'une fonction admet une limite.

***Théorème* 52–** *Soit I un intervalle. Soit x_0 un réel dans I ou une extrémité de I, éventuellement $\pm\infty$. Soit f, g et h des fonctions définies sur $I - \{x_0\}$.*

1) On suppose que
— $\forall x \in I - \{x_0\}$, $f(x) \le g(x) \le h(x)$;
— les fonctions f et h convergent en x_0 vers une même limite réelle ℓ.
Alors, g admet une limite en x_0, et cette limite est ℓ.

2) On suppose que
— $\forall x \in I - \{x_0\}$, $f(x) \le g(x)$;
— la fonction f tend vers $+\infty$ en x_0.
Alors, la fonction g tend vers $+\infty$ en x_0.

3) On suppose que
— $\forall x \in I - \{x_0\}$, $f(x) \le g(x)$;
— la fonction g tend vers $-\infty$ en x_0.
Alors, la fonction f tend vers $-\infty$ en x_0.

Démonstration.

1) a) On suppose que x_0 est réel. On doit montrer, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{x_0\}$, si $|x - x_0| < \delta$ alors $|g(x) - \ell| < \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Puisque f tend vers ℓ en x_0, il existe δ_1 tel que
$$\forall x \in I - \{x_0\}, \quad |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon.$$
Puisque h tend vers ℓ en x_0, il existe δ_2 tel que
$$\forall x \in I - \{x_0\}, \quad |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow -\varepsilon < h(x) - \ell < \varepsilon.$$
Soit δ le plus petit des deux réels δ_1 et δ_2. Si $x \in I - \{x_0\}$ vérifie $|x - x_0| < \delta$ alors $|x - x_0| < \delta_1$ donc $-\varepsilon < f(x) - \ell$. Mais, pour tout $x \in I - \{x_0\}$, on a $f(x) - \ell \le g(x) - \ell$

donc, si $x \in I - \{x_0\}$ vérifie $|x - x_0| < \delta$ alors $-\varepsilon < g(x) - \ell$. D'autre part, si $x \in I - \{x_0\}$ vérifie $|x - x_0| < \delta$ alors $|x - x_0| < \delta_2$ donc $h(x) - \ell < \varepsilon$. Mais, pour tout $x \in I - \{x_0\}$, on a $g(x) - \ell \leq h(x) - \ell$ donc, si $x \in I - \{x_0\}$ vérifie $|x - x_0| < \delta$ alors $g(x) - \ell < \varepsilon$. Finalement,

$$\forall x \in I - \{x_0\}, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon.$$

b) On suppose que $x_0 = +\infty$. On doit montrer, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence de $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, si $x > M$ alors $|g(x) - \ell| < \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Puisque f tend vers ℓ en $+\infty$, il existe M_1 tel que

$$\forall x \in I, \quad x > M_1 \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon.$$

Puisque h tend vers ℓ en $+\infty$, il existe M_2 tel que

$$\forall x \in I, \quad x > M_2 \Rightarrow -\varepsilon < h(x) - \ell < \varepsilon.$$

Soit M le plus petit des deux réels M_1 et M_2. Si $x \in I$ vérifie $x > M$ alors $x > M_1$ donc $-\varepsilon < f(x) - \ell$. Mais, pour tout $x \in I$, on a $f(x) - \ell \leq g(x) - \ell$ donc, si $x \in I$ vérifie $x > M$ alors $-\varepsilon < g(x) - \ell$. D'autre part, si $x \in I$ vérifie $x > M$ alors $x > M_2$ donc $h(x) - \ell < \varepsilon$. Mais, pour tout $x \in I$, on a $g(x) - \ell \leq h(x) - \ell$ donc, si $x \in I$ vérifie $x > M$ alors $g(x) - \ell < \varepsilon$. Finalement,

$$\forall x \in I, \quad x > M \Rightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon.$$

c) On suppose que $x_0 = -\infty$. On définit $J = \{x \in \mathbb{R} : -x \in I\}$ puis, sur J, on définit les fonctions $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ et $\widetilde{h}$ en posant

$$\forall x \in J, \quad \widetilde{f}(x) = f(-x), \widetilde{g}(x) = g(-x), \widetilde{h}(x) = h(-x).$$

Les fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{h}$ tendent vers ℓ en $+\infty$. De plus,

$$\forall x \in J, \quad \widetilde{f}(x) \leq \widetilde{g}(x) \leq \widetilde{h}(x).$$

On déduit alors du point précédent que $\widetilde{g}$ tend vers ℓ en $+\infty$ et donc que g tend vers ℓ en $-\infty$.

2) a) On suppose que x_0 est réel. Soit $M \in \mathbb{R}$, nous devons trouver un réel $\delta > 0$ tel que,

$$\forall x \in I - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow g(x) > M.$$

Soit donc $M \in \mathbb{R}$. Puisque f tend vers $+\infty$ en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I - \{x_0\}$, si $|x - x_0| < \delta$ alors $f(x) > M$. Or, pour tout $x \in I - \{x_0\}$, on a $f(x) \leq g(x)$ donc, si $|x - x_0| < \delta$ alors $g(x) > M$.

b) On suppose que $x_0 = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$, nous devons trouver un réel $K \in \mathbb{R}$ tel que,

$$\forall x \in I, x > K \Rightarrow g(x) > M.$$

Soit donc $M \in \mathbb{R}$. Puisque f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, si $x > K$ alors $f(x) > M$. Or, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq g(x)$ donc, si $x > K$ alors $g(x) > M$.

c) On suppose que $x_0 = -\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$, nous devons trouver un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que,

$$\forall x \in I,\, x < k \Rightarrow g(x) > M.$$

Soit donc $M \in \mathbb{R}$. Puisque f tend vers $+\infty$ en $-\infty$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, si $x < k$ alors $f(x) > M$. Or, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \le g(x)$ donc, si $x < k$ alors $g(x) > M$.

3) On déduit des hypothèses que

$$\forall x \in I - \{x_0\},\, -g(x) \le -f(x)$$

et que la fonction $-g$ tend vers $+\infty$ en x_0. En appliquant le point précédent, on déduit que $-f$ tend vers $+\infty$ en x_0 puis que f tend vers $-\infty$ en x_0.

□

La proposition 35 a montré que si une fonction à une limite finie en un réel x_0, alors elle ne peut pas être trop grande à condition d'être suffisamment proche de x_0. Introduisons le vocabulaire nécessaire à une expression concise et précise de ce fait.

Définition 53– Soit f une fonction et D un ensemble sur lequel elle est définie.

1) *Un* majorant *de f sur D est un réel M tel que*

$$\forall x \in D,\, f(x) \le M.$$

2) *Un* minorant *de f sur D est un réel m tel que*

$$\forall x \in D,\, m \le f(x).$$

3) *La fonction f est dite*
   i) majorée *sur D si elle admet un majorant sur D ;*
   ii) minorée *sur D i elle admet un minorant sur D ;*
   iii) bornée *sur D si elle est minorée et majorée sur D .*

Proposition 54– *Soit f une fonction et D un ensemble sur lequel elle est définie. La fonction f est bornée sur D si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée sur D.*

Démonstration. 1) Supposons que f est bornée sur D. Soit alors m et M des réels tels que, pour tout $x \in D$, on ait $m \le f(x) \le M$. Comme $-|m| \le m$ et $M \le |M|$, on a $-|m| \le f(x) \le |M|$ pour tout $x \in D$. De plus, $|M| \le \max(|m|, |M|)$ et $-\max(|m|, |M|) \le -|m|$. On a donc $-\max(|m|, |M|) \le f(x) \le \max(|m|, |M|)$ puis $|f(x)| \le \max(|m|, |M|)$ pour tout $x \in D$. La fonction $|f|$ est majorée par $\max(|m|, |M|)$.

2) Réciproquement, supposons que $|f|$ est majorée sur D. Soit M un réel tel que $|f(x)| \le M$ pour tout $x \in D$. On a alors $-M \le f(x) \le M$ pour tout $x \in D$. Ainsi, f est minorée sur D, un minorant étant $-M$ et f est majorée sur D, un majorant étant M.

□

La proposition 35 implique la proposition suivante.

***Proposition* 55–** *Soit I un intervalle et a un réel qui*
- *appartient à I ;*
- *ou bien est une extrémité de I.*

Soit f une fonction définie sur $I-\{a\}$. Soit ℓ un réel. On suppose que

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell$$

Alors, il existe $\delta>0$ tel que f est bornée sur $I\cap]a-\delta,a+\delta[-\{a\}$.

De la même façon, la proposition 47 implique la proposition suivante.

***Proposition* 56–**

1) *Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont la borne droite est $+\infty$. On suppose que f tend vers $\ell\in\mathbb{R}$ en $+\infty$. Alors, il existe $K>0$ tel que f est bornée sur $[K,+\infty[$.*
2) *Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont la borne gauche est $-\infty$. On suppose que f tend vers $\ell\in\mathbb{R}$ en $-\infty$. Alors, il existe $k>0$ tel que f est bornée sur $]-\infty,k]$.*

3.6) Image des intervalles par les fonctions continues

Le théorème suivant est fondamental pour l'étude des fonctions.

***Théorème* 57** (Théorème des valeurs intermédiaires)**–** *Soit $a<b$ des nombres réels. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Soit k un réel. Si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $k=f(c)$. Si k est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c\in]a,b[$ tel que $k=f(c)$.*

Démonstration. Si $f(a)=f(b)$, alors $k=f(a)$ de sorte qu'on peut choisir $c=f(a)$. Supposons donc $f(a)\neq f(b)$. Si $k=f(a)$, on choisit $c=a$; si $k=f(b)$, on choisit $c=b$. On suppose donc maintenant que k est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

1) Supposons que $f(a)<f(b)$. On définit par récurrence deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_0=a$, $b_0=b$ et

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)<k\\ a_n & \text{sinon}\end{cases}$$

et

$$b_{n+1}=\begin{cases}b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)<c\\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $a_n \in [a,b]$ et $b_n \in [a,b]$. Puisque $a_0 = a \in [a,b]$ et $b_0 = b \in [a,b]$, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Comme, d'après $\mathcal{P}(n)$, on a $a \leq a_n$ et $a \leq b_n$, alors $a \leq (a_n + b_n)/2$ et dans tous les cas $a \leq a_{n+1}$ et $a \leq b_{n+1}$. Comme, d'après $\mathcal{P}(n)$, on a $a_n \leq b$ et $b_n \leq b$, alors $(a_n + b_n)/2 \leq b$ et dans tous les cas $a_{n+1} \leq b$ et $b_{n+1} \leq b$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in [a,b], \, b_n \in [a,b].$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,
— si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < k$ alors $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n-a_n}{2}$;
— si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq k$ alors $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n).$$

La suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $1/2$ et de premier terme $b - a$. Ainsi,

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) > 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la différence entre les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Soit $n \in \mathbb{N}$,
— si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < k$ alors $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} > 0$ et $b_{n+1} - b_n = 0$;
— si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq k$ alors $a_{n+1} - a_n = 0$ et $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n+b_n}{2} - b_n = \frac{a_n-b_n}{2} < 0$.

On en déduit que $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. On en déduit qu'elles sont convergentes et qu'elles ont même limite : soit c cette limite commune. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{R}(n)$ l'hypothèse $f(a_n) < k \leq f(b_n)$. Comme k est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ avec $f(a) < f(b)$, l'hypothèse $\mathcal{R}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}(n)$ est vraie.
— si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < k$ alors
  — on a $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ donc $f(a_{n+1}) < k$;
  — on a $b_{n+1} = b_n$ donc $f(b_{n+1}) = f(b_n) \geq k$ d'après $\mathcal{R}(n)$;
— si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq k$ alors
  — on a $a_{n+1} = a_n$ donc $f(a_{n+1}) = f(a_n) < k$ d'après $\mathcal{R}(n)$;
  — on a $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ donc $f(b_{n+1}) \geq k$.

  L'hypothèse $\mathcal{R}(n+1)$ est donc vraie. L'hypothèse $\mathcal{R}(0)$ est vraie. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{R}(n)$ est vraie alors $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que

$$f(a_n) < k \leq f(b_n) \tag{20}$$

  pour tout entier n. Puisque f est continue, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers c, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(c)$. De même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers c, la suite $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(c)$. Par passage à la limite, l'encadrement (20) conduit à $k = f(c)$. On a $c \neq a$ car $f(c) = k > f(a)$. On a $c \neq b$ car $f(c) = k < f(b)$. Ainsi, $c \in]a,b[$.

2) Supposons que $f(a) > f(b)$. On pose $\widetilde{f}(x) = -f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. La fonction $\widetilde{f}$ est continue et $\widetilde{f}(a) < \widetilde{f}(b)$. Soit $k \in]f(b), f(a)[$. On a $-k \in]\widetilde{f}(a), \widetilde{f}(b)[$. D'après le point précédent, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\widetilde{f}(c) = -k$. On en déduit $f(c) = k$.

□

Remarque 58– La preuve précédente est constructive : étant donné k, elle permet de trouver calculer une valeur de c tel que $k = f(c)$. La méthode utilisée s'appelle *méthode de dichotomie*.

Remarque 59– Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$ et, pour tout entier $n \geq n_0$, une propriété $\mathcal{P}(n)$. Si on veut montrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \neq n_0$, on peut utiliser le raisonnement par récurrence. Le lecteur désireux de montrer qu'il a compris ce qu'est le raisonnement par récurrence s'attachera à suivre le canevas suivant de façon systématique.

***Principe de récurrence* 1–**
Pour tout entier $n \geq n_0$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété $\cdots$.
La propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie parce que $\cdots$.
Soit $n \geq n_0$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. $\cdots$ d'après $\mathcal{P}(n)$ $\cdots$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
On a montré que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que, pour tout entier $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

On peut montrer que pour qu'un ensemble E soit un intervalle, il faut et il suffit que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad x \leq y \Rightarrow [x,y] \subset E.$$

Même si la démonstration de ce résultat n'est pas au programme, le lecteur suffisamment motivé en trouvera une démonstration en annexe (§ 6.1).

De cette caractérisation et du théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

***Corollaire* 60–** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration. Soit x et y dans $f(I)$ tels que $x \leq y$. On doit vérifier $[x,y] \subset f(I)$, c'est-à-dire que si $t \in [x,y]$ alors $t \in f(I)$. Soit u et v dans I tels que $x = f(u)$ et $y = f(v)$. Puisque t est compris entre $f(u)$ et $f(v)$ le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence de w compris entre u et v tel que $t = f(w)$. Or u et v est dans l'intervalle I, donc tout point compris entre u et v est dans I : ainsi $w \in I$ et $t \in f(I)$. □

Si I est un intervalle ouvert, son image $f(I)$ par une fonction continue f peut être n'importe quel type d'intervalle.

Exemple 61–

1) La courbe relative à cet exemple est la figure 4 page ci-contre. La fonction $\sin$ est continue. On a $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$. Si $t \in [-1,1]$ le théorème des valeurs intermédiaires implique donc l'existence de $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $t = \sin(x)$. Ainsi, on a $[-1,1] \subset \sin([-\pi/2, \pi/2]) \subset \sin(]-\pi,\pi[)$. Comme par ailleurs, $\sin$ est à valeurs dans $[-1,1]$ alors $\sin(]-\pi,\pi[) \subset [-1,1]$ et $\sin(]-\pi,\pi[) = [-1,1]$. L'image de l'intervalle ouvert $]-\pi,\pi[$ par la fonction continue $\sin$ est l'intervalle fermé $[-1,1]$.

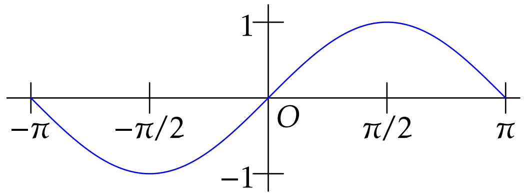


FIGURE 4 – Courbe représentative de la fonction $\sin$ sur $[-\pi, \pi]$.

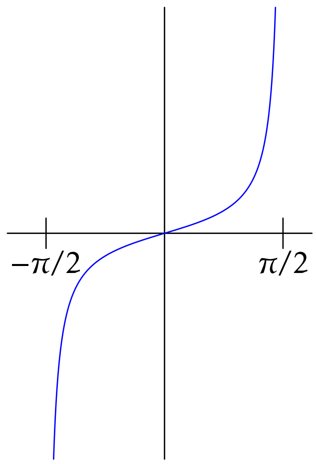


FIGURE 5 – Courbe représentative de la fonction $\tan$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2) La courbe relative à cet exemple est la figure 5. La fonction $\tan$ est la fonction

$$\begin{array}{cccc} \tan & : & \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{array}$$

Elle est continue sur tout intervalle de la forme $]\pi/2 - k\pi, \pi/2 + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc en particulier sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Comme $\sin(-\pi/2) = -1 < 0$ et

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \cos(x) > 0 \text{ si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

on a

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty.$$

Comme $\sin(\pi/2) = 1 > 0$ et

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \cos(x) > 0 \text{ si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

on a

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty.$$

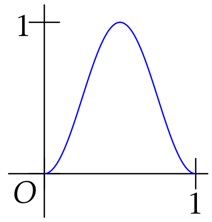


FIGURE 6

Notons $I =]-\pi/2, \pi/2[$, alors $\tan(I)$ est un intervalle. Soit $y \in \mathbb{R}$, montrons que $y \in \tan(I)$. On suppose $y \geq 0$. Puisque $\tan$ tend vers $+\infty$ en $\pi/2$, il existe $x_0 \in [0, \pi/2[$ tel que $\tan(x_0) \geq y$. Ainsi, y est compris entre $0 = \tan(0)$ et $\tan(x_0)$. Comme $\tan$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence de t compris entre 0 et x_0 tel que $y = \tan(t)$, c'est-à-dire $y \in \tan(I)$. On suppose $y \leq 0$. Puisque $\tan$ tend vers $-\infty$ en $-\pi/2$, il existe $x_1 \in]-\pi/2, 0]$ tel que $\tan(x_1) \leq y$. Ainsi, y est compris entre $\tan(x_1)$ et $0 = \tan(0)$. Comme $\tan$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence de u compris entre x_1 et 0 tel que $y = \tan(u)$, c'est-à-dire $y \in \tan(I)$. Pour tout y réel, $y \in \tan(I)$. L'image de l'intervalle ouvert $]-\pi/2, \pi/2[$ par la fonction continue $\tan$ est l'intervalle ouvert $]-\infty, +\infty[$.

3) La courbe relative à cet exemple est la figure 6. La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{1 + \tan(\pi x - \pi/2)^2}$$

est continue en tout réel x tel que $\pi x - \pi/2$ n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$ avec k entier. Elle est donc continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. En particulier, elle est continue sur $]0, 1[$. L'ensemble $f(]0, 1[)$ est donc un intervalle. Pour tout $x \in]0, 1[$, on a $1 + \tan(\pi x - \pi/2)^2 \geq 1$ donc $0 \leq f(x) \leq 1$. Le numérateur de f ne s'annulant pas, f ne s'annule pas. On a donc $0 < f(x) \leq 1$ pour tout $x \in]0, 1[$, autrement dit $f(]0, 1[) \subset]0, 1]$. Soit $y \in]0, 1]$. Comme f tend vers 0 en 0 (car $\tan(\pi x - \pi/2)$ tend vers $-\infty$ en 0), il existe $x_0 \in]0, 1]$ tel que $0 \leq f(x_0) \leq y_0$ (en utilisant le définition de f tend vers 0 en 0 avec $\varepsilon = y_0 > 0$). Par ailleurs, $f(1/2) = 1$. Ainsi, y_0 est compris entre $f(x_0)$ et $f(1/2)$. Il existe donc t compris entre x_0 et $1/2$ tel que $y = f(t)$. Comme $t \in]0, 1[$, on a donc $]0, 1] \subset f(]0, 1[)$ puis $f(]0, 1[) =]0, 1]$. L'image de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ par la fonction continue f est l'intervalle ouvert à gauche et fermé à droite $]0, 1]$.

Si l'image par une fonction continue d'un intervalle ouvert peut être n'importe quel type d'intervalle, on a un résultat plus précis pour les images d'intervalles fermés. On admet le résultat suivant qui repose sur la notion de borne supérieure, notion qui n'est pas au programme (voir cependant l'annexe 6.2).

Théorème 62– *Soit $a \leq b$ des nombres réels. Si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ alors f est bornée sur cet intervalle :*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq M.$$

On montre alors le théorème suivant.

***Théorème* 63–** *L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.*

Démonstration. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Il s'agit de démontrer l'existence de réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$. Comme $f([a,b]$ est intervalle borné (d'après le corollaire 60 et le théorème 62), il existe des réels $m \leq M$ tels que $f([a,b])$ est l'un des intervalles $[m,M]$, $[m,M[$, $]m,M]$, $]m,M[$. Supposons par l'absurde que $M \notin f([a,b])$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a alors $f(x) < M$ et donc $M - f(x) > 0$. La fonction

$$\begin{array}{rccc} g & : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{M-f(x)} \end{array}$$

est alors continue. Elle est donc bornée sur l'intervalle $[a,b]$: soit $K \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait $g(x) \leq K$. On en déduit que

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) < M - \frac{1}{K}. \tag{21}$$

Or, $]m,M[$ étant inclus dans $f([a,b])$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in f([a,b]$ tel que $y > M - \varepsilon$. Autrement dit, avec le choix $\varepsilon = 1/(2K)$, on obtient

$$\exists x \in [a,b] \quad f(x) > M - \frac{1}{2K}. \tag{22}$$

Les énoncés (21) et (22) sont contradictoires. On en déduit $M \in f([a,b])$ et donc $f([a,b])$ est l'un des intervalles $[m,M]$ ou $]m,M]$.

La fonction $-f$ est continue sur $[a,b]$ et son image est $[-M,-m[$ ou $[-M,-m]$. Appliquant ce qui précède à cette fonction $-f$, on trouve que $-f(([a,b]) = [-M,-m]$. Ainsi $f([a,b]) = [m,M]$ □

Le théorème 62 affirme que l'image d'une fonction continue sur un intervalle fermé est une partie d'un intervalle fermé. Le théorème 63 précise ce résultat en montrant que l'image d'une fonction continue sur un intervalle fermé est un intervalle fermé. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. L'égalité $f([a,b]) = [m,M]$ implique que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $m \leq f(x) \leq M$. La fonction f est donc bornée. Mais cette égalité implique aussi que $m \in f([a,b])$ et $M \in f([a,b])$. Il existe donc deux réels x_m et x_M de $[a,b]$ tels que $m = f(x_m)$ et $M = f(x_M)$. On peut donc retenir l'énoncé suivant.

***Corollaire* 64–** *Une fonction continue sur un intervalle fermé est bornée et atteint ses bornes sur cet intervalle.*

Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$, on contrôle sa taille pour les grandes valeurs de la variable. On en déduit le résultat suivant.

***Proposition* 65–** *Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ alors elle est bornée.*

Démonstration. La fonction f admet une limite ℓ' en $-\infty$. En appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, on trouve $a \in \mathbb{R}$ tel que si $x \leq a$, alors $|f(x) - \ell'| \leq 1$. On en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq a \Rightarrow \ell' - 1 \leq f(x) \leq \ell' + 1. \tag{23}$$

La fonction f admet une limite ℓ en $+\infty$. En appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, on trouve $b \in \mathbb{R}$ tel que si $x \geq b$, alors $|f(x) - \ell| \leq 1$. On en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq b \Rightarrow \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1. \tag{24}$$

Enfin, la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$. On en déduit l'existence de réels m et M tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \Rightarrow m_0 \leq f(x) \leq M_0. \tag{25}$$

On pose $m = \min(\ell' - 1, \ell - 1, m_0)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Soit $x \leq a$, alors $f(x) \geq \ell' - 1$ d'après (23) et $\ell' - 1 \geq m$. On en déduit $f(x) \geq m$.
- Soit $a \leq x \leq b$, alors $f(x) \geq m_0$ d'après (25) et $m_0 \geq m$. On en déduit $f(x) \geq m$.
- Soit $x \geq b$, alors $f(x) \geq \ell' - 1$ d'après (24) et $\ell - 1 \geq m$. On en déduit $f(x) \geq m$.

Pour tout $x \in [a, b]$, on a donc $m \leq f(x)$.

On pose $M = \max(\ell' + 1, \ell + 1, M_0)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Soit $x \leq a$, alors $f(x) \leq \ell + 1$ d'après (23) et $\ell + 1 \leq M$. On en déduit $f(x) \leq M$.
- Soit $a \leq x \leq b$, alors $f(x) \leq M_0$ d'après (25) et $M_0 \leq M$. On en déduit $f(x) \leq M$.
- Soit $x \geq b$, alors $f(x) \leq \ell + 1$ d'après (24) et $\ell + 1 \leq M$. On en déduit $f(x) \leq M$.

Pour tout $x \in [a, b]$, on a donc $f(x) \leq M$. □

3.7) Fonctions réciproques

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on dit qu'elle est *injective* si

$$\forall x \in I, \forall x' \in I \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'. \tag{26}$$

Chercher si une fonction f est injective revient donc à résoudre, pour tout $x' \in I$, l'équation $f(x) = f(x')$ d'inconnue $x' \in I$.

En prenant la contraposée de (26), on trouve que la fonction f est injective si et seulement si

$$\forall x \in I, \forall x' \in I \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'). \tag{27}$$

Une fonction est donc injective si et seulement si elle ne prend pas deux fois la même valeur.

On introduit ensuite le vocabulaire nécessaire à la description des variations des fonctions. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- La fonction f est *croissante* si elle préserve les inégalités larges, c'est-à-dire si

$$\forall x \in I, \forall x' \in I \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x').$$

- La fonction f est *strictement croissante* si elle préserve les inégalités strictes, c'est-à-dire si

$$\forall x \in I, \forall x' \in I \quad x < x' \Rightarrow f(x) < f(x').$$

— La fonction f est *décroissante* si elle échange les inégalités larges, c'est-à-dire si

$$\forall x \in I, \forall x' \in I \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x').$$

— La fonction f est *strictement décroissante* si elle échange les inégalités strictes, c'est-à-dire si

$$\forall x \in I, \forall x' \in I \quad x < x' \Rightarrow f(x) > (x').$$

Enfin, la fonction f est monotone si elle est soit croissante sur I, soit décroissante sur I. Elle est strictement monotone si elle est soit strictement croissante sur I, soit strictement décroissante sur I.

***Proposition* 66–** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Elle est injective.*

Démonstration. On utilise la caractérisation (27). Considérons deux éléments distincts de I. On note x le plus petit et x' le plus grand de sorte que $x < x'$. Si f est strictement croissante, alors $f(x) < f(x')$. En particulier $f(x) \neq f(x')$. Si f est strictement décroissante, alors $f(x) > f(x')$. En particulier $f(x) \neq f(x')$. Les images d'éléments distincts de I sont des réels distincts, la fonction f est donc injective. □

Une fonction $f : I \to J$ est *surjective* si toutes les valeurs de J sont atteintes par f, c'est-à-dire si

$$\forall y \in J \quad \exists x \in I \quad y = f(x).$$

Puisque l'image $f(I)$ de I par f est l'ensemble des réels qui s'écrivent $f(x)$ avec $x \in I$, on a

$$f : I \to J \text{ est surjective si et seulement si } f(I) = J.$$

En particulier, une fonction est toujours surjective sur son image.

On rappelle que si $f : I \to J$ est une application bijective, il existe une fonction $g : J \to I$ vérifiant

$$\forall x \in J \quad f(g(x)) = x.$$

Cette fonction g s'appelle la fonction réciproque de f. Elle est bijective et vérifie

$$\forall x \in I \quad g(f(x)) = x.$$

***Théorème* 67–** *Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.*

1) *L'ensemble $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux borne de I. De plus, la fonction f définit une bijection de I dans $f(I)$.*
2) *La bijection réciproque de f est continue strictement monotone. Son sens de variation est le même que celui de f.*

Exemple 68–

1. La restriction de la fonction $\sin$ à l'intervalle fermé $[-\pi/2, \pi/2]$ est la fonction

$$\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$

   Cette fonction est continue et strictement croissante. Comme $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$, on a

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1,1].$$

   Elle définit donc une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1,1]$ et admet une fonction réciproque définie sur $[-1,1]$. Cette fonction, notée $\arcsin$ est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$. Elle vérifie

$$\forall x \in [-1,1] \quad \sin(\arcsin(x)) = x$$

   et

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \arcsin(\sin(x)) = x.$$

   On pourra donc retenir que, pour tout réel $x \in [-1,1]$, le réel $\arcsin(x)$ est l'unique réel dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus est x.

2. La restriction de la fonction $\cos$ à l'intervalle fermé $[0, \pi]$ est la fonction

$$\begin{array}{ccc} [0, \pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x). \end{array}$$

   Cette fonction est continue et strictement décroissante. Comme $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, on a

$$\cos([0, \pi]) = [-1,1].$$

   Elle définit donc une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1,1]$ et admet une fonction réciproque définie sur $[-1,1]$. Cette fonction, notée $\arccos$ est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$. Elle vérifie

$$\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\arccos(x)) = x$$

   et

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \arccos(\cos(x)) = x.$$

   On pourra donc retenir que, pour tout réel $x \in [-1,1]$, le réel $\arccos(x)$ est l'unique réel dans l'intervalle $[0, \pi]$ dont le cosinus est x.

4 Dérivabilité d'une fonction de la variable réelle

4.1) Dérivée d'une fonction de la variable réelle

Définition 69– Soit I un intervalle ouvert, *$x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est* dérivable *en x_0 si*

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a une limite finie lorsque x tend vers x_0. Le nombre dérivé *de f en x_0 est alors*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si une fonction f est dérivable en tous les réels d'un intervalle I, on dit qu'elle est dérivable sur I. La fonction

$$\begin{array}{cccc} f' & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

s'appelle la dérivée de f.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en $x_0 \in I$. On définit sur I une fonction ε en posant

$$\forall x \in I \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \,; \\ 0 & \text{si } x \neq x_0. \end{cases}$$

Par définition du nombre dérivé $f'(x_0)$, la fonction ε admet une limite en x_0 et cette limite est $f'(x_0) - f'(x_0) = 0$. On a donc

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

D'autre part, pour tout $x \in I - \{x_0\}$ on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Cette égalité reste vraie pour x_0 puisqu'elle donne $f(x_0) = f(x_0)$. On a donc montré l'existence

- d'une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ de limite nulle en x_0 ;
- de deux réels a_0 et a_1

tels que

$$\forall x \in I \quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Réciproquement, soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle qu'il existe

- une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ de limite nulle en x_0 ;
- deux réels a_0 et a_1

tels que
$$\forall x \in I \quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$
En choisissant $x = x_0$, on trouve que $a_0 = f(x_0)$. On a alors
$$\forall x \in I - \{x_0\} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + \varepsilon(x).$$
En faisant tendre x vers x_0, on voit que f est dérivable en x_0 et que
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1.$$
On a démontré le lien suivant entre la dérivabilité et la notion de développement limité vue au premier semestre.

Proposition 70– *Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0.*

Il résulte de cette proposition que si f est dérivable en x_0 alors
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
et donc f est continue en x_0.

Exemple 71– Soit $n \geq 1$ un entier et $a \in \mathbb{R}$ un réel. Soit x_0 un réel. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = ax^n.$$
Si $n = 1$ alors
$$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\} \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = a.$$
On en déduit que f est dérivable et que $f'(x_0) = a$.

On suppose maintenant $n \geq 2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} ax^n = (x_0 + (x - x_0))^n &= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k} \\ &= ax_0^n + anx_0^{n-1}(x - x_0) + a \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k}. \end{aligned} \tag{28}$$
On écrit ensuite
$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k} = (x - x_0) \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (x - x_0)^{k-1} x_0^{n-k} = (x - x_0) \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell + 1} (x - x_0)^{\ell} x_0^{n-\ell-1}.$$
On pose alors
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varepsilon(x) = a \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell + 1} (x - x_0)^{\ell} x_0^{n-\ell-1}.$$

On a

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^\ell = 0$$

et, par sommation finie de tels termes

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

L'égalité 28 se réécrit alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x_0) + anx_0^{n-1}(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Celai implique que f est dérivable et que

$$f'(x) = anx_0^{n-1}.$$

Corollaire 72– *Si f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0.*

La réciproque de cette proposition est fausse : il existe des fonctions continues en un réel qui ne sont pas dérivables en ce réel. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{|x|}.$$

La courbe relative à cet exemple est la figure 7.

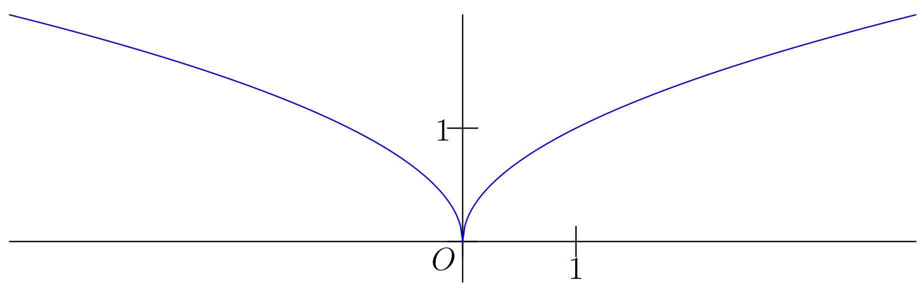


FIGURE 7 – Une fonction continue en 0 non dérivable.

La fonction f est continue en 0 comme composée de fonctions continues. Pour tout réel $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{|x|}}{x}.$$

Si $x > 0$, on a $x = |x| = \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|x|}$. Si $x < 0$, on a $x = -|x| = -\sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|x|}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{si } x > 0\,; \\ -\dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ce quotient n'a pas de limite réelle lorsque x tend vers 0. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

Pour terminer cette partie, on donne une interprétation géométrique de la notion de dérivée.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$, on note $M(x)$ le point de coordonnées $(x, f(x))$, c'est un point de $\mathcal{C}$. Pour tout $x \in I$, la droite $(M(x_0)M(x))$ a pour équation $Y = mX + p$. Le réel m est la pente de la droite, le réel p est l'ordonnée à l'origine. Ils satisfont au système d'équations linéaires (en m et p)

$$\begin{aligned} y_0 &= mx_0 + p \\ y &= mx + p. \end{aligned}$$

En particulier, si $x \neq x_0$, on trouve

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si f est dérivable en x_0 et si x tend vers x_0, la pente de $(M(x_0)M(x))$ tend donc vers $f'(x_0)$. Le nombre $f'(x_0)$ est donc limite de la pente des cordes reliant $M(x_0)$ à un point de la courbe lorsque ce point se rapproche de $M(x_0)$. La droite passant par le point $M(x_0)$ et de pente cette limite $f'(x_0)$ des pentes des cordes est la tangente à la courbe représentative de f et $M(x_0)$.

Définition 73– Si f est dérivable en $x_0 \in I$, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est la droite d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

L'existence des notions de limites à droite et à gauche permet de définir les notions de dérivées à droite et à gauche.

Définition 74– Soit I un intervalle et x_0 un réel. On suppose que x_0 est un élément de I ou l'une de ses extrémités. On dit que

- *La fonction f est dérivable à gauche en x_0 si*

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  admet une limite à gauche en x_0. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f à gauche en x_0.
- *La fonction f est dérivable à droite en x_0 si*

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  admet une limite à droite en x_0. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f à droite en x_0.

Exemple 75– Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = |x|.$$

Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

et donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

La fonction f est dérivable en 0 à droite et son nombre dérivé en 0 est 1.

Pour tout $x < 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

et donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$

La fonction f est dérivable en 0 à gauche et son nombre dérivé en 0 est -1.

Puisque ces deux limites sont différentes, la fonction f n'est en revanche pas dérivable en 0.

4.2) Calculs de dérivées

Dans tout cette partie, I est un intervalle ouvert, x_0 est un réel de I et f et g sont des fonctions définies sur I.

***Proposition* 76** (Dérivée d'une fonction constante)**–** *La dérivée de toute fonction constante sur I est nulle.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et Λ la fonction constante définie par

$$\forall x \in I \qquad \Lambda(x) = \lambda.$$

On a $\Lambda(x) = \Lambda(x_0)$ pour tous $x \in I$ puis

$$\forall x \in I - \{x_0\} \qquad \frac{\Lambda(x) - \Lambda(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

On en déduit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Lambda(x) - \Lambda(x_0)}{x - x_0} = 0$$

et donc $\Lambda'(x_0) = 0$. □

***Proposition* 77** (Somme)**–** *Si f et g sont dérivables en x_0 alors $f + g$ est dérivable en x_0 et*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Démonstration. Pour tout $x \in I - \{x_0\}$, on a

$$\frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Comme les fonctions f et g sont dérivables en x_0, les deux quotients de droite admettent une limite en x_0 dont la somme est $f'(x_0)+g'(x_0)$. □

Exemple 78– Soit n un entier naturel. Pour tout entier naturel $k \leq n$, soit a_k un réel. Soit x_0 un réel. On définit une fonction polynomiale f en posant

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Pour $k=0$, la fonction $x \mapsto a_0 x^0$ est constante de nombre dérivé nul en x_0. Pour tout entier naturel $k \in [1,n]$, l'exemple 71 implique que la fonction $x \mapsto a_k x^k$ est dérivable en x_0 de nombre dérivé $a_k k x_0^{k-1}$. La fonction f est donc, par sommation, une fonction dérivable en x_0 de dérivée

$$f'(x_0) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x_0^{k-1}.$$

***Proposition* 79** (Produit externe)**–** *Si f est dérivable en x_0 et λ un réel, alors λf est dérivable en x_0 et*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

Démonstration. Cela résulte de l'égalité

$$\frac{\lambda f(x)-\lambda f(x_0)}{x-x_0} = \lambda \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

valable pour tout $x \in I - \{x_0\}$. □

***Proposition* 80** (Produit)**–** *Si f et g sont dérivables en x_0 alors fg est dérivable en x_0 et*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Démonstration. Pour tout $x \in I - \{x_0\}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{(f(x)-f(x_0))\,g(x)+(g(x)-g(x_0))\,f(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0).\end{aligned}$$

Comme f et g sont dérivables en x_0 on a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0).$$

Puisque g est dérivable en x_0, elle est continue en x_0 et donc

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

La fonction fg est donc dérivable en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).$$

□

Proposition 81 (Inverse)**–** *Si f est dérivable et non nulle en x_0 alors $1/f$ est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

Démonstration. Puisque f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0. Puisque f est non nulle et continue en x_0, il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 sur lequel f ne s'annule pas et sur lequel $1/f$ est donc définie.

Pour tout $x \in J - \{x_0\}$, on a

$$\frac{\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{f}(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{(x - x_0)f(x)f(x_0)} = -\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{f(x)f(x_0)}. \tag{29}$$

Comme f est dérivable en x_0, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \tag{30}$$

Comme f est continue en x_0, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)f(x_0)} = \frac{1}{f(x_0)^2}. \tag{31}$$

On déduit le résultat par report de (31) et (30) dans (29). □

Exemple 82– Soit $n \geq 1$ un entier. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Si $x_0 > 0$, on pose $I =]0, +\infty[$. Si $x_0 < 0$, on pose $I =]-\infty, 0[$. Pour tout $x \in I$, posons $g(x) = x^n$. Alors f est l'inverse de g et g ne s'annule pas en x_0. La fonction g est dérivable en x_0 d'après l'exemple 71. La fonction f est donc dérivable et

$$f'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} = -\frac{nx_0^{n-1}}{x_0^{2n}} = -\frac{n}{x_0^{n+1}} = -nx_0^{-n-1}. \tag{32}$$

L'exemple 71 et l'équation (32) montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en x_0 (en supposant $x_0 \neq 0$ si $n < 0$) de nombre dérivé nx_0^{n-1}. On retiendra

***Proposition* 83** (Quotient)– *Si f et g sont dérivables en x_0 et si g ne s'annule pas en 0 alors f/g est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Démonstration. D'après la proposition 81, la fonction $1/g$ est dérivable en x_0. Le quotient f/g est produit des deux fonctions f et $1/g$, toutes deux dérivables en x_0. Grâce à la proposition 80, ce quotient est donc dérivable en x_0. De plus

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)\\ &= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\left(\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right)\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.\end{aligned}$$

□

Exemple 84– Soit f une fraction rationnelle. C'est le quotient $\frac{p}{q}$ de deux fonctions polynomiales p et q. Elle est définie sur l'ensemble des réels qui n'annulent pas q. D'après l'exemple 78, les fonctions p et q sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La proposition 83 implique donc que f est dérivable sur son ensemble de définition. On retiendra que

les fractions rationnelles sont dérivables
sur leur ensemble de définition.

***Proposition* 85** (Composition)– *Soit v une fonction définie sur I et u une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $v(I)$. On suppose que v est dérivable en x_0 et que u est dérivable en $v(x_0)$. Alors, $u \circ v$ est dérivable en x_0 et*

$$(u \circ v)'(x_0) = v'(x_0) \cdot u'(v(x_0)).$$

Démonstration. On note J un intervalle contenant $v(I)$ sur lequel u est définie.

Puisque v est dérivable en x_0, il existe une fonction ε_1 de limite nulle en x_0 telle que

$$\forall x \in I \quad v(x) = v(x_0) + v'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_1(x). \tag{33}$$

Puisque u est dérivable en $v(x_0)$, il existe une fonction ε_2 de limite nulle en $v(x_0)$ telle que

$$\forall y \in J \quad u(y) = u(v(x_0)) + u'(v(x_0))(y - v(x_0)) + (y - v(x_0))\varepsilon_2(y).$$

Pour tout $x \in I$, on applique cette égalité à $y = u(x)$. On obtient

$$\forall x \in I \quad u(v(x)) = u(v(x_0)) + u'(v(x_0))(v(x) - v(x_0)) + (v(x) - v(x_0))\varepsilon_2(v(x)). \tag{34}$$

Dans le membre de droite de (34), on remplace $v(x)$ par le membre de droite de (33). On trouve

$$\begin{aligned}\forall x \in I \quad u\left(v(x)\right) &= u\left(v(x_0)\right) + u'\left(v(x_0)\right)\left[v'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon_1(x)\right]\\ &\quad + \left[v'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon_1(x)\right]\varepsilon_2\left(v(x_0) + v'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon_1(x)\right).\end{aligned}$$

On a alors

$$\forall x \in I \quad u\left(v(x)\right) = u\left(v(x_0)\right) + \left[u'\left(v(x_0)\right)v'(x_0)\right](x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x) \tag{35}$$

avec

$$\forall x \in I \quad \varepsilon(x) = u'\left(v(x_0)\right)\varepsilon_1(x) + \left(v'(x_0) + \varepsilon_1(x)\right)\varepsilon_2\left(v(x_0) + v'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon_1(x)\right)$$

On a

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon_1(x) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to x_0} u'\left(v(x_0)\right)\varepsilon_1(x) = 0.$$

Pour la même raison,

$$\lim_{x\to x_0} v'(x_0) + \varepsilon_1(x) = v'(x_0).$$

De même, on a

$$\lim_{x\to x_0} v(x_0) + v'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon_1(x) = v(x_0)$$

et

$$\lim_{y\to v(x_0)} \varepsilon_2(y) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon_2\left(v(x_0) + v'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon_1(x)\right) = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to x_0} \left(v'(x_0) + \varepsilon_1(x)\right)\varepsilon_2\left(v(x_0) + v'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon_1(x)\right) = 0$$

puis

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On déduit alors le résultat de (35). □

***Corollaire* 86** (Puissances)– *Soit f une application définie sur I et dérivable en x_0. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \geq 0$, on pose $J = I$. Si $n < 0$, on suppose que $f(x_0) \neq 0$ et on considère un intervalle ouvert J contenant x_0 sur lequel f ne s'annule pas. On définit alors g sur J en posant*

$$\forall x \in J \qquad g(x) = f(x)^n.$$

Alors g est dérivable en x_0 et

$$g'(x_0) = nf'(x_0)f(x_0)^{n-1}.$$

Démonstration. On suppose $n \geq 0$. On a alors $g = u \circ f$ avec

$$\begin{array}{rccc} u & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & y^n. \end{array}$$

On a $f(I) \subset \mathbb{R}$ et u est dérivable en tout réel donc en particulier en $f(x_0)$. On a alors

$$g'(x_0) = f'(x_0)u'(f(x_0)).$$

En utilisant l'exemple 82, on obtient que

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad u'(y) = ny^{n-1}$$

et donc

$$g'(x_0) = nf'(x_0)f(x_0)^{n-1}.$$

Si $n < 0$, la continuité de f en x_0 implique l'existence de $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \qquad f(x) \neq 0.$$

On pose $K =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Si $f(x_0) > 0$, on pose $L =]0, +\infty[$; si $f(x_0) < 0$, on pose $L =]-\infty, 0[$. On a alors $g = u \circ f$ avec

$$\begin{array}{cccc} u & : & L & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & y^n. \end{array}$$

On a $f(K) \subset L$ et u est dérivable en tout réel de L donc en particulier en $f(x_0)$. On a alors

$$g'(x_0) = f'(x_0)u'(f(x_0)).$$

En utilisant l'exemple 82, on obtient que

$$\forall y \in L \qquad u'(y) = ny^{n-1}$$

et donc

$$g'(x_0) = nf'(x_0)f(x_0)^{n-1}.$$

□

Proposition 87 (Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction)**–** *Soit I un intervalle ouvert et f une fonction dérivable et strictement monotone sur I. Soit $g\colon f(I) \to I$ la fonction réciproque de la fonction bijective $f\colon I \to f(I)$. Si la fonction dérivée f' de f ne s'annule pas sur I alors la fonction g est dérivable sur $f(I)$ et*

$$\forall x \in f(I) \qquad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in f(I)$. On pose $t_0 = g(x_0)$. La fonction f est dérivable en t_0. Il existe donc une fonction ε de limite nulle en $g(x_0)$ telle que

$$\forall t \in I \qquad f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t). \tag{36}$$

Pour tout $x \in f(I)$, on applique (36) à $t = g(x)$. On en déduit

$$\forall x \in f(I) \qquad f(g(x)) = f(g(x_0)) + (g(x) - g(x_0))f'(g(x_0)) + (g(x) - g(x_0))\varepsilon(g(x)).$$

Ainsi,

$$\forall x \in f(I) - \{x_0\} \qquad \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f'(g(x_0)) + \varepsilon(g(x))}.$$

La fonction g étant continue en x_0 (car f est continue en t_0) on a

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(g(x)) = 0.$$

On en déduit que $x \mapsto \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ a une limite en x_0. La fonction g est donc dérivable en x_0. De plus,

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f'(g(x_0))}.$$

□

On termine cette partie avec deux exemples fondamentaux.

Proposition 88– *La fonction* $\arcsin$ *est dérivable sur* $]-1,1[$. *De plus,*

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. On a vu que la bijection réciproque de la restriction f de $\sin$ à $]-\pi/2, \pi/2[$ est la fonction $\arcsin$: $]-1,1[\to]-\pi/2, \pi/2[$. Pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, alors $f'(t) = \sin'(t) = \cos(t) \neq 0$. La fonction $\arcsin$ est donc dérivable sur $]-1,1[$. Soit $x \in]-1,1[$, on a

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Or $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$ donc $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$. D'autre part, $\arcsin(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc $\cos(\arcsin(x)) > 0$ puis $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. On en déduit le résultat. □

Proposition 89– *La fonction* $\arccos$ *est dérivable sur* $]-1,1[$. *De plus,*

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. On a vu que la bijection réciproque de la restriction g de $\cos$ à $]0,\pi[$ est la fonction $\arccos$: $]-1,1[\to]0,\pi[$. Pour tout $t \in]0,\pi[$, alors $f'(t) = \cos'(t) = -\sin(t) \neq 0$. La fonction $\arccos$ est donc dérivable sur $]-1,1[$. Soit $x \in]-1,1[$, on a

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}.$$

Or $\cos^2(\arccos(x)) + \sin^2(\arccos(x)) = 1$ donc $\sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$. D'autre part, $\arccos(x) \in]0,\pi[$ donc $\sin(\arccos(x)) > 0$ puis $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. On en déduit le résultat. □

4.3) Utilisation de la dérivée

La dérivée d'une fonction permet de détecter ses maximums et minimums. Avant de de détailler, précisons les notions d'extremums.

Définition 90– *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. Soit $x_0 \in I$. On dit que*

- *la fonction f a un* maximum local *en x_0 s'il existe un intervalle* ouvert *J de centre x_0 et contenu dans I tel que*
$$\forall x \in J \qquad f(x) \leq f(x_0).$$
Le réel $f(x_0)$ est alors un maximum local de f. Il est atteint en x_0.
- *la fonction f a un* minimum local *en x_0 s'il existe un intervalle* ouvert *J de centre x_0 et contenu dans I tel que*
$$\forall x \in J \qquad f(x_0) \leq f(x).$$
Le réel $f(x_0)$ est alors un minimum local de f. Il est atteint en x_0.
- *la fonction f a un* extremum local *en x_0 si elle a soit un maximum local en x_0 soit un minimum local en x_0. Le réel $f(x_0)$ est alors un extremum local de f. Il est atteint en x_0.*

Définition 91– *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. Soit $x_0 \in I$. On dit que*

- *la fonction f a un* maximum *en x_0 si*
$$\forall x \in I \qquad f(x) \leq f(x_0).$$
Le réel $f(x_0)$ est alors le maximum de f. Il est atteint en x_0.
- *la fonction f a un* minimum *en x_0 si*
$$\forall x \in I \qquad f(x_0) \leq f(x).$$
Le réel $f(x_0)$ est alors le minimum de f. Il est atteint en x_0.
- *la fonction f a un* extremum *en x_0 si elle a soit un maximum en x_0 soit un minimum en x_0. Le réel $f(x_0)$ est alors un extremum de f. Il est atteint en x_0.*

Exemple 92– La figure 8 page ci-contre est la courbe représentative d'une fonction définie sur l'intervalle ouvert $]-2, 2[$. Elle a deux minimum locaux, l'un d'eux étant aussi un minimum. Elle a un maximum local mais n'a pas de maximum.

On va donner une condition *nécessaire* pour qu'une fonction dérivable admette un extremum. Attention ! La condition n'est pas suffisante. Elle va nous fournir une liste de réels qui contiendra tous les réels en lesquels une fonction admet un extremum local mais, elle pourra aussi contenir des réels en lesquels la fonction n'a pas d'extremum local.

Théorème 93– *Soit I un intervalle ouvert. Soit une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$. Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

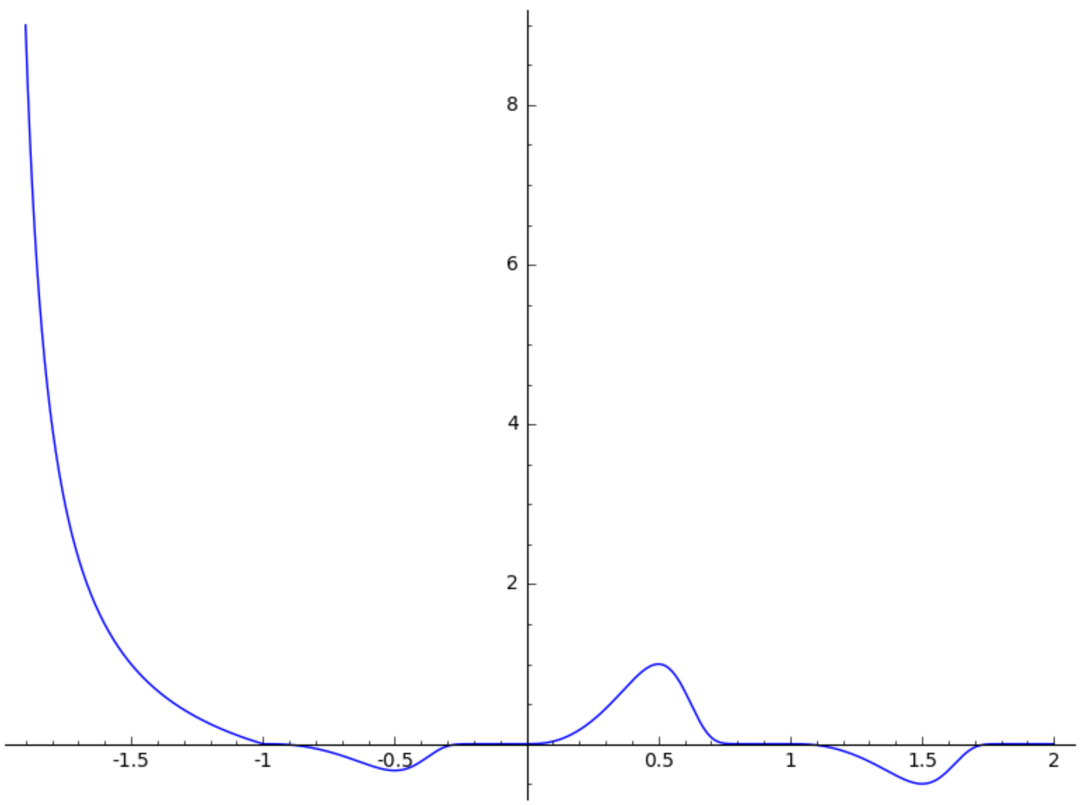


FIGURE 8 – Extremums d'une fonction

Démonstration. Supposons que la fonction f admette un maximum local en x_0. Soit alors $\eta > 0$ tel que, si $J =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ alors

$$\forall x \in J \qquad f(x) \leq f(x_0).$$

Si $x \in J \setminus \{x_0\}$, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{si } x > x_0\,; \\ \geq 0 & \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

La fonction f est dérivable en x_0. Elle est donc dérivable à gauche en x_0. En faisant tendre x vers x_0 par valeurs inférieures on trouve $f_g'(x_0) \geq 0$. Elle est aussi dérivable à droite en x_0. En faisant tendre x vers x_0 par valeurs supérieures on trouve $f_d'(x_0) \leq 0$. Puisque f est dérivable en x_0, on a $f_g'(x_0) = f_d'(x_0) = f'(x_0)$ et donc $f_g'(x_0) = f_d'(x_0) = f'(x_0) = 0$.

Supposons que la fonction f admette un minimum local en x_0. Soit alors $\eta > 0$ tel que, si $J =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ alors

$$\forall x \in J \qquad f(x) \geq f(x_0).$$

Si $x \in J \setminus \{x_0\}$, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x > x_0\,; \\ \leq 0 & \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

La fonction f est dérivable en x_0. Elle est donc dérivable à gauche en x_0. En faisant tendre x vers x_0 par valeurs inférieures on trouve $f_g'(x_0) \leq 0$. Elle est aussi dérivable à droite en x_0. En faisant tendre x vers x_0 par valeurs supérieures on trouve $f_d'(x_0) \geq 0$. Puisque f est dérivable en x_0, on a $f_g'(x_0) = f_d'(x_0) = f'(x_0)$ et donc $f_g'(x_0) = f_d'(x_0) = f'(x_0) = 0$. □

Remarque 94– La réciproque du théorème 93 est fausse. La dérivée d'une fonction peut s'annuler en un réel sans qu'en ce réel la fonction ait un extremum local. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$. Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) > f(0)$ alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $f(x) < f(0)$ de sorte que f n'a pas d'extremum local en 0.

Les réels en lesquels la dérivée d'une fonction dérivable s'annulent s'appellent les *points critiques* de cette fonction.

***Théorème* 95** (Théorème de Rolle)**–** *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que cette fonction f est*

- *continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$;*
- *dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.*

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Dans le cas où f est constante sur $]a, b[$, sa dérivée est nulle sur tout l'intervalle et tout réel $c \in]a, b[$ convient. Supposons donc f non constante. Puisque f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, l'image $f([a, b])$ de cet intervalle est un intervalle fermé $[m, M]$. On a $m < M$ car f n'est pas constante. Ainsi, $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(a)$. Soit $d \in [a, b]$ tel que $f(d) = m$ et $e \in [a, b]$ tel que $f(e) = M$.

— **1er cas –** Supposons $m \neq f(a)$. On a $d \neq a$, sinon $m = f(d) = f(a)$ et $d \neq b$ sinon $m = f(d) = f(b) = f(a)$. Ainsi $d \in]a,b[$. En particulier, les intervalles ouverts $]a,d[$ et $]d,b[$ sont non vides. Comme $f(x) \geq m = f(d)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\frac{f(x)-f(d)}{x-d} \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \in]d,b]; \\ \leq 0 & \text{si } x \in [a,d[. \end{cases}$$

La fonction f est dérivable en d, on a donc $f'_g(d) \leq 0$ et $f'_d(d) \geq 0$ puis $f'(d) = 0$. Le choix $c = d$ convient.

— **2e cas –** Supposons $M \neq f(a)$. On a $e \neq a$, sinon $M = f(e) = f(a)$ et $e \neq b$ sinon $M = f(e) = f(b) = f(a)$. Ainsi $e \in]a,b[$. En particulier, les intervalles ouverts $]a,e[$ et $]e,b[$ sont non vides. Comme $f(x) \leq M = f(e)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\frac{f(x)-f(e)}{x-e} \begin{cases} \leq 0 & \text{si } x \in]e,b]; \\ \geq 0 & \text{si } x \in [a,e[. \end{cases}$$

La fonction f est dérivable en e, on a donc $f'_d(e) \leq 0$ et $f'_g(e) \geq 0$ puis $f'(e) = 0$. Le choix $c = e$ convient.

□

Exemple 96– Soit $n \geq 1$ un entier et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels. On va montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)$$

s'annule au moins une fois. Pour cela, on introduit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{j} \cos(jx) + \frac{b_j}{j} \sin(jx).$$

On a

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \cos(2\pi j) = 1 \quad \text{et} \quad \sin(2\pi j) = 0$$

et donc $F(0) = F(2\pi)$. De plus F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) donc continue sur $[0,2\pi]$ et dérivable sur $]0,2\pi[$. Grâce au théorème de Rolle, il existe $c \in]0,2\pi[$ tel que $F'(c) = 0$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = f(x)$ donc $f(c) = 0$.

On généralise ensuite le théorème de Rolle.

Théorème 97 (Égalité des accroissements finis)**–** *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Démonstration. On définit une fonction g sur $[a,b]$ en posant

$$\forall x \in [a,b] \qquad g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Cette fonction g, comme f, est continue sur $[a,b]$ et dérivable $]a,b[$. De plus $g(a) = g(b)$. On peut donc appliquer à g le théorème de Rolle. On trouve $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. On

$$\forall x \in [a,b] \qquad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On a donc

$$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{puis} \quad f(b)-f(a) = (b-a)f'(c).$$

□

Si f' est bornée sur $]a,b[$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in]a,b[\qquad \left|f'(t)\right| \leq M.$$

En particulier, avec les notations du théorème 97, on a $|f'(c)| \leq M$ et donc $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$. On démontre alors le résultat suivant.

Théorème 98 (Inégalité des accroissements finis)**–** *Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I. On suppose qu'il existe un réel M tel que*

$$\forall t \in I \qquad \left|f'(t)\right| \leq M.$$

Alors,

$$\forall (x,y) \in I \times I \qquad \left|f(x)-f(y)\right| \leq M|x-y|.$$

Démonstration. Soit $(x,y) \in I \times I$. Si $x = y$, l'inégalité à montrer est l'inégalité vraie $0 \leq 0$. On suppose donc $x \neq y$. On pose $a = \min(x,y)$ et $b = \max(x,y)$. L'intervalle I étant ouvert, $[a,b] \subset I$. La fonction f est dérivable sur I donc continue sur $[a,b]$. Elle est dérivable sur I donc dérivable sur $]a,b[$. On applique l'égalité des accroissements finis et la remarque qui la suit à f pour conclure car $\{a,b\} = \{x,y\}$ donc $\left|f(x)-f(y)\right| = |f(b)-f(a)|$ et $\left|x-y\right| = |b-a|$. □

On donne des exemples d'application fondamentaux de l'inégalité des accroissements finis.

Exemple 99– La fonction $\sin$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $\left|\sin'(x)\right| = |\cos(x)| \leq 1$. On a donc $|\sin(x) - \sin(0)| \leq |x-0|$. On retient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin(x)| \leq |x|.}$$

Exemple 100– Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = 1 - \cos(x).$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = \sin(x)$ et $g(0) = 0$. Grâce à l'égalité des accroissements finis, il existe c compris entre 0 et x tel que

$$|g(x)| = |\sin(c)| \cdot |x| \leq |x|.$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |1 - \cos(x)| \leq |x|.$$

Exemple 101– Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = \sin(x) - x.$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $h'(x) = \cos(x) - 1$. Grâce à l'égalité des accroissements finis, il existe c compris entre 0 et x tel que

$$h(x) = (\cos(c) - 1)\, x.$$

L'exemple 100 implique alors

$$|h(x)| \leq |cx| \leq x^2$$

et donc

$$|\sin(x) - x| \leq x^2. \tag{$\sharp$}$$

En particulier, on en déduit

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.} \tag{37}$$

Exemple 102– Soit k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad k(x) = 1 - \cos(x) - \frac{1}{2}x^2.$$

La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $k'(x) = \sin(x) - x$. Grâce à l'égalité des accroissements finis, il existe c compris entre 0 et x tel que

$$|k(x)| = |\sin(c) - c| \cdot |x|$$

D'après l'inégalité $\sharp$ de l'exemple 101, on a $|\sin(c) - c| \leq c^2 \leq x^2$ et donc

$$|k(x)| \leq |x|^3$$

c'est-à-dire

$$\left|1 - \cos(x) - \frac{1}{2}x^2\right| \leq |x|^3$$

En particulier,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.} \tag{38}$$

L'inégalité des accroissements finis peut s'exprimer avec la notion de fonction lipschitzienne.

Définition 103– Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f: A \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $k > 0$. La fonction f est k-lipschitzienne si

$$\forall (x,y) \in A^2 \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leq k|x-y|.$$

L'inégalité des accroissements finis peut alors s'énoncer ainsi : si la fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle ouvert I et si $|f'|$ est majorée sur I par M alors f est M-lipschitzienne.

Lemme 104– *Soit $k > 0$ un réel et f une fonction k-lipschitzienne sur un intervalle I. Alors f est continue sur I.*

Démonstration. Soit $a \in I$, montrons que f est continue en I. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon/k$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| < \delta$, on a

$$|f(x) - f(a)| \leq k|x-a| < k\delta = \varepsilon.$$

Ainsi, f est continue en a. □

Cette notion est particulièrement intéressante pour étudier les suites définies par récurrence.

Théorème 105– *Soit $a < b$ deux réels et $k \in]0,1[$. Soit f une fonction k-lipschitzienne de $[a,b]$ dans $[a,b]$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$u_0 \in [a,b] \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers l'unique solution ℓ de l'équation $f(x) = x$ dans $[a,b]$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - \ell| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|.$$

Démonstration. Soit g définie sur $[a,b]$ par

$$\forall x \in [a,b] \qquad g(x) = f(x) - x.$$

Grâce au lemme 104, la fonction f est continue. La fonction g est donc continue comme somme d'une fonction continue et d'une fonction polynomiale donc continue. On a $f(a) \in [a,b]$ donc $f(a) > a$ puis $g(a) = f(a) - a > 0$. De plus $f(b) \in [a,b]$ donc $f(b) < b$ puis $g(b) = f(b) - b < 0$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $\ell \in [a,b]$ tel que $g(\ell) = 0$, c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$. Soit $\ell' \in [a,b]$ tel que $g(\ell') = 0$ alors

$$|\ell - \ell'| = \left|f(\ell) - f(\ell')\right| \leq k|\ell - \ell'|$$

donc

$$(k-1)|\ell - \ell'| \geq 0.$$

Comme $k-1<0$ et $|\ell-\ell'|\geq 0$ on a alors $\ell=\ell'$. Le réel ℓ est donc l'unique solution dans $[a,b]$ de l'équation $f(x)=x$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1}-\ell|=|f(u_n)-f(\ell)|\leq k|u_n-\ell|.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{I}(n)$ l'inégalité

$$|u_n-\ell|\leq k^n|u_0-\ell|.$$

L'inégalité $\mathcal{I}(0)$ est vraie car $k^0=1$. Soit $n\in\mathbb{N}$ un entier pour lequel $\mathcal{I}(n)$ est vraie. Alors

$$|u_{n+1}-\ell|\leq k|u_n-\ell|\leq k\cdot k^n|u_0-\ell|$$

d'après $\mathcal{I}(n)$. Ainsi $\mathcal{I}(n+1)$ est vraie. L'inégalité $\mathcal{I}(0)$ est vraie. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $\mathcal{I}(n)$ est vraie alors $\mathcal{I}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad |u_n-\ell|\leq k^n|u_0-\ell|.$$

Puisque $0<k<1$, la suite $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Pour tout entier $n\geq 1$, on a

$$|u_{n+1}-u_n|=|f(u_n)-f(u_{n-1})|\leq k|u_n-u_{n-1}|.$$

Par une récurrence que le lecteur détaillera, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad |u_{n+1}-u_n|\leq k^n|u_1-u_0|.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\left|u_{n+p}-u_n\right|=\sum_{j=0}^{p-1}\left|u_{n+j+1}-u_{n+j}\right|\leq|u_1-u_0|\sum_{j=0}^{p-1}k^{n+j}.$$

Ainsi,

$$\left|u_{n+p}-u_n\right|\leq k^n\frac{1-k^p}{1-k}|u_1-u_0|.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on trouve

$$|\ell-u_n|\leq\frac{k^n}{1-k}|u_1-u_0|.$$

□

On peut donner une interprétation géométrique de l'égalité des accroissements finis (voir la figure 9 page suivante). On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère. Soit $a<b$ deux réels. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, c'est-à-dire

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Or

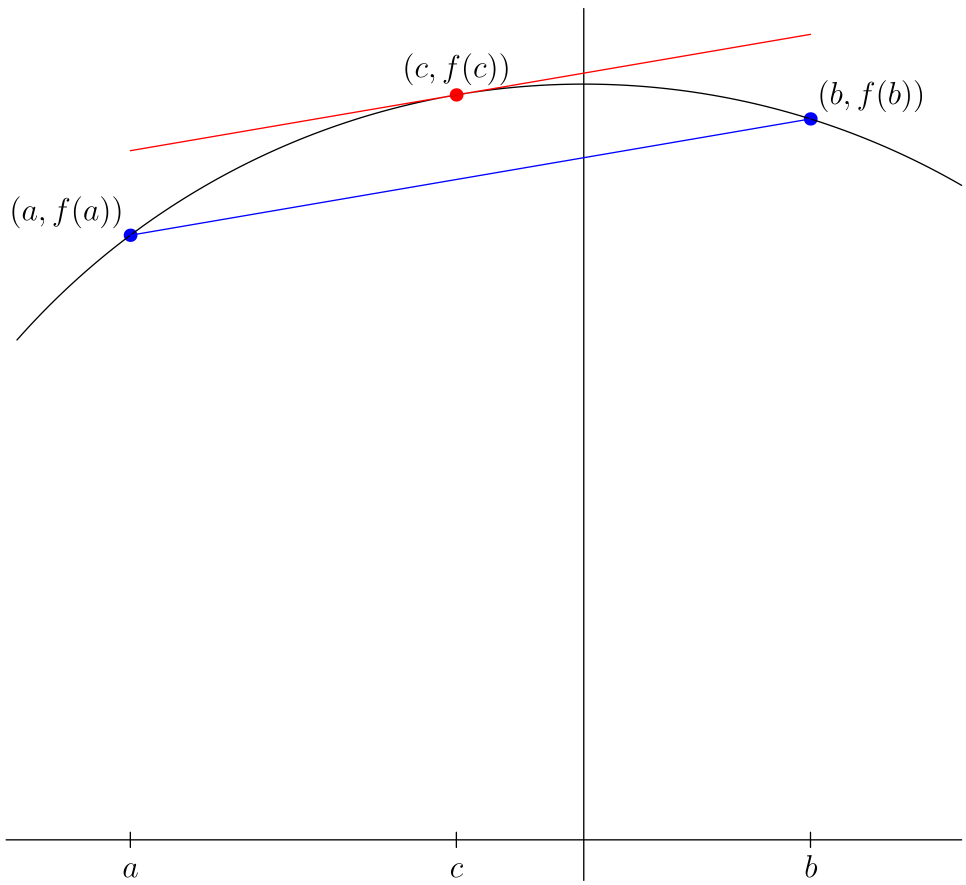


FIGURE 9 – Interprétation graphique de l'égalité des accroissements finis

— le réel $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la droite reliant les points $A=(a,f(a))$ et $B=(b,f(b))$;
— le réel $f'(c)$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de f en $C=(c,f(c))$.

L'égalité des accroissements finis implique donc, pour tous points A et B du graphe de f, l'existence d'un point C situé sur la courbe entre A et B tel que la tangente en C à la courbe représentative de f est parallèle à la droite reliant A et B.

L'égalité des accroissements finis à aussi l'importante conséquence suivante. Si une fonction est définie sur un intervalle privé d'un point mais peut-être prolongée par continuité en ce point. Si en ce point la dérivée de la fonction a une limite finie. Alors, le prolongement par continuité est dérivable. Plus précisément, on a le théorème suivant.

***Théorème* 106** (Dérivabilité des prolongements)**–** *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $d\in]a,b[$. On suppose que f est dérivable sur $]a,b[-\{d\}$ et que la dérivée f' de f admet une limite $\ell\in\mathbb{R}$ en d. Alors, f est dérivable en d et $f'(d)=\ell$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. Puisque

$$\lim_{x\to d} f'(x)=\ell,$$

il existe $\alpha>0$ tel que

$$\forall x\in]a,b[-\{d\}\qquad |x-d|<\alpha\Rightarrow \left|f'(x)-\ell\right|<\varepsilon.$$

Soit $x\in]a,b[-\{d\}$. On applique l'égalité des accroissements finis sur l'intervalle $[x,d]$ si $x<d$ et à l'intervalle $[d,x]$ si $x>d$. On obtient alors $c(x)$ compris entre x et d tel que

$$f(x)-f(d)=f'(c(x))(x-d)\quad \text{et donc}\quad \frac{f(x)-f(d)}{x-d}=f'(c(x)).$$

Comme $c(x)$ est compris entre x et d, si x vérifie de plus $|x-d|<\alpha$ alors $|c(x)-d|<\alpha$. On a donc $|f'(c(x))-\ell|<\varepsilon$. Ainsi, a-t-on montré : pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que,

$$\forall x\in]a,b[-\{d\}\qquad |x-d|<\alpha\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(d)}{x-d}-\ell\right|<\varepsilon.$$

Autrement dit,

$$\lim_{x\to d}\frac{f(x)-f(d)}{x-d}=\ell.$$

La fonction f est donc dérivable en d et $f'(d)=\ell$. □

Exemple 107– On définit une fonction ϕ sur $[-\pi,\pi]$ en posant

$$\phi(t)=\begin{cases}\dfrac{\cos(t)-1}{t} & \text{si } t\in[-\pi,\pi]-\{0\};\\ 0 & \text{si } t=0.\end{cases}$$

Puisque $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction ϕ est continue sur $[-\pi,\pi]-\{0\}$. Pour tout $t\in[-\pi,\pi]-\{0\}$, on a

$$\phi(t)=\frac{\cos(t)-1}{t^2}t.$$

Grâce à l'exemple 102 page 63, on en déduit que ϕ converge vers 0 en $0 = \phi(0)$. La fonction ϕ est donc continue en 0. La fonction ϕ est donc continue sur $[-\pi, \pi]$.

Sur $[-\pi, \pi] - \{0\}$, la fonction ϕ est quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[-\pi, \pi] - \{0\}$) dont le quotient ne s'annule qu'en 0. Elle est donc dérivable sur $[-\pi, \pi] - \{0\}$ et

$$\forall t \in [-\pi, \pi] - \{0\} \qquad \phi'(t) = \frac{-\sin(t)t - \cos(t) + 1}{t^2} = -\frac{\sin(t)}{t} + \frac{1 - \cos(t)}{t^2}.$$

On déduit alors des exemples 101 page 63 et 102 page 63 que ϕ' admet une limite en 0 et que

$$\lim_{t \to 0} \phi'(t) = -\frac{1}{2}.$$

Le théorème 106 page précédente implique finalement que ϕ est dérivable sur $[-\pi, \pi]$ et que

$$\phi'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Grâce au théorème des accroissements finis, on peut aussi établir un lien entre dérivation et variations d'une fonction.

***Théorème* 108–** *Une fonction dérivable sur un intervalle ouvert y est constante si et seulement si sa dérivée est constante nulle sur l'intervalle.*

Remarque 109– Il faut bien comprendre que cet énoncé dit *deux* choses sur la fonction f, dérivable sur l'intervalle I ouvert :

1. Première implication
   — Si f est constante sur I alors, pour tout $t \in I$, on a $f'(t) = 0$;
   — Il est *suffisant* que f soit constante sur I pour que sa dérivée f' soit la fonction nulle sur I ;
   — Il est *nécessaire* que la dérivée f' de f soit la fonction nulle sur I pour que f soit constante sur I ;
2. Deuxième implication
   — Si pour tout $t \in I$, on a $f'(t) = 0$ alors f est constante sur I ;
   — Il est *nécessaire* que f soit constante sur I pour que sa dérivée f' soit la fonction nulle sur I ;
   — Il est *suffisant* que la dérivée f' de f soit la fonction nulle sur I pour que f soit constante sur I ;

Démonstration du théorème 108. On a déjà montré que la dérivée d'une fonction constante est nulle. Il ne reste donc que la deuxième implication à montrer. Supposons donc que, pour tout $t \in I$, on a $f'(t) = 0$. Soit $t_0 \in I$. Pour tout $t \in I - \{t_0\}$, on note

$$J(t) = \begin{cases} [t_0, t] & \text{si } t > t_0\,; \\ [t, t_0] & \text{si } t < t_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathring{J}(t) = \begin{cases}]t_0, t[& \text{si } t > t_0\,; \\ ]t, t_0[& \text{si } t < t_0 \end{cases}$$

Soit $t \in I - \{t_0\}$. Comme f est dérivable sur I, elle est continue sur $J(t) \subset I$ et dérivable sur $\mathring{J}(t) \subset I$. L'égalité des accroissements finis implique donc l'existence de $c \in \mathring{J}(t)$ tel que

$$f(t) - f(t_0) = f'(c)(t - t_0).$$

Or, $f'(c) = 0$. On a donc montré que

$$\forall t \in I - \{t_0\}, \qquad f(t) = f(t_0).$$

Ainsi, la fonction f est constante. □

Exemple 110– Soit f définie sur $[-1,1]$ par

$$\forall t \in [-1,1] \qquad f(t) = \arcsin(t) + \arccos(t).$$

Pour tout $t \in]-1,1[$, on a

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 0.$$

La fonction f est donc constante sur $]-1,1[$: soit $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in]-1,1[\qquad f(t) = c.$$

On a

$$\lim_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} f(t) = c \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} f(t) = c.$$

Mais, f est continue à gauche en -1 et à droite en 1 donc

$$f(-1) = \lim_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} f(t) = c \quad \text{et} \quad f(1) = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} f(t) = c.$$

Ainsi f est constante sur $[-1,1]$. Or, $f(0) = \pi/2$ donc

$$\boxed{\forall t \in [-1,1] \qquad \arcsin(t) + \arccos(t) = \frac{\pi}{2}.}$$

***Théorème* 111–** *Une fonction dérivable sur un intervalle ouvert y est croissante si et seulement si sa dérivée est positive ou nulle.*

Démonstration. Supposons que f est croissante sur I. Alors, pour tous x_0 et x dans I, on a

$$f(x) - f(x_0) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \geq x_0\,; \\ \leq 0 & \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

Il en résulte que, pour tous x_0 et x dans I, les réels $f(x) - f(x_0)$ et $x - x_0$ ont même signe et donc

$$\forall x_0 \in I \quad \forall x \in I - \{x_0\} \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

On en déduit

$$\forall x_0 \in I \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

et donc

$$\forall x_0 \in I \qquad f'(x_0) \geq 0.$$

Supposons réciproquement que $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$. Soit x et y dans I tels que $x \leq y$. Si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$. Supposons $x < y$. Alors $[x, y] \subset I$ donc f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. Par l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Or, $f'(c) \geq 0$ et $y - x \geq 0$ donc $f(y) - f(x) \geq 0$. On a donc montré

$$\forall (x, y) \in I^2 \qquad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Ainsi, la fonction f est croissante. □

***Théorème* 112–** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle ouvert I et si $f'(t) > 0$ pour tout $t \in I$, alors f est strictement croissante.*

Démonstration. Soit x et y dans I tels que $x < y$. On a $[x, y] \subset I$ donc f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. Par l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Or, $f'(c) > 0$ et $y - x > 0$ donc $f(y) - f(x) > 0$. On a donc montré

$$\forall (x, y) \in I^2 \qquad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Ainsi, la fonction f est strictement croissante. □

Remarque 113– La réciproque du théorème 112 est fausse. Une fonction peut être strictement croissante sur un intervalle avec une dérivée qui n'est pas strictement positive sur cet intervalle. C'est le cas de la fonction$\mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0 alors qu'elle croît strictement sur $\mathbb{R}$.

***Théorème* 114–** *Une fonction dérivable sur un intervalle ouvert y est décroissante si et seulement si sa dérivée est négative ou nulle.*

Démonstration. On remarque que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est décroissante si et seulement si la fonction

$$\begin{array}{rccc} -f & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & -f(x) \end{array}$$

est croissante. Grâce au théorème 111 page précédente, la fonction $-f$ est croissante si et seulement si sa dérivée $-f'$ est positive ou nulle, c'est-à-dire si et seulement si f' est négative ou nulle. □

***Théorème* 115–** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle ouvert I et si $f'(t) < 0$ pour tout $t \in I$, alors f est strictement décroissante.*

Démonstration. Si, pour tout $t \in I$ on a $f'(t) < 0$ alors $(-f)'(t) > 0$. la fonction $-f$ est donc strictement croissante sur I et donc f décroît strictement sur I. □

Exemple 116– La fonction $\sin/\cos$ est définie en tout réel n'annulant pas $\cos$, donc en tout réel qui ne s'écrit pas $\pi/2 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On définit la fonction *tangente*, notée $\tan$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}.}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a

$$\tan'(t) = \frac{\cos(t)\cos(t) - \sin(t)(-\sin(t))}{\cos^2(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)} > 0.$$

On remarque que

$$\forall t \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \frac{\cos(t)\cos(t) - \sin(t)(-\sin(t))}{\cos^2(t)} = \frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)} + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t).$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \boxed{\tan'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t) \geq 1.}$$

La fonction $\tan$ est donc strictement croissante sur tout intervalle ouvert inclus dans l'ensemble de définition. On peut retenir

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $\tan$ est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a $\sin(-\pi/2 + k\pi) = (-1)^{k+1}$ et, si $t \in]-\pi/2 + k\pi, k\pi[$ alors $\cos(t)$ est du signe de $(-1)^k$. De plus $\cos(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $-\pi/2 + k\pi$. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \boxed{\lim_{\substack{t \to -\pi/2 + k\pi \\ t > -\pi/2 + k\pi}} \tan(t) = -\infty.}$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a $\sin(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$ et, si $t \in]k\pi, \pi/2 + k\pi,[$ alors $\cos(t)$ est du signe de $(-1)^k$. De plus $\cos(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $\pi/2 + k\pi$. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \boxed{\lim_{\substack{t \to \pi/2 + k\pi \\ t < \pi/2 + k\pi}} \tan(t) = +\infty.}$$

On note f la restriction de $\tan$ à l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2[$. La fonction f est donc définie par

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad f(t)=\tan(t).$$

La fonction f est dérivable, donc continue, sur $]-\pi/2,\pi/2[$. Elle est strictement croissante sur $]-\pi/2,\pi/2[$. Sa limite en $-\pi/2$ est $-\infty$ et sa limite en $\pi/2$ est $+\infty$. Elle définit donc une bijection de $]-\pi/2,\pi/2[$ dans $]-\infty,\infty[=\mathbb{R}$. On appelle *arctangente* et on note $\arctan$ sa fonction réciproque. Comme f, elle est strictement croissante. Des limites de f en $-\pi/2$ et $\pi/2$, on déduit que

$$\boxed{\lim_{t\to-\infty}\arctan(t)=-\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty}\arctan(t)=\frac{\pi}{2}.}$$

Enfin, la dérivée de $\tan$, donc de f, ne s'annule pas sur $]-\pi/2,\pi/2[$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a donc

$$\arctan'(t)=\frac{1}{f'(\arctan(t))}=\frac{1}{\tan'(\arctan(t))}=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(t))}=\frac{1}{1+t^2}.$$

On retient

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad \boxed{\arctan'(t)=\frac{1}{1+t^2}.}$$

La courbe représentative de la fonction $\arctan$ est donnée figure 11 page 77.

4.4) Étude de fonction

4.4.1– Plan d'étude

Pour étudier une fonction, on peut suivre le plan suivant.

- Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de continuité, l'ensemble de dérivabilité ;
- Chercher l'éventuelle parité ;
- Chercher l'éventuelle périodicité ;
- Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition ;
- Déterminer les variations de la fonction et tracer le tableau de variations ;
- Chercher les éventuelles asymptotes, tangentes horizontales, tangentes verticales, les intersections avec les axes.

Pour déterminer la parité, on rappelle la définition suivante.

Définition 117 (Parité)– *Soit A un ensemble de réels et $f: A\to\mathbb{R}$ d'ensemble de définition A. On suppose que pour tout réel x appartenant à A, son opposé $-x$ appartient aussi à A. La fonction f est*

- paire *si*
$$\forall x\in A \qquad f(-x)=f(x)$$
- impaire *si*
$$\forall x\in A \qquad f(-x)=-f(x).$$

La fonction $\cos$ est paire. Les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont impaires.

La détermination d'un éventuelle périodicité est reliée à la définition suivante.

Définition 118 (Périodicité)– *Soit A un ensemble de réels et $f : A \to \mathbb{R}$ d'ensemble de définition A. Soit T un réel strictement positif. On suppose que pour tout réel x appartenant à A, le réel $x+T$ appartient aussi à A. La fonction f est périodique de période T si*

$$\forall x \in A \qquad f(x+T) = f(x).$$

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont périodiques de période 2π. La fonction $\tan$ est périodique de période π.

La droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx+p)) = 0.$$

La droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ si

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (mx+p)) = 0.$$

Si la courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = mx + p$ en $\pm\infty$, alors le quotient $f(x)/x$ admet une limite finie en $\pm\infty$ qui est m. Pour déterminer si la courbe représentative de f admet une asymptote en $\pm\infty$, on commence donc par déterminer si le quotient $f(x)/x$ admet une limite finie en $\pm\infty$. Si ce n'est pas le cas, alors la courbe représentative de f n'a pas d'asymptote en $\pm\infty$. Sinon, on note m cette limite et on remarque que la droite $y = mx + p$ est asymptote en $\pm\infty$ si et seulement si $f(x) - mx$ admet p comme limite en $\pm\infty$.

Les droites *verticales* n'ont pas une équation de la forme $y = mx + p$ (ce sont les seules). L'équation d'une droite verticale est de la forme $x = c$ avec $c \in \mathbb{R}$. La droite d'équation $x = c$ est *asymptote verticale à droite* à la courbe représentative de f si

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = c$ est *asymptote verticale à gauche* à la courbe représentative de f si

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x) = -\infty.$$

Si f est dérivable en dérivable en x_0, l'équation de sa tangente est $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Cette tangente est *horizontale* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que son équation est $y = c$. La tangente est donc horizontale si $f'(x_0) = 0$. Si f est définie mais non dérivable en x_0, la tangente est verticale si

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f'(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f'(x) = \pm\infty.$$

4.4.2– Exemple de la fonction $\arcsin$

La fonction $\arcsin$ a pour ensemble de définition $[-1,1]$. Elle est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. La fonction $\arcsin$ est la fonction réciproque de la fonction bijective

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$

La fonction f est impaire. La fonction $\arcsin$ est donc impaire. Plutôt que de justifier ce « donc » dans le cas particulier de la fonction $\arcsin$, nous démontrons le lemme général suivant.

***Lemme* 119** (Fonctions réciproques et parité)**–** *Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$. On suppose que*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \in E \Rightarrow -x \in E.$$

Soit $f\colon E \to F$ une fonction bijective de fonction réciproque $g\colon F \to E$. Si la fonction f est impaire, alors la fonction g est impaire.

Démonstration. Supposons que la fonction f est impaire. Soit $y \in F$. Posons $x = g(y)$. Alors $x \in E$ et $y = f(x)$. D'autre part, $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$ donc $-y = f(-x)$ d'où $-y \in F$. On a alors

$$g(-y) = g\left(f(-x)\right) = -x = -g(y).$$

La fonction g est donc impaire. □

Remarque 120– Une fonction paire n'est jamais bijective puisque la condition de parité empêche qu'elle soit injective.

La fonction $\arcsin$ est définie sur un intervalle fermé. Les limites aux bornes sont donc les valeurs au bornes, et

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Puisque la fonction f est strictement croissante, il en est de même pour la fonction $\arcsin$. Bien sûr cela se retrouve à partir de la dérivée de $\arcsin$ puisque

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 1.$$

Le tableau de variations est donné tableau 2 page suivante.

La dérivée de $\arcsin$ ne s'annulant pas, sa courbe représentative n'admet pas de tangente horizontale. En revanche

$$\lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}} f'(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} f'(t) = +\infty$$

et donc les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$ sont des tangentes verticales à la courbe représentative de $\arcsin$.

La courbe représentative de la fonction $\arcsin$ est donnée figure 10 page ci-contre.

x	-1		1
$\arcsin'(x)$	‖	$+$	‖
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Tableau 2 – Tableau de variations de $\arcsin$

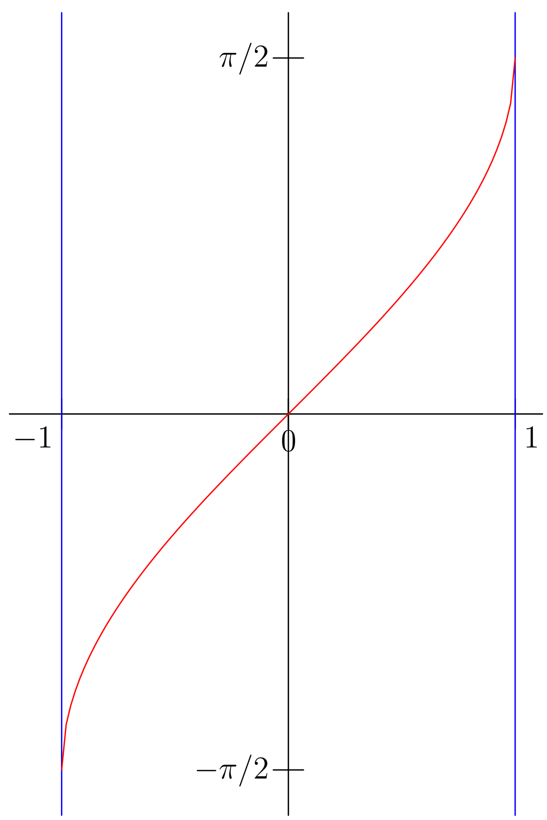


Figure 10 – Courbe représentative de la fonction $\arcsin$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\arctan'(x)$	$+$	
$\arctan(x)$	$-\dfrac{\pi}{2}$ $\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$

Tableau 3 – Tableau de variations de $\arctan$

4.4.3– Exemple de la fonction $\arctan$

La fonction $\arctan$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur R. La fonction $\arctan$ est la fonction réciproque de la fonction bijective

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x). \end{array}$$

La fonction f est impaire. La fonction $\arctan$ est donc impaire grâce au lemme 119 page 74. La fonction $\arcsin$ est définie sur un intervalle fermé. Les limites aux bornes sont limites en $-\infty$ et $+\infty$. On a vu que

$$\lim_{t\to-\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que la droite horizontale d'équation $y = -\pi/2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et que la droite horizontale d'équation $y = \pi/2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Puisque la fonction f est strictement croissante, il en est de même pour la fonction $\arctan$. Bien sûr cela se retrouve à partir de la dérivée de $\arctan$ puisque

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0.$$

Le tableau de variations est donné tableau 3.

La dérivée de $\arctan$ ne s'annulant pas, sa courbe représentative n'admet pas de tangente horizontale.

La courbe représentative de la fonction $\arctan$ est donnée figure 11 page suivante.

4.4.4– Une fraction rationnelle

Soit f définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}.$$

C'est un quotient de deux fonctions polynomiales. Elle est donc définie, continue et dérivable en tout réel qui n'annule pas son dénominateur. Or,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}.$$

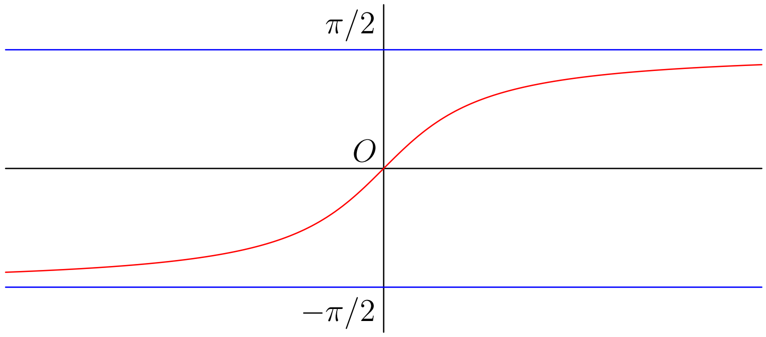


FIGURE 11 – Courbe représentative de la fonction $\arctan$

La fonction f est donc définie, continue et dérivable sur $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Soit $x \in D_f$ alors $x \notin \{-2, 2\}$ donc $-x \notin \{-2, 2\}$ et $-x \in D_f$. On a alors

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire.

Pour tout $\in D_f$, on calcule

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

et donc

$$\forall x \in D_f \qquad f'(x) = \frac{x^2}{(x^2-4)^2}(x^2 - 12).$$

Ainsi, pour tout $x \in D_f$, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 12 = (x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12})$. On note que $2 < \sqrt{12}$ (car $4 < 12$) et que $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. On en déduit que f est

- strictement croissante sur $]-\infty, -2\sqrt{3}[$ et sur $]2\sqrt{3}, +\infty[$;
- strictement décroissante sur $]-2\sqrt{3}, -2[$, sur $]-2, 2[$ et sur $]2, 2\sqrt{3}[$.

Comme quotient de polynômes, la fonctions f a même limite en $-\infty$ et $+\infty$ que x^3/x^2. On en déduit

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Si x tend vers 2 alors x^3 tend vers $8 > 0$ et $x^2 - 4$ tend vers 0. De plus, si $x \in]0, 2[$ alors $x^2 - 4 < 0$ et si $x > 2$ alors $x^2 - 4 > 0$. On en déduit

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty.$$

Comme f est impaire, on a alors

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-3\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Tableau 4 – Tableau de variations d'une fraction rationnelle

On calcule

$$f\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{24\sqrt{3}}{12-4} = 3\sqrt{3}.$$

Par imparité de f, on a alors

$$f\left(-2\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3}.$$

Le tableau de variations de f est donné tableau 4.

Les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$ sont des asymptotes verticales de la courbe représentative de f. Déterminons s'il existe d'autre asymptotes. Pour tout $x \in D_f - \{0\}$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2-4}$$

et donc

$$\lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Puis, pour tout $x \in D_f$, on a

$$f(x) - x = \frac{x^3}{x^2-4} - x = \frac{4x}{x^2-4}$$

On a donc

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 0.$$

La droite d'équation $y = x$ est asymptote de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

On a $f'(x) = 0$ si et seulement si $x^2(x^2-12) = 0$. La courbe représentative de f admet donc des tangentes horizontales en

$$\left(-2\sqrt{3}, f(-2\sqrt{3})\right) = (-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}), \quad (0, f(0)) = (0,0) \quad \text{et} \quad \left(2\sqrt{3}, f(2\sqrt{3})\right) = (2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}).$$

Pour tout $x \in D_f$, on a $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. La courbe représentative de f ne coupe donc l'axe des abscisses qu'en $(0,0)$.

La courbe représentative de la fonction f est donnée figure 12 page suivante.

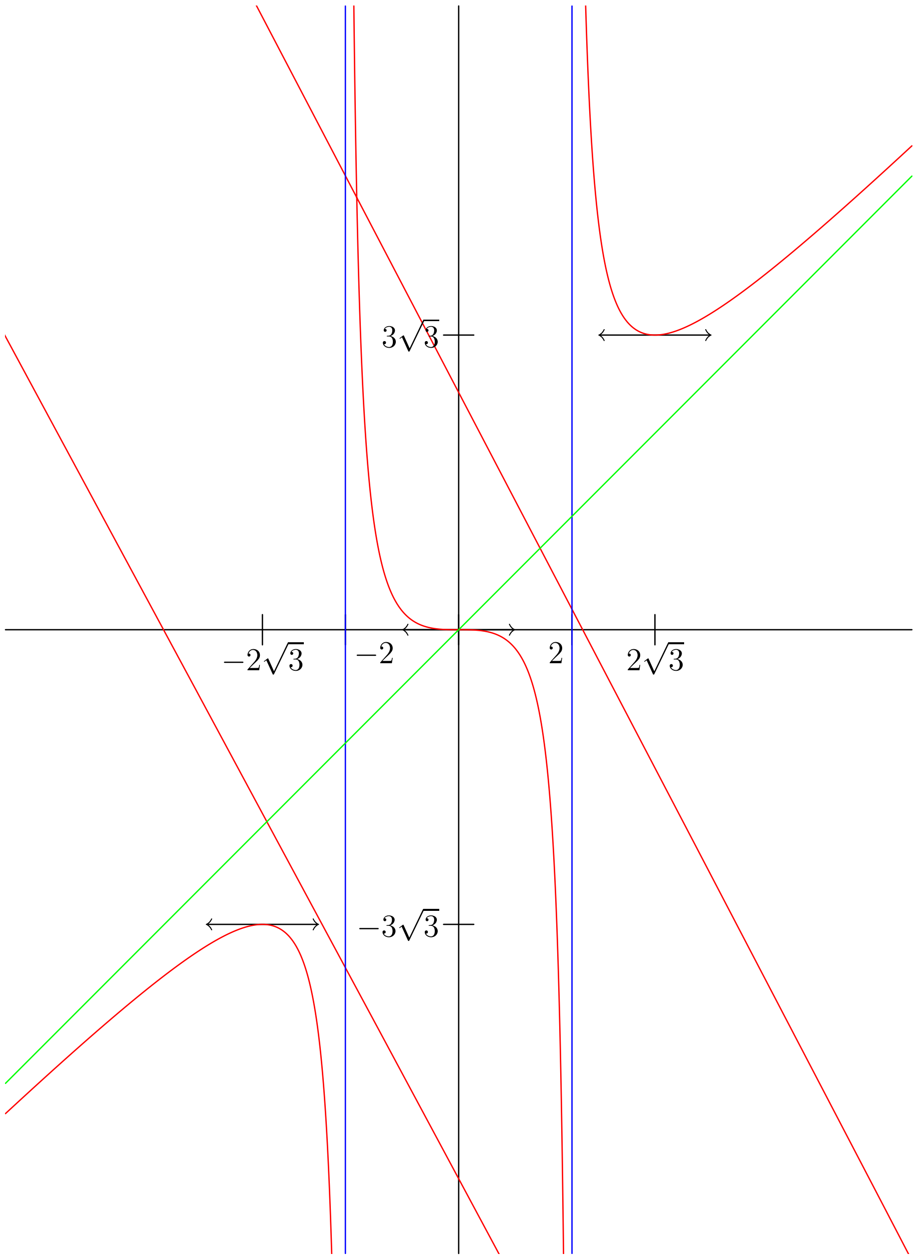


FIGURE 12 – Courbe représentative d'une fraction rationnelle

4.5) Fonctions $\mathcal{C}^k$

Définition 121– Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et n un entier naturel. On dit que f est dérivable n fois s'il existe des fonctions $f_0, \dots f_{n-1}$ dérivables sur I et une fonction f_n définie sur I telles que $f_0 = f$ et, pour tout entier $i \in [0, n-1]$ on a $f_{i+1} = f_i'$. On note alors $f^{(i)}$ plutôt que f_i la fonction obtenue en dérivant i fois la fonction f. Cette fonction $f^{(i)}$ s'appelle la dérivée ie de f.

Exemple 122– Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\cos$ est dérivable n fois et calculons la dérivée ne de $\cos$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse : $\cos$ est dérivable n fois et

$$\cos^{(n)} = \begin{cases} -\sin & \text{s'il existe } j \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4j\,; \\ -\cos & \text{s'il existe } j \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4j+1\,; \\ \sin & \text{s'il existe } j \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4j+2\,; \\ \cos & \text{s'il existe } j \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4j+3. \end{cases}$$

L'hypothèse $\mathcal{E}(0)$ est vraie puisque $0 = 4j$ avec $j = 0$ et, par définition, $\cos^{(0)} = \cos$. Soit n un entier naturel pour lequel $\mathcal{E}(n)$ est vraie. Alors,

- S'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 4j$ alors $j \geq 1$ donc $j-1 \in \mathbb{N}$ et $n = 4(j-1)+3$. D'après $\mathcal{E}(n)$, la fonction $\cos$ est dérivable n fois et $\cos^{(n)} = \cos$. Cette fonction est dérivable donc $\cos$ est dérivable $n+1$ fois et $\cos^{(n+1)} = -\sin$. L'hypothèse $\mathcal{E}(n+1)$ est alors vraie;
- S'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 4j+1$ alors $n = 4j$. D'après $\mathcal{E}(n)$, la fonction $\cos$ est dérivable n fois et $\cos^{(n)} = -\sin$. Cette fonction est dérivable donc $\cos$ est dérivable $n+1$ fois et $\cos^{(n+1)} = -\cos$. L'hypothèse $\mathcal{E}(n+1)$ est alors vraie;
- S'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 4j+2$ alors $n = 4j+1$. D'après $\mathcal{E}(n)$, la fonction $\cos$ est dérivable n fois et $\cos^{(n)} = -\cos$. Cette fonction est dérivable donc $\cos$ est dérivable $n+1$ fois et $\cos^{(n+1)} = \sin$. L'hypothèse $\mathcal{E}(n+1)$ est alors vraie;
- S'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 4j+3$ alors $n = 4j+2$. D'après $\mathcal{E}(n)$, la fonction $\cos$ est dérivable n fois et $\cos^{(n)} = \sin$. Cette fonction est dérivable donc $\cos$ est dérivable $n+1$ fois et $\cos^{(n+1)} = \cos$. L'hypothèse $\mathcal{E}(n+1)$ est alors vraie.

L'hypothèse $\mathcal{E}(0)$ est vraie. Pour tout entier naturel n, si $\mathcal{E}(n)$ est vraie alors $\mathcal{E}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{E}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple 123– Soit a un réel, k un entier naturel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{a\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\} \qquad f(x) = \frac{1}{(x-a)^k}.$$

Pour tout entier n, on note $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse suivante : la fonction f est dérivable n fois sur $\mathbb{R} - \{a\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\} \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} \frac{1}{(x-a)^{n+k}}.$$

L'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est vraie. En effet, f est une fraction rationnelle donc le dénominateur ne s'annule qu'en a. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R} - \{a\}$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\} \qquad f'(x) = \frac{-k}{(x-a)^{k+1}} = (-1)^1 \frac{(1+k-1)!}{(k-1)!} \frac{1}{(x-a)^{1+k}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. La fonction f est dérivable n fois sur $\mathbb{R} - \{a\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\} \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} \frac{1}{(x-a)^{n+k}}.$$

La fonction $f^{(n)}$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule qu'en a. Elle est donc dérivable et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} - \{a\} \quad f^{(n+1)}(x) &= -(-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}(n+k)\frac{1}{(x-a)^{n+k+1}} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+k)!}{(k-1)!} \frac{1}{(x-a)^{n+1+k}}.\end{aligned}$$

L'hypothèse $\mathcal{H}(n+1)$ est donc vraie.

L'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est vraie. Pour tout entier naturel n, si $\mathcal{H}(n)$ est vraie alors $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Théorème 124 (Théorème de Leibniz)**–** *Soit n un entier naturel. Soit f et g deux fonctions dérivables n fois sur un intervalle I. Alors le produit fg est dérivable n fois sur I et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Démonstration. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{L}(n)$ l'hypothèse : pour toutes fonctions f et g dérivables n fois, le produit fg est dérivable n fois sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

L'hypothèse $\mathcal{L}(0)$ est vraie puisque être dérivable 0 fois est synonyme d'être définie et que, pour toutes fonctions f et g définies sur I on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(0-k)} g^{(k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{L}(n)$ est vraie. Soit f et g deux fonctions dérivables $n+1$ fois sur I. On a alors,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}. \tag{$*$}$$

Pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a $n-k \leq n$ et $k \leq n$ de sorte que $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables. Par combinaison linéaire, on déduit de $(*)$ que $(fg)^{(n)}$ est dérivable, autrement dit que fg est dérivable $n+1$ fois. Par dérivation des combinaisons linéaires et des produits, on a alors

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)}$$

Dans la deuxième somme, on fait le changement de variable $\ell = k+1$. On obtient

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} f^{(n+1-\ell)} g^{(\ell)} \\ &= f^{(n+1)} g + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) f^{(n+1-k)} g^{(k)} + f g^{(n+1)} \\ &= f^{(n+1)} g + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + f g^{(n+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} f^{(n+1-k)} g^{(k)}.\end{aligned}$$

L'hypothèse $\mathcal{L}(n+1)$ est donc vraie.

L'hypothèse $\mathcal{L}(0)$ est vraie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{L}(n)$ est vraie alors $\mathcal{L}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{L}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Proposition 125– *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle. L'ensemble $\mathcal{D}^n(I)$ des fonctions n fois dérivables sur I est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Fixons un entier $n \geq 0$. Nous allons montrer que $\mathcal{D}^n(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^0(I)$.

Commençons par montrer que $\mathcal{D}^0(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{D}^0(I)$ est, par définition, l'ensemble des fonctions définies sur I. Cet ensemble est *stable par addition* : si f et g sont deux fonctions définies sur I alors $f+g$ est la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Soit f, g et h trois fonction définies sur I.

— L'addition des fonctions est *associative*. En effet, la définition de l'addition des fonctions implique

$$\forall x \in I \quad ((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x)$$

puis l'associativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ implique

$$\forall x \in I \quad (f(x)+g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x)+h(x)).$$

On a ensuite, de nouveau par définition de l'addition des fonctions

$$\forall x \in I \quad f(x) + (g(x)+h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x).$$

Finalement,

$$\forall x \in I \quad ((f+g)+h)(x) = (f+(g+h))(x)$$

et donc $(f+g)+h = f+(g+h)$;

- L'addition des fonctions est *commutative*. En effet, la définition de l'addition des fonctions implique
$$\forall x \in I \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
puis la commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ implique
$$\forall x \in I \qquad f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$
et, la définition de l'addition des fonctions implique
$$\forall x \in I \qquad g(x) + f(x) = (g+f)(x).$$
Finalement
$$\forall x \in I \qquad (f+g)(x) = (g+f)(x)$$
et donc $f+g = g+f$;
- L'addition des fonctions admet la fonction nulle pour *élément neutre*. La fonction nulle est la fonction z définie sur I par
$$\forall x \in I \qquad z(x) = 0.$$
La définition de l'addition des fonctions implique
$$\forall x \in I \qquad (f+z)(x) = f(x) + z(x) = f(x) + 0.$$
Puisque 0 est l'élément neutre de l'addition dans $\mathbb{R}$ on a
$$\forall x \in I \qquad f(x) + 0 = f(x).$$
Ainsi,
$$\forall x \in I \qquad (f+z)(x) = f(x)$$
et donc $f+z = f$. On note 0 la fonction z.
- Toute fonction définie sur I admet un *symétrique*. Soit k la fonction définie sur I par
$$\forall x \in I \qquad k(x) = -f(x).$$
La définition de l'addition des fonctions implique
$$\forall x \in I \qquad (f+k)(x) = f(x) + k(x) = f(x) - f(x).$$
Puisque $-f(x)$ est le symétrique pour l'addition dans $\mathbb{R}$ de $f(x)$, on a
$$\forall x \in I \qquad f(x) - f(x) = 0 = 0(x)$$
et donc
$$\forall x \in I \qquad (f+k)(x) = 0(x).$$
Finalement, $(f+k) = 0$ et donc k est le symétrique de f pour l'addition des fonctions. On note $-f$ plutôt que k.

L'ensemble $\mathcal{D}^{(0)}(I)$ muni de l'addition des fonctions est donc un groupe commutatif. Le produit externe sur $\mathcal{D}^{(0)}(I)$ est l'opération qui à tout réel λ et toute fonction f définie sur I associe la fonction $\lambda \cdot f$ définie sur I par

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x).$$

— Soit λ et α deux réels, soit f une fonction de $\mathcal{D}^{(0)}(I)$. Alors, par définition du produit externe

$$\forall x \in I \qquad ((\lambda\alpha) \cdot f)(x) = (\lambda\alpha)f(x).$$

Par associativité du produit dans $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in I \qquad (\lambda\alpha)f(x) = \lambda(\alpha f(x)).$$

Par définition du produit externe, on a alors

$$\forall x \in I \qquad \lambda(\alpha f(x)) = \lambda(\alpha \cdot f)(x) = (\lambda \cdot (\alpha \cdot f))(x).$$

Ainsi,

$$\forall x \in I \qquad ((\lambda\alpha) \cdot f)(x) = (\lambda \cdot (\alpha \cdot f))(x)$$

et donc $(\lambda\alpha) \cdot f = (\lambda \cdot (\alpha \cdot f)$.

— Soit f une fonction de $\mathcal{D}^{(0)}(I)$. Alors, par définition du produit externe

$$\forall x \in I \qquad (1 \cdot f)(x) = 1 \times f(x).$$

Puisque 1 est l'élément neutre du produit dans $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in I \qquad 1 \times f(x) = f(x).$$

Ainsi,

$$\forall x \in I \qquad (1 \cdot f)(x) = f(x)$$

et donc $1 \cdot f = f$.

— Le produit externe est *distributif par rapport à l'addition des fonctions*. Soit λ un réel, f et g deux fonctions définies sur I. Par définition du produit externe

$$\forall x \in I \qquad (\lambda \cdot (f + g))(x) = \lambda(f + g)(x).$$

Par définition de la somme de fonctions

$$\forall x \in I \qquad \lambda(f + g)(x) = \lambda\left(f(x) + g(x)\right).$$

Par distributivité du produit dans $\mathbb{R}$ sur la somme dans $\mathbb{R}$, on a ensuite

$$\forall x \in I \qquad \lambda\left(f(x) + g(x)\right) = \lambda f(x) + \lambda g(x).$$

Par définition du produit externe

$$\forall x \in I \qquad \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x).$$

Enfin , par définition de la somme de fonctions

$$\forall x \in I \qquad (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x) = (\lambda \cdot f + \lambda \cdot g)(x).$$

Ainsi,

$$\forall x \in I \qquad (\lambda \cdot (f+g))(x) = (\lambda \cdot f + \lambda \cdot g)(x)$$

et donc $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$.

— Le produit externe est *distributif par rapport à l'addition dans* $\mathbb{R}$. Soit λ et μ deux réels, soit f une fonction définie sur I. Par définition du produit externe

$$\forall x \in I \qquad ((\lambda + \mu) \cdot f)(x) = (\lambda + \mu) f(x).$$

Par distributivité du produit de $\mathbb{R}$ par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in I \qquad (\lambda + \mu) f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x).$$

Par définition du produit externe,

$$\forall x \in I \qquad \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda \cdot f)(x) + (\mu \cdot f)(x).$$

Enfin , par définition de la somme de fonctions

$$\forall x \in I \qquad (\lambda \cdot f)(x) + (\mu \cdot f)(x) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot f)(x).$$

Ainsi,

$$\forall x \in I \qquad ((\lambda + \mu) \cdot f)(x) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot f)(x)$$

et donc $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$.

L'ensemble de ces propriétés implique que $\mathfrak{D}^0(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction de $\mathfrak{D}^n(I)$ est définie sur I. L'ensemble $\mathfrak{D}^n(I)$ est donc une partie de $\mathfrak{D}^0(I)$. Cette partie contient l'élément neutre du groupe $\mathfrak{D}^0(I)$. En effet, la fonction nulle est dérivable de dérivée la fonction nulle et donc dérivable n fois de dérivée n^{e} la fonction nulle.

Montrons que $\mathfrak{D}^n(I)$ est stable par addition. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{S}(k)$ l'hypothèse : pour toutes fonctions f et g définies sur I, si $f \in \mathfrak{D}^k(I)$ et si $g \in \mathfrak{D}^k(I)$ alors $f + g \in \mathfrak{D}^k(I)$ et $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$. L'hypothèse $\mathcal{S}(0)$ est vraie parce que $\mathfrak{D}^0(I)$ est un groupe commutatif. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{S}(k)$ est vraie. Soit f et g deux fonctions de $\mathfrak{D}^{k+1}(I)$. Ce sont deux fonctions dérivables k fois et, d'après $\mathcal{S}(k)$, la fonction $f+g$ est dérivable k fois avec $(f+g)^{(k)} = f^{(k)}+g^{(k)}$. Les fonctions f et g sont dérivables $k+1$ fois, les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(k)}$ sont donc dérivables de dérivées respectives $f^{(k+1)}$ et $g^{(k+1)}$. La somme de deux fonctions dérivables est dérivable de dérivée la somme des dérivées. Donc $f^{(k)} + g^{(k)}$ est dérivable de dérivée $f^{(k+1)} + g^{(k+1)}$. On en déduit que $(f+g)^{(k)}$ est dérivable et que sa dérivée est

$$(f+g)^{(k+1)} = (f+g)^{(k)\prime} = \left(f^{(k)} + g^{(k)}\right)' = f^{(k)\prime} + g^{(k)\prime} = f^{(k+1)} + g^{(k+1)}.$$

Ainsi, l'hypothèse $\mathcal{S}(k+1)$ est vraie. L'hypothèse $\mathcal{S}(0)$ est vraie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{S}(k)$ est vraie alors $\mathcal{S}(k+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall f \in \mathfrak{D}^k(I) \quad \forall g \in \mathfrak{D}^k(I) \qquad f + g \in \mathfrak{D}^k(I).$$

En particulier, $\mathcal{D}^n(I)$ est stable par addition.

Enfin que $\mathcal{D}^n(I)$ est stable par produit externe. C'est une conséquence de la formule de Leibniz en remarquant que pour tout $k \geq 1$, la dérivée k^e de n'importe quelle fonction constante est nulle. □

Proposition 126– *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit g une fonction dérivable k fois sur I. Soit f une fonction dérivable k fois sur un intervalle ouvert J contenant $g(I)$. Alors $f \circ g$ est dérivable k fois sur I.*

Démonstration. On fixe I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{C}(k)$ l'hypothèse : « soit b une fonction dérivable k fois sur I. Soit a une fonction dérivable k fois sur un intervalle ouvert J contenant $b(I)$. Alors $a \circ b$ est dérivable k fois sur I. ».

L'hypothèse $\mathcal{C}(0)$ est vraie : si b est définie sur I et si a est définie sur un intervalle contenant $b(I)$, alors $a \circ b$ est définie sur I. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{C}(k+1)$ est vraie. Soit g une fonction dérivable $k+1$ fois sur I. Soit f une fonction dérivable $k+1$ fois sur un intervalle ouvert J contenant $g(I)$. On pose $b = f$ et $a = g'$. La fonction b est dérivable k fois sur I, la fonction a est dérivable k fois sur J. Grâce à l'hypothèse $\mathcal{C}(k)$, la fonction $a \circ b = g' \circ f$ est dérivable k fois. Par produit, la $(f \circ g)' = g' f' \circ g$ est donc dérivable k fois. On en déduit que la fonction $f \circ g$ est dérivable $k+1$ fois sur I. L'hypothèse $\mathcal{C}(k)$ est donc vraie.

L'hypothèse $\mathcal{C}(0)$ est vraie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{C}(k)$ est vraie alors $\mathcal{C}(k+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{C}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

Proposition 127– *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit k un entier naturel et f, g deux fonctions dérivables k fois sur I. Si g ne s'annule pas sur I alors f/g est dérivable k fois sur I.*

Démonstration. Montrons d'abord que la fonction $1/g$ est k fois dérivable sur I. Si $k = 0$, alors g ne s'annulant pas sur I, la fonction $1/g$ est définie sur I. On suppose $k \geq 1$. La fonction g est continue et ne s'annule pas. D'après le contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, elle est donc de signe constant. On pose $J = \mathbb{R}^{+*}$ si g est à valeurs strictement positives et $J = \mathbb{R}^{-*}$ si g est à valeurs strictement négatives. La fonction $1/g$ est la composée $i \circ g$ avec

$$\begin{array}{rcccl} i & : & J & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

D'après l'exemple 123 page 80, la fonction i est k fois dérivable sur J. Comme g est aussi k fois dérivable on en déduit que $1/g$ est k fois dérivable sur I.

La fonction f/g est alors k fois dérivable sur I comme produit des fonctions f et $1/g$ toutes deux k fois dérivables sur I. □

Soit $k \geq 1$ un entier et $f \in \mathcal{D}^k(I)$. Pour tout $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, la fonction $f^{(j)}$ est dérivable sur I donc continue sur I. En revanche, la fonction $f^{(k)}$ ne jouit d'aucune propriété de régularité. Si elle est dérivable, elle appartient à $\mathcal{D}^{k+1}(I)$. Pour prendre en compte le cas où elle serait seulement continue, on crée un nouvel ensemble.

Définition 128– *Soit $k \geq 0$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I dont la dérivée ke est continue sur I. Une fonction appartenant à $\mathcal{C}^k(I)$ est dite* de classe $\mathcal{C}^k$ *sur I.*

Remarque 129– Il résulte de la définition précédente que $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.

Proposition 130– *Soit $k \geq 0$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{C}^k(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{D}^k(I)$.*

Démonstration. On fixe un entier $k \geq 0$. Par définition $\mathcal{C}^k(I)$ est une partie de $\mathfrak{D}^k(I)$. La fonction nulle est dérivable à l'ordre k est sa dérivée ke est la fonction nulle qui est continue. La fonction nulle est donc un élément de $\mathcal{C}^k(I)$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et f, g deux fonctions appartenant à $\mathcal{C}^k(I)$. Alors, $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est dérivable k fois (puisque $\mathfrak{D}^k(I)$ est un espace vectoriel) et

$$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)^{(k)} = \lambda \cdot f^{(k)} + \mu \cdot g^{(k)}.$$

Les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(k)}$ sont continues. La fonction $\lambda \cdot f^{(k)} + \mu \cdot g^{(k)}$ est donc continue. Ainsi, $\mathcal{C}^k(I)$ est stable par combinaison linéaire. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{D}^k(I)$. □

Proposition 131– *Soit $k \geq 0$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, alors fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

Démonstration. Les fonctions f et g étant de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, ce sont des éléments de $\mathfrak{D}^k(I)$. On peut alors appliquer la formule de Leibniz et obtenir

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}.$$

Or, pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$, les fonctions f$^{(j)}$ et $g^{(k-j)}$ sont continues sur I. La fonction $\binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}$ est donc continue sur I. par somme, on en déduit que $(fg)^{(k)}$ est continue sur I et donc que fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. □

Si la dérivée f' d'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I, alors elle est dérivable k fois et sa dérivée ke est continue. Autrement dit, $(f')^{(k)}$ est continue. Or, $(f')^{(k)} = f^{(k+1)}$ donc f est dérivable $k+1$ fois sur I et sa dérivée $k+1$e est continue. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. On utilise cette remarque pour montrer que la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 132– *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle ouvert J contenant $g(I)$. Alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

Démonstration. On fixe I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{C}(k)$ l'hypothèse : « soit b une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Soit a une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle ouvert J contenant $b(I)$. Alors $a \circ b$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. ».

L'hypothèse $\mathcal{C}(0)$ est vraie : si b est continue sur I et si a est continue sur un intervalle contenant $b(I)$, alors $a \circ b$ est continue sur I. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{C}(k+1)$ est vraie. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur un intervalle ouvert J contenant $g(I)$. On pose $b = f$ et $a = g'$. La fonction b est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, la fonction a de classe $\mathcal{C}^k$ fois sur J. Grâce à l'hypothèse $\mathcal{C}(k)$, la fonction $a \circ b = g' \circ f$ de classe $\mathcal{C}^k$. Par produit, la $(f \circ g)' = g' f' \circ g$ est donc de classe $\mathcal{C}^k$. On en déduit que la fonction $f \circ g$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I. L'hypothèse $\mathcal{C}(k)$ est donc vraie.

L'hypothèse $\mathcal{C}(0)$ est vraie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{C}(k)$ est vraie alors $\mathcal{C}(k+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{C}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. $\square$

***Proposition* 133–** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit k un entier naturel et f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Si g ne s'annule pas sur I alors f/g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

Démonstration. Montrons d'abord que la fonction $1/g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Si $k = 0$, alors g ne s'annulant pas sur I, la fonction $1/g$ est continue sur I. On suppose $k \geq 1$. La fonction g est continue et ne s'annule pas. D'après le contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, elle est donc de signe constant. On pose $J = \mathbb{R}^{+*}$ si g est à valeurs strictement positives et $J = \mathbb{R}^{-*}$ si g est à valeurs strictement négatives. La fonction $1/g$ est la composée $i \circ g$ avec

$$\begin{array}{rccc} i & : & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

D'après l'exemple 123 page 80, la fonction i est k fois dérivable sur J. Sa dérivée k^{e} est la fonction

$$\begin{array}{ccc} J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}. \end{array}$$

C'est une fonction continue sur J. Comme g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, on en déduit que $1/g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

La fonction f/g est alors de classe $\mathcal{C}^k$ sur I comme produit des fonctions f et $1/g$ toutes deux de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. $\square$

Exemple 134– Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions $x \mapsto x^4$, et $\sin$ sont[a] de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, pour tout entier $k \geq 0$. La fonction $x \mapsto 1/x$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur les intervalles ouverts $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$, pour tout entier $k \geq 0$. Par les

a. Le lecteur démontrera cette affirmation théorèmes généraux précédents, la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^k$ sur les intervalles ouverts $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$, pour tout entier $k \geq 0$. Étudions les valeurs de k pour lesquelles f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. Pour cela, nous étudions la régularité en 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \left|x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \left|x^3\right|.$$

On a donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0.$$

La fonction f est alors dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\left|\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\right| = \left|4x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 4x^2 + |x|.$$

On a donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = 0.$$

La fonction f' est alors dérivable en 0, de dérivée $f''(0) = 0$. Ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = \begin{cases} (12x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or,

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left|12x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 12x^2 \text{ et } \left|6x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 6|x|.$$

Il en résulte que la fonction f'' admet une limite en 0 si et seulement si la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ admet une limite en 0. Ce n'est pas le cas [b]. La fonction f'' n'a alors pas de limite en 0. Elle n'est donc pas continue en 0.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, deux fois dérivable, mais pas de classe $\mathcal{C}^2$.

On termine cette partie en donnant une extension du théorème de dérivabilité des prolongements.

Théorème 135– *Soit I un intervalle ouvert et $a \in I$. Soit k un entier non nul. Soit f une fonction définie sur $I - \{a\}$. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I - \{a\}$ et que, pour tout $j \in \{0,\dots,k\}$ la fonction $f^{(j)}$ admet une limite $\ell_j \in \mathbb{R}$ en a. Alors, la fonction f est prolongeable par continuité en a. Le prolongement $\widetilde{f}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et,*

$$\forall j \in \{0,\dots,k\} \qquad \widetilde{f}^{(j)}(a) = \ell_j.$$

b. On s'en rend compte en calculant $f(u_n)$ et $f(v_n)$ pour $u_n = 1/(2\pi n)$ et $v_n = 1/(2\pi n + \pi/2)$.

Démonstration. Puisque $f = f^{(0)}$ converge vers ℓ_0 en a, le prolongement par continuité de f est

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f} & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a; \\ \ell_0 & \text{si } x = a. \end{cases} \end{array}$$

La fonction $\widetilde{f}'$ converge vers ℓ_1 en a. Grâce au théorème de dérivabilité des prolongements (théorème 106 page 67), la fonction $\widetilde{f}$ est dérivable et

$$\widetilde{f}'(a) = \ell_1 = \lim_{x\to a} \widetilde{f}'(x)$$

de sorte que $\widetilde{f}'$ est continue en a. La fonction $\widetilde{f}$ est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Pour tout entier $n \in \{1,\ldots,k\}$, on note $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse : $\widetilde{f}$ est ainsi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $\widetilde{f}^n(a) = \ell_n$. On a montré que $\mathcal{H}(1)$ est vraie. Soit $n \in\in \{1,\ldots,k-1\}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. On pose $g = \widetilde{f}^n$. Cette fonction est continue sur I et dérivable sur $I - \{a\}$ puisque f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I - \{a\}$. De plus, $g' = \widetilde{f}^{n+1}$ converge vers ℓ_{n+1} en a. Grâce au théorème de dérivabilité des prolongements, la fonction g est donc dérivable de dérivée $g'(a) = \ell_{n+1}$. Comme

$$g'(a) = \ell_{n+1} = \lim_{x\to a} g'(x)$$

la fonction g' est aussi continue en a. Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, c'est-à-dire que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. De plus, $f^{(n+1)}(a) = g'(a) = \ell_{n+1}$. L'hypothèse $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

L'hypothèse $\mathcal{H}(1)$ est vraie. Pour tout entier $n \in \{1,\ldots,k\}$, si $\mathcal{H}(n)$ est vraie alors $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \{1,\ldots,k\}$, la fonction $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $\widetilde{f}^n(a) = \ell_n$. Autrement dit, la fonction $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout entier $n \in \{1,\ldots,k\}$, on a $\widetilde{f}^n(a) = \ell_n$ □

5 Fonctions usuelles

5.1) Logarithme et exponentielle

On admet dans ce cours le résultat suivant qui sera démontré pendant le cours d'intégration.

***Théorème* 136–** *Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert I. Il existe une fonction F, dérivable sur I dont la dérivée est f. Cette fonction F est une* primitive *de F sur I. On a*

$$\forall x \in I \qquad F'(x) = f(x).$$

On fera attention qu'il n'y pas unicité. En effet, si F_1 est une primitive de f sur I. Soit C un réel. Si on définit la fonction F_2 sur I en posant

$$\forall x \in I \qquad F_2(x) = F_1(x) + C$$

alors $F_2' = F_1' = f$ et donc F_2 est aussi une primitive de f sur I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. En choisissant $C = y_0 - F_1(x_0)$ alors

$$\forall x \in I \qquad F_2(x) = F_1(x) + y_0 - F_1(x_0)$$

et donc $F_2(x_0) = y_0$. La fonction F_2 est donc une primitive de f prenant la valeur y_0 en x_0.

Réciproquement, si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I. Alors

$$\forall x \in I \qquad (F_2 - F_1)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

et donc $F_2 - F_1$ est constante sur I. Il existe donc un réel C tel que

$$\forall x \in I \qquad F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Si de plus, F_2 prend la valeur y_0 en x_0, alors $F_1(x_0) + C = y_0$ et donc $C = y_0 - F_1(x_0)$.

***Proposition* 137–** *Soit I un intervalle ouvert et f une fonction continue sur I. Soit F une primitive de f sur I. Alors,*

- *la fonction G est une primitive de f sur I si et seulement s'il existe un réel C tel que*

$$\forall x \in I \qquad G(x) = F(x) + C\ ;$$

- *soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule primitive de f sur I prenant la valeur y_0 en x_0.*

On peut alors définir la fonction logarithme néperien.

Définition 138– *La fonction* logarithme néperien *est la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction continue*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

prenant s'annulant en 1. On note $\ln$ cette fonction.

La fonction $\ln$ est donc l'unique fonction vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \ln'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

Le logarithme néperien transforme les produits en somme.

***Proposition* 139–** *Soit x et y deux réels strictement positifs. Alors,*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad f(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa dérivée vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad f'(x) = y \cdot \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$

La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. On calcule

$$f(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y) = 0.$$

La fonction f est donc nulle sur $\mathbb{R}^{*+}$. □

Soit alors x et y deux réels strictement positifs. On a alors

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln(y) = \ln\left(y\frac{x}{y}\right) = \ln(x).$$

On a donc

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).}$$

Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$. Dans l'égalité précédente, on choisit $x = 1$ et $y = t$. On en déduit la propriété suivante.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln(t).}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \ln(x^n) = n\ln(x).$$

L'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ puisque, pour tout réel x on a $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$ et $0\ln(x) = 0$. Soit n un entier naturel tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors

$$\ln\left(x^{n+1}\right) = \ln(x \cdot x^n) = \ln(x) + \ln(x^n).$$

Puisque $\mathcal{H}(n)$ est vraie, on a alors

$$\ln\left(x^{n+1}\right) = \ln(x) + n\ln(x) = (n+1)\ln(x).$$

L'hypothèse $\mathcal{H}(n+1)$ est donc vraie.

L'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est vraie. Pour tout entier naturel n, si l'hypothèse $\mathcal{H}(n)$ est vraie alors $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Soit alors n un entier naturel strictement négatif. Puisque $-n \in \mathbb{N}$, on a

$$\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln(x^{-n}) = -(-n)\ln(x) = n\ln(x).$$

On a donc montré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \ln(x^n) = n\ln(x).}$$

Pour tout réel x strictement positif, on a

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

La fonction $\ln$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. On étudie ensuite les limites au bord du domaine de définition.

Proposition 140– *On a les limites suivantes :*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Démonstration. 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(2^n) = n\ln(2)$. Comme $2 > 1$ et puisque $\ln$ croît strictement, on a $\ln(2) > \ln(1) = 0$. On en déduit que la suite $(\ln(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$. En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ln(2^{n_0}) > 1$. Soit $M > 0$. On note $\lceil M\rceil = \lfloor M\rfloor + 1$. On a donc $\lceil M\rceil > M$. Si $x > (2^{n_0})^{\lceil M\rceil}$ alors $\ln(x) > \lceil M\rceil \ln(2^{n_0}) > M$. Pour tout $M > 0$, il existe donc $A = (2^{n_0})^{\lceil M\rceil}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, si $x > A$ alors $\ln(x) > M$. On en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

2) Si x tend vers 0 par valeurs positives, alors $1/x$ tend vers $+\infty$ et donc $\ln(1/x)$ tend vers $+\infty$. Or, $\ln(1/x) = -\ln(x)$ donc $\ln(x)$ tend vers $-\infty$. Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty.$$

3) Pour tout $x > 1$, on note

$$n(x) = \left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(3)} \right\rfloor$$

On a

$$n(x) \leq \frac{\ln(x)}{\ln(3)} < n(x) + 1. \tag{39}$$

Puisque $3 > 1$, on a $\ln(3) > 0$ et donc

$$n(x)\ln(3) \leq \ln(x) < (n(x)+1)\ln(3) \tag{40}$$

puis

$$\ln\left(3^{n(x)}\right) \leq \ln(x) < \ln\left(3^{n(x)+1}\right).$$

Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante, on a donc

$$3^{n(x)} \leq x < 3^{n(x)+1}. \tag{41}$$

En divisant (40) par (41), on obtient

$$\frac{n(x)}{3^{n(x)+1}}\ln(3) \le \frac{\ln(x)}{x} < \frac{(n(x)+1)}{3^{n(x)}}\ln(3)$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a [c] $n+1 \le 2^n$. On a donc

$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad 0 \le \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2^{n(x)}}{3^{n(x)}}\ln(3) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n(x)}\ln(3).$$

De l'équation (39), on déduit

$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad n(x) > \frac{\ln(x)}{\ln(3)} - 1.$$

On en déduit que $n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ puis que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n(x)}\ln(3) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$x\ln(x) = -\frac{\ln(1/x)}{1/x}.$$

Si x tend vers 0 par valeurs positives, alors $1/x$ tend vers $+\infty$ et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1/x)}{1/x} = 0 \quad \text{puis} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0.$$

□

La fonction $\ln$ est strictement croissante est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa limite en 0 est $-\infty$, sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$. En particulier, il existe un et un seul réel en lequel $\ln$ prend la valeur 1.

Définition 141– Le réel e est l'unique réel tel que $\ln(e) = 1$.

La courbe représentative de la fonction $\ln$ est donnée figure 13 page suivante.

Définition 142– La fonction exponentielle *est la fonction réciproque de la fonction logarithme néperien. Elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. On la note* $\exp$.

Par définition, on a donc

$$\boxed{\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{R}^{+*} & \exp(\ln(x)) & = x \\ \forall x \in \mathbb{R} & \ln(\exp(x)) & = x. \end{array}}$$

c. Le lecteur démontrera cette affirmation par récurrence

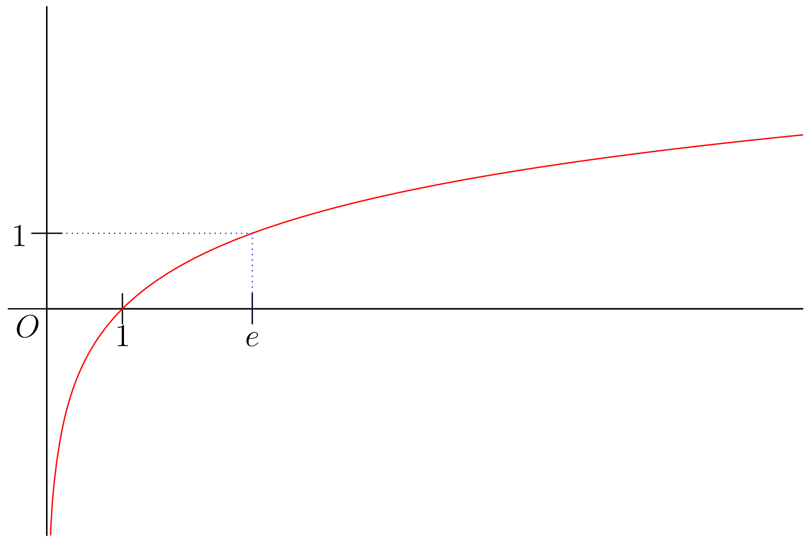


FIGURE 13 – Courbe représentative de la fonction $\ln$

La fonction $\ln$ étant dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée ne s'annulant pas, la fonction $\exp$ est dérivable et

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x).$$

L'exponentielle est donc sa propre dérivée :

$$\boxed{\exp'(x) = \exp(x).}$$

Pour tout réel x, on a $\exp'(x) > 0$. La fonction exponentielle est donc strictement croissante. De $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \ln(x) = +\infty$, on déduit

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.}$$

Enfin, de $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ on tire

$$\boxed{\exp(0) = 1 \qquad \exp(1) = e.}$$

La courbe représentative de la fonction $\exp$ est donnée figure 14 page suivante.

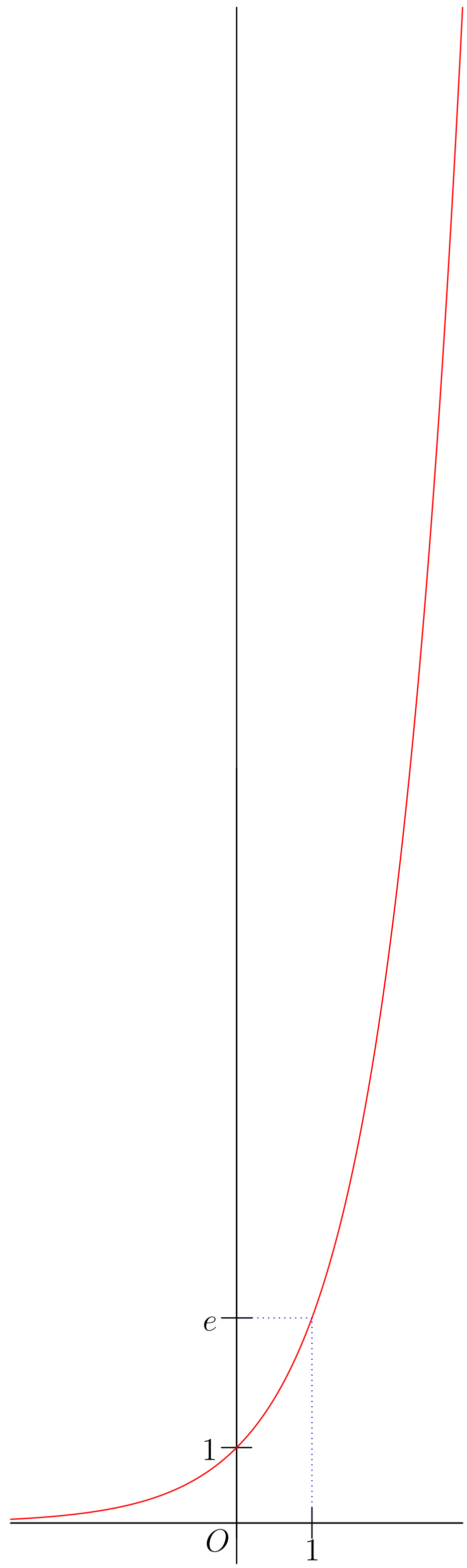


FIGURE 14 – Courbe représentative de la fonction $\exp$

Proposition 143– *Pour tous réels x et y, on a*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

et

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Pour tout entier n, pour tout réel x, on a

$$\exp(nx) = \exp(x)^n.$$

Démonstration.

— On a

$$\ln(\exp(x+y)) = x+y = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = \ln(\exp(x)\exp(y)).$$

Par injectivité de la fonction $\ln$, on en déduit

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

— On a

$$\ln(\exp(-x)) = -x = -\ln(\exp(x)) = \ln\left(\frac{1}{\exp(x)}\right).$$

Par injectivité de la fonction $\ln$, on en déduit

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

— On a

$$\ln(\exp(nx)) = nx = n\ln\exp(x) = \ln(\exp(x)^n).$$

Par injectivité de la fonction $\ln$, on en déduit

$$\exp(nx) = \exp(x)^n.$$

□

Soit $k \geq 0$ un entier et I un intervalle ouvert. On a montré que l'ensemble $\mathcal{C}^k(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. La fonction $\exp$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, on a $\exp'(x) = \exp(x)$. On en déduit que la fonction $\exp$ est dérivable k fois et que

$$\forall j \in \{0,\dots,k\} \quad \forall x \in I \qquad \exp^{(j)}(x) = \exp(x).$$

En particulier, $\exp^{(k)}$ est continue. La fonction $\exp$ est donc de classe $\mathcal{C}$ sur I.

Montrons alors que $\mathcal{C}^k(I)$ est de dimension infinie. Pour cela, pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, on construit la fonction

$$\begin{array}{cccc} e_j & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \exp(jx). \end{array}$$

Nous allons montré que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \dots, e_n)$. Cela impliquera que $\mathcal{C}^k(I)$ contient des familles libres arbitrairement grandes et qu'il ne peut donc pas être de dimension finie. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{j=0}^{n} a_j e_j = 0.$$

S'il existe, notons m le plus grand entier inférieur ou égal à n tel que $a_m \neq 0$. On a donc

$$\forall x \in I \qquad \sum_{j=0}^{m} a_j \exp(jx) = 0.$$

En divisant cette égalité par $\exp(mx)$, on trouve

$$\forall x \in I \qquad \sum_{j=0}^{m} a_j \exp\left((j-m)x\right) = 0. \tag{$\sharp$}$$

Or, si $j < m$ alors $j - m < 0$ et $\exp\left((j-m)x\right)$ tend vers 0 en $+\infty$. De plus, si $j = m$ alors $\exp\left((j-m)x\right) = 1$. Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{j=0}^{m} a_j \exp\left((j-m)x\right) = a_m. \tag{$\sharp\sharp$}$$

En comparant ($\sharp$) et ($\sharp\sharp$), on trouve que $a_m = 0$. C'est contradictoire avec la définition de m, autrement dit $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$. La famille $(e_0, \dots, e_n)$ est libre.

5.2) Fonctions puissances

Si a est un réel strictement positif et si $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$\exp\left(n \ln(a)\right) = \exp\left(\ln(a^n)\right) = a^n.$$

On utilise cette remarque pour prolongement la notion d'exposant à tous les réels.

Définition 144– *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Pour tout réel* a strictement positif, *on définit*

$$a^x = \exp\left(x \ln(a)\right).$$

On a donc

$$\ln(a^x) = \ln\left(\exp\left(x \ln(a)\right)\right) = x \ln(a).$$

Exemple 145– Soit $n \geq 1$ un entier et $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors

$$\left(a^{1/n}\right)^n = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\ln(a)\right)\right)^n = \exp\left(\frac{n}{n}\ln(a)\right) = \exp\left(\ln(a)\right) = a.$$

Comme $a^{1/n}$ est un réel strictement positif dont la puissance ne vaut a, on a

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Par exemple $\sqrt{a} = a^{1/2}$.

On déduit des propriétés de l'exponentielle et du logarithme la proposition suivante.

Proposition 146– *Soit a un réel strictement positif et x et y deux réels. Alors*

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Si de plus b est un réel strictement positif alors

$$a^x b^x = (ab)^x.$$

Démonstration. Par définition

$$a^{x+y} = \exp\left((x+y)\ln(a)\right) = \exp\left(x\ln(a) + y\ln(a)\right) = \exp\left(x\ln(a)\right)\exp\left(y\ln(a)\right) = a^x a^y.$$

De même,

$$(a^x)^y = \exp\left(y\ln(a^x)\right) = \exp\left(yx\ln(a)\right) = a^{xy}.$$

Enfin

$$\begin{aligned} a^x b^x = \exp\left(x\ln(a)\right)\exp\left(x\ln(b)\right) = \exp\left(x\ln(a) + x\ln(b)\right) = \exp\left(x\left(\ln(a)+\ln(b)\right)\right) \\ = \exp\left(x\ln(ab)\right) = (ab)^x. \end{aligned}$$

□

On a vu que e est l'unique réel dont le logarithme vaut 1. Pour tout réel x, on a alors

$$e^x = \exp\left(x\ln(e)\right) = \exp(x).$$

Cela justifie l'égalité suivante, jusque là prise comme une notation

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x = \exp(x).$$

On montre alors les limites dites de « croissances comparées ».

Proposition 147– *Soit $\alpha > 0$. Alors,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = 0.$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\ln\left(x^\alpha\right)}{x^\alpha}.$$

Or, par composition des limites de $x \mapsto \alpha\ln(x)$ et $\exp$, on voit que x^α tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^\alpha\right)}{x^\alpha} = 0$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Puisque $\exp$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)}{e^x} = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Or, pour tout $x > 0$, on a $x/e^x > 0$. La limite précédente implique donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty. \tag{$\flat$}$$

Enfin, pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \left(\frac{e^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha = \frac{1}{\alpha^\alpha}\left(\frac{e^{x/\alpha}}{x/\alpha}\right)^\alpha$$

Or, si x tend vers $+\infty$ alors x/α tend vers $+\infty$. En utilisant ($\flat$) et la positivité de α^α, on obtient donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

□

Proposition 148– *Soit $\alpha > 0$. Alors,*

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

Démonstration. Pour tout $x > 0$, on a

$$x^\alpha \ln(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}\left(-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^\alpha}.$$

Si x tend vers 0 par valeurs positives, alors $1/x$ tend vers $+\infty$. On a donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1/x)}{(1/x)^\alpha} = 0$$

puis

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0.$$

Ensuite,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha e^{-x}} = +\infty$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

□

5.3) Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

5.3.1– Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques

Définition 149– *La fonction* sinus hyperbolique, *notée* sh, *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La fonction cosinus hyperbolique, *notée* ch, *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La fonction ch est paire. La fonction sh est impaire.

En utilisant la définition, on calcule

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}^2(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}^2(x) = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}.$$

On en déduit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.}$$

Remarque 150– On rappelle que l'exponentielle complexe a été définie au premier semestre de la façon suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)} \cdot e^{i\,\mathfrak{Im}(z)}.$$

On a alors la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Si l'on se sert de cette propriété pour étendre $\sin$ et $\cos$ à $\mathbb{C}$, c'est-à-dire si l'on pose

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

et, si l'on étend à $\mathbb{C}$ les définitions de sh et ch en posant

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

on a alors

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \cos(z) = \mathrm{ch}(iz) \qquad \sin(z) = \frac{1}{i}\,\mathrm{sh}(iz).$$

La relation

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = 1$$

est de nouveau un conséquence des définitions de ch et sh et elle est équivalente à la relation

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1.$$

Les fonctions ch et sh sont dérivables (donc continues) sur $\mathbb{R}$. On calcule

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).}$$

Pour tout réel x, on a

$$\mathrm{sh}(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \text{ (car } e^x > 0) \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

et

$$\mathrm{sh}(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} < 1 \text{ (car } e^x > 0) \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

D'autre part, $\mathrm{sh}(0) = 0$. De même, pour tout réel x, on a $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $\mathrm{ch}(x) > 0$.

La fonction sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout réel x, on a

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0.$$

On en déduit que sh et ch admettent une limite en $-\infty$. Ces limites sont

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty.$$

Pour tout réel x, on a

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty.$$

On en déduit que sh et ch admettent une limite en $-\infty$. Ces limites sont

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty.$$

Les tableaux de variations de sh et ch sont donnés ci-dessous. Les courbes représentatives sont reproduites figures 15 et 16 page suivante.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$		$+$	
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Puisque ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut définir la fonction tangente hyperbolique, notée th, appelée tangente hyperbolique, par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Puisque sh est impaire et ch est paire, alors th est impaire.

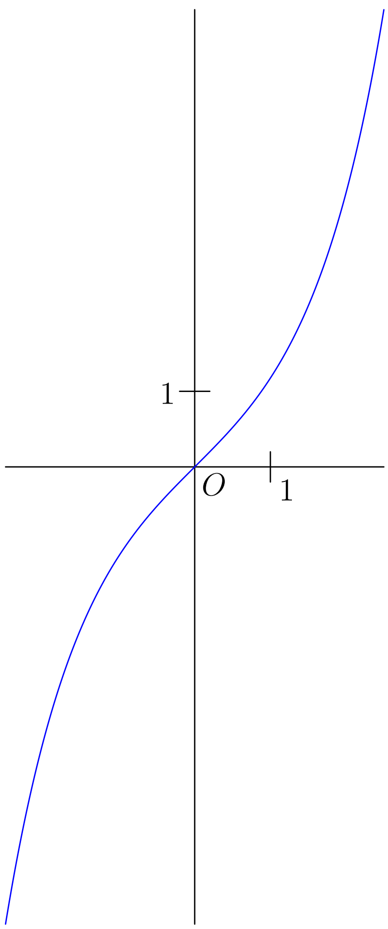


Figure 15 – Courbe représentative de la fonction sh

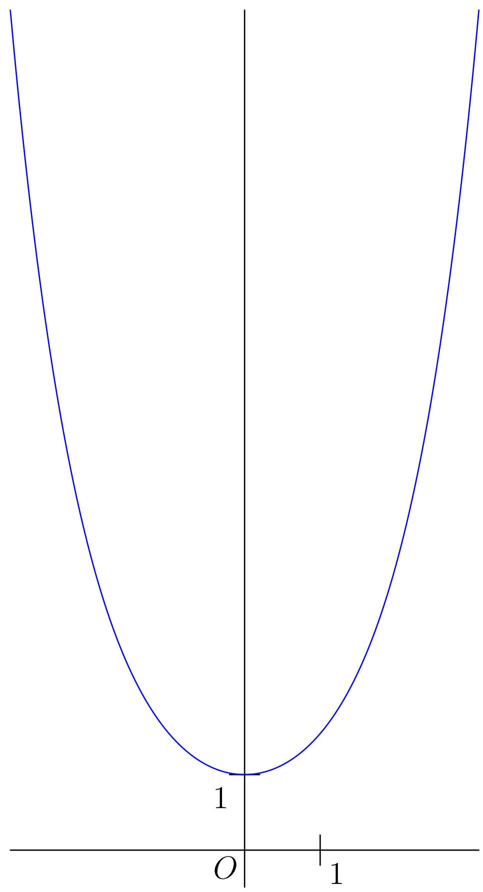


Figure 16 – Courbe représentative de la fonction ch

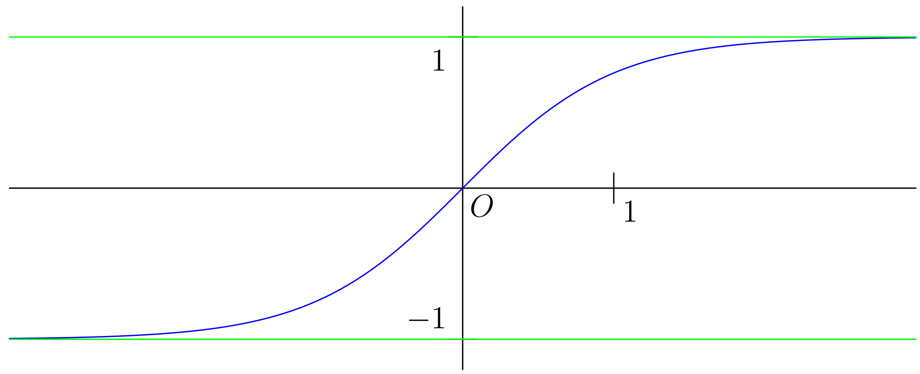


FIGURE 17 – Courbe représentative de la fonction th

Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction ch ne s'annule pas. La fonction th est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0.$$

La fonction th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Cherchons les limites de th en $-\infty$ et $+\infty$. Pour tout réel x, on a

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

et donc

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{2-x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2-x}}.$$

On en tire

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = +1.$$

Puisque th est impaire, on en déduit

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1.$$

Le tableau de variations de th est donné ci-dessous. La courbe représentative est reproduite figure 17.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$		$+$	
$\mathrm{th}(x)$	-1	$\nearrow$	1

5.3.2– Les fonctions hyperboliques réciproques

La fonction sh est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $]\lim\limits_{-\infty}\mathrm{sh}, \lim\limits_{+\infty}\mathrm{sh}[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$. On note argsh la fonction réciproque de sh. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad y=\mathrm{argsh}(x) \Leftrightarrow x=\mathrm{sh}(y).$$

Puisque sh est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \mathrm{argsh}'(x)=\frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{argsh}(x))}=\frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))}.$$

D'autre part, pour tout réel x, on a

$$\mathrm{ch}^2(\mathrm{argsh}(x))-\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(x))=1$$

donc

$$\mathrm{ch}^2(\mathrm{argsh}(x))=1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(x)).$$

D'autre part, ch est à valeurs positives donc

$$\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(x))}=\sqrt{1+x^2}.$$

On obtient

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R} \quad \mathrm{argsh}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

Le tableau de variations de argsh est donné ci-dessous. La courbe représentative est reproduite figure 18 page suivante.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{argsh}'(x)$		$+$	
$\mathrm{argsh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Il existe une expression de argsh à l'aide de la fonction $\ln$. Nous la donnons maintenant. Pour tous réels t et y, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(t)=y &\Leftrightarrow e^t-e^{-t}=2y\\
&\Leftrightarrow e^{2t}-2ye^t-1=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} X=e^t\\ X^2-2yX-1=0.\end{cases}
\end{aligned}$$

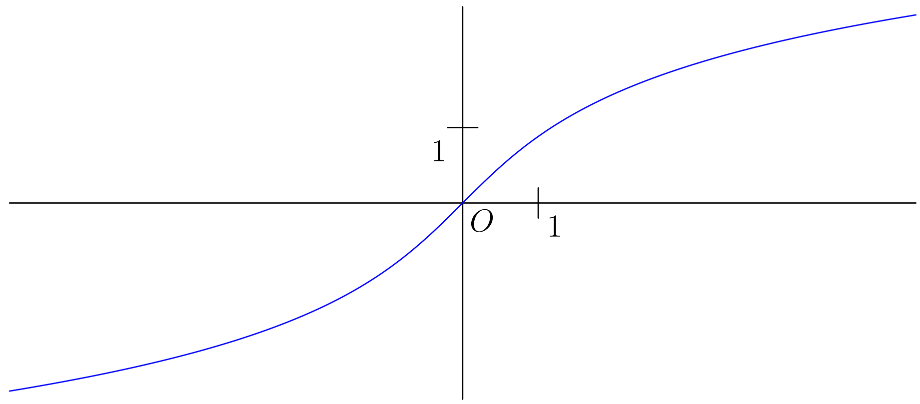


FIGURE 18 – Courbe représentative de la fonction argsh

Le discriminant de l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$ est $4(y^2+1) > 0$ et les solutions sont donc

$$y - \sqrt{y^2+1} \qquad \text{et} \qquad y + \sqrt{y^2+1}.$$

Pour tout réel y, on a $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y| \geq y$ puis $y - \sqrt{y^2+1} < 0$. Pour tous réel t et y, on a donc $e^t \neq y - \sqrt{y^2+1}$. Ainsi pour tous réels y et t a-t-on

$$\operatorname{sh}(t) = y \Leftrightarrow e^t = y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow t = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Or, pour tous réels y et t, on a aussi

$$\operatorname{sh}(t) = y \Leftrightarrow t = \operatorname{argsh}(y).$$

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 151– *Pour tout réel x,*

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

La fonction ch est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[\operatorname{ch}(0), \lim_{+\infty} \operatorname{ch}[= [1, +\infty[$. On note argch la fonction réciproque de ch. Elle est définie sur $[1, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \forall y \in \mathbb{R}^+ \qquad y = \operatorname{argch}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{ch}(y).$$

Puisque ch est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$ (mais s'annule en 0), la fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$. De plus, on a

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{argch}(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))}.$$

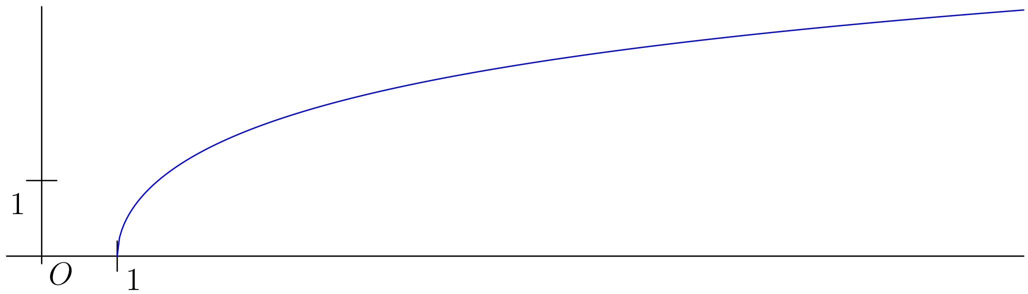


FIGURE 19 – Courbe représentative de la fonction argsh

D'autre part, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$\operatorname{ch}^2(\operatorname{argch}(x)) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{argch}(x)) = 1$$

donc

$$\operatorname{sh}^2(\operatorname{argch}(x)) = \operatorname{ch}^2(\operatorname{argch}(x)) - 1.$$

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $\operatorname{argch}(x) \geq 0$ donc $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) \geq 0$. Ainsi,

$$\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{argch}(x)) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

On obtient

$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[\quad \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.}$$

Le tableau de variations de argch est donné ci-dessous. La courbe représentative est reproduite figure 18 page ci-contre.

x	1	$+\infty$
$\operatorname{argch}'(x)$	‖ $+$	
$\operatorname{argch}(x)$	0 ↗	$+\infty$

Il existe une expression de argch à l'aide de la fonction $\ln$. Nous la donnons maintenant. Pour tous réels $t \geq 0$ et $y \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(t) = y &\Leftrightarrow e^t + e^{-t} = 2y \\ &\Leftrightarrow e^{2t} - 2ye^t + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^t \\ X^2 - 2yX + 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $X^2 - 2yX + 1 = 0$ est $4(y^2 - 1) > 0$ et les solutions sont donc

$$y - \sqrt{y^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Pour tout réel $y > 1$, on a

$$\sqrt{y^2-1} = \sqrt{(y-1)(y+1)} > \sqrt{(y-1)(y-1)} = |y-1| = y-1$$

et donc $y - \sqrt{y^2-1} < 1$. Pour tous réels $t > 0$ et $y > 1$, on a donc $e^t \neq y - \sqrt{y^2-1}$. Ainsi pour tous réels $y > 1$ et $t > 0$ a-t-on

$$\mathrm{ch}(t) = y \Leftrightarrow e^t = y + \sqrt{y^2-1} \Leftrightarrow t = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

De plus, $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $0 = \ln\left(1 + \sqrt{1^2-1}\right)$ donc l'équivalence précédente est vraie pour tous réels $y \geq 1$ et $t \geq 0$. Or, pour tous réels $y \geq 1$ et $t \geq 0$, on a aussi

$$\mathrm{ch}(t) = y \Leftrightarrow t = \mathrm{argch}(y).$$

On en déduit la proposition suivante.

***Proposition* 152–** *Pour tout réel $x \geq 1$,*

$$\mathrm{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

6 Compléments

6.1) Une caractérisation des intervalles

6.1.1– Bornes inférieure et supérieure

Les intervalles sont les ensembles de la forme

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},$$

$$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$$

$$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\},$$

$$]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

où a et b sont deux nombres réels tels que $a \leq b$. Dans tous ces intervalles, le réel b est tel que si $x > b$ alors x n'est pas dans l'intervalle et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x dans intervalle tel que $b - \varepsilon < x$. De même, le réel a est tel que si $x < a$ alors x n'est pas dans l'intervalle et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x dans intervalle tel que $x < a + \varepsilon$.

C'est l'existence pour tout ensemble réel borné de réels ayant les même propriétés que a et b ci-dessus qui va permettre de donner une caractérisation des intervalles. Ces réels sont appelés bornes inférieure et supérieure de l'ensemble. Ces notions seront développées dans les années à venir[d].

On rappelle qu'un ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit majoré s'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in E$, on a $x \leq M$. Le réel M est alors un majorant de E. Dire que M n'est pas un majorant de E, c'est donc dire qu'il existe x dans E tel que $x > M$. l'ensemble E est dit minoré s'il existe un réel m tel que, pour tout $x \in E$, on a $x \geq m$. Le réel m est alors un minorant de E. Un ensemble est borné s'il est à la fois minoré et majoré.

***Théorème* 153–** *Soit E un ensemble réel non vide et majoré. Il existe un réel u satisfaisant les propriétés suivantes :*

1) $\forall x \in E,\ x \leq u$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E,\ u - \varepsilon < x$.

Démonstration. Soit M un majorant de E. Soit $x_0 \in E$. On note n_0 sa partie entière. On considère l'ensemble des entiers supérieurs à n_0 qui ne sont pas majorant de E, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{N}_0 = \{n \in \mathbb{Z} :\ n \geq n_0 \text{ et } \exists x \in E,\ x > n\}.$$

C'est un ensemble non vide : il contient n_0. Par ailleurs, si un entier n vérifie $n > M$, alors pour tout $x \in E$, on a $x \leq M < n$ et donc $n \notin \mathcal{N}_0$. Par contraposée, on en déduit que $\mathcal{N}_0 \subset \{n_0, \cdots, \lfloor M \rfloor\}$. C'est donc un ensemble fini. On note u_0 le plus grand entier de $\mathcal{N}_0$. S'il existait x dans E tel que $u_0 + 1 < x$, on aurait $u_0 + 1 \in \mathcal{N}_0$ ce qui contredirait la maximalité de u_0. Ainsi,

$$\forall x \in E,\ x \leq u_0 + 1.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}(k)$ l'hypothèse : il existe des réels u_0, u_1,..., u_k tels que

- si $0 \leq i \leq j \leq k$, alors $u_i \leq u_j$;
- si $0 \leq j \leq k$, alors u_j n'est pas un majorant de E ;
- si $0 \leq j \leq k$, alors $u_j + 10^{-j}$ est un majorant de E.

L'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est vraie par construction de u_0. Soit $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mathcal{H}(k)$ est vraie. Pour démontrer $\mathcal{H}(k+1)$, on considère les réels u_0, u_1,..., u_k fournis par $\mathcal{H}(k)$ et il suffit de construire u_{k+1}. Pour cela, considérons l'ensemble

$$\mathcal{N}_{k+1} = \left\{u_k + \frac{n}{10^{k+1}},\ n \in \{0, \ldots, 10\}\right\}.$$

d. Comme nous n'avons pas défini $\mathbb{R}$, le risque est grand de « tourner en rond » c'est-à-dire de démontrer un résultat R en utilisant un résultat Q dont la démonstration utilise R ! L'existence de la borne supérieure est souvent utilisée comme axiome de définition de $\mathbb{R}$ et on déduit de cet axiome le fait que toute suite croissante et majorée converge. Dans ce complément, nous faisons le choix opposé : nous prenons comme axiome de construction de $\mathbb{R}$ le fait que toute suite croissante et majorée converge et en déduisons l'existence de la borne supérieure. En cela, nous suivons R. Godement dans son ouvrage *Analyse mathématique I*, ed. Springer, 1998 (chapitre II, §2, nº 9).

Il contient 11 réels. L'un d'eux est un majorant de E, $u_k + 10 \cdot 10^{-k-1}$ d'après $\mathcal{H}(k)$. Un autre n'est pas un majorant de E : u_k par $\mathcal{H}(k)$. Notons alors u_{k+1}, le plus grand des éléments de $\mathcal{N}_{k+1}$ qui n'est pas un majorant de E. On a bien $u_{k+1} \geq u_k$. De plus, en notant n_k l'entier de $\{0,\ldots,9\}$ pour lequel $u_{k+1} = u_k + n_k \cdot 10^{-k-1}$ alors, $u_k + (n_k+1) \cdot 10^{-k-1} \in \mathcal{N}_{k+1}$ est un majorant de E et donc comme $u_k + (n_k+1) \cdot 10^{-k-1} = u_{k+1} + 10^{-k-1}$ on en déduit que $u_{k+1} + 10^{-k-1}$ est un majorant de E. L'hypothèse $\mathcal{H}(k+1)$ est donc vraie. L'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est vraie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{H}(k)$ est vraie alors $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie. Par récurrence, l'hypothèse $\mathcal{H}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cela permet de construire une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses ci-dessus. Cette suite est croissante et majorée par M : en effet, pour tout k, le réel u_k n'est pas un majorant de E alors que M en est un donc $u_k \leq M$. Elle est donc convergente et on note u le réel limite de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,le réel $u_j + 10^{-k}$ est un majorant de E donc

$$\forall x \in E, \forall k \in \mathbb{N}, \quad x \leq u_k.$$

Par passage à la limite, on obtient que u est un majorant de E. Pour tout k, le réel u_k n'est pas un majorant de E de sorte qu'il existe $x_k \in E$ tel que $u_k \leq x_k \leq u$. Grâce au théorème d'encadrement, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E ainsi construite converge vers u. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe donc un entier k tel que $u - \varepsilon < x_k$. □

Le réel u construit dans le théorème 153 est unique (voir par exemple la preuve de la proposition 155 ci-dessous) et est appelé *borne supérieure* de E. On note $\sup(E)$ ce réel.

***Corollaire* 154–** *Soit E un ensemble réel non vide et minoré. Il existe un réel u satisfaisant les propriétés suivantes :*

1) $\forall x \in E, x \geq u$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x < u + \varepsilon$.

Démonstration. Soit m un minorant de E. Pour tout $x \in E$, on a $m \leq x$ et donc $-m \geq -x$. L'ensemble

$$\widetilde{E} = \{-x : x \in E\}$$

est donc un ensemble non vide et majoré. Soit v sa borne supérieure. Pour tout $x \in E$, on a $-x \in \widetilde{E}$ donc $-x \leq v$ et $x \geq -v$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \widetilde{E}$ tel que $v - \varepsilon < y$. Il existe donc $x \in E$ tel que $v - \varepsilon < -x$ c'est-à-dire $x < -v + \varepsilon$. Le choix $u = -v$ est donc convenable. □

Le réel u construit dans le corollaire 154 est unique et est appelé *borne inférieure* de E. On note $\inf(E)$ ce réel.

***Proposition* 155–** *Soit E un ensemble réel, non vide et majoré. La borne supérieure de E est le plus petit de ses majorants. Si*

$$\forall x \in E \quad x \leq M$$

alors

$$\sup(E) \leq M.$$

Démonstration. Soit u et M deux majorants de E tels que $M < u$. Nous démontrons le résultat par contraposée en démontrant que u n'est pas la borne supérieure de E. Posons $\varepsilon = (u - M)/2 > 0$. Pour tout $x \in E$, on a $x \leq M$ car M est un majorant de E. Pour tout $x \in E$, on a donc $x < M + \varepsilon = u - \varepsilon$. On en déduit que u n'est pas borne supérieure de E. □

En considérant $\{-x : x \in E\}$, on obtient le corollaire suivant.

***Corollaire* 156–** *Soit E un ensemble réel, non vide et minoré. La borne inférieure de E est le plus grand de ses minorants. Si*

$$\forall x \in E \quad x \geq m$$

alors

$$\inf(E) \geq m.$$

6.1.2– Caractérisation des intervalles comme convexes de $\mathbb{R}$

Nous donnons une caractérisation de $\mathbb{R}$ [e].

***Théorème* 157–** *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. C'est un intervalle si et seulement si*

$$\forall x \in E, \forall y \in E \quad x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset E.$$

Démonstration.

1) On suppose que E n'est ni minoré ni majoré. Soit $z \in \mathbb{R}$. Il existe $x \in E$ tel que $x < z$ sinon, z serait un minorant de E. Il existe $y \in E$ tel que $y > z$ sinon z serait un majorant de E. Comme x et y sont dans E avec $x < y$, alors $[x, y] \subset E$. Or $z \in [x, y]$ donc $z \in E$. On a donc $\mathbb{R} \subset E$ puis $E = \mathbb{R}$.

2) On suppose que E est minoré mais n'est pas majoré. On note a la borne inférieure de E. Par définition de la borne inférieure, a est un minorant de E : pour tout $x \in E$ on a donc $x \geq a$. Ainsi, $E \subset [a, +\infty[$. Soit $z \in]a, +\infty[$. Par définition de la borne inférieure avec $\varepsilon = (z - a)/2 > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x < a + (z - a)/2 = (z + a)/2$. On a $(z + a)/2 < z$ donc $x < z$. D'autre part, il existe $y \in E$ tel que $y > z$ sinon z serait un majorant de E. Comme x et y sont dans E avec $x < y$, alors $[x, y] \subset E$. Or $z \in [x, y]$ donc $z \in E$. Ainsi $]a, +\infty[\subset E$. Suivant que a appartient ou non à E, on a donc $E = [a, +\infty[$ ou $E =]a, +\infty[$.

3) On suppose que E est majoré mais n'est pas minoré. On note b la borne supérieure de E. Par définition de la borne supérieure, b est un majorant de E : pour tout $x \in E$ on a donc $x \leq b$. Ainsi, $E \subset]-\infty, b]$. Soit $z \in]-\infty, b[$. Par définition de la borne supérieure avec $\varepsilon = (b - z)/2 > 0$, il existe $y \in E$ tel que $y > b - (b - z)/2 = (z + b)/2$. On a $z < (z + b)/2$ donc $z < y$. D'autre part, il existe $x \in E$ tel que $x < z$ sinon z serait un minorant de E. Comme x et y sont dans E avec $x < y$, alors $[x, y] \subset E$. Or $z \in [x, y]$ donc $z \in E$. Ainsi $]-\infty, b] \subset E$. Suivant que b appartient ou non à E, on a donc $E =]-\infty, b]$ ou $E =]-\infty, b[$.

---

e. Un ensemble E est dit convexe si, pour tous éléments $x \leq y$ de cet ensemble, l'ensemble $\{ty + (1 - t)x : t \in [0, 1]\}$ est inclus dans E. Cette notion n'est pas très riche pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ puisque le théorème 157 montre que les seuls sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

4) On suppose que E est borné. On note a la borne inférieure de E et b sa borne supérieure. Comme a est un minorant de E et b un majorant, on a $E \subset [a,b]$. Soit $z \in]a,b[$. Par définition de la borne inférieure avec $\varepsilon = (z-a)/2 > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x < (z+a)/2 < z$. Par définition de la borne supérieure avec $\varepsilon = (b-z)/2 > 0$, il existe $y \in E$ tel que $y > (z+b)/2 > z$. Comme x et y sont dans E avec $x < y$, alors $[x,y] \subset E$. Or $z \in [x,y]$ donc $z \in E$. Ainsi $]a,b[\subset E$. Suivant que a et b appartiennent ou non à E, on a donc $E = [a,b]$ ou $E = [a,b[$ ou $E =]a,b]$ ou $E =]a,b[$.

□

6.2) Fonctions continues sur un intervalle compact

Le but de cette section est de démontrer le théorème 62. Ce théorème affirme que les fonctions continues sont bornées sur les intervalles fermés. La compréhension de la démonstration nécessite d'avoir lu la partie § 6.1.1 introduisant la notion de borne supérieure.

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$.

On suppose par l'absurde que la fonction f n'est pas majorée. On en déduit en particulier, que pour tout entier $n \geq 1$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) > n$. Autrement dit, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble

$$E_n = \{x \in [a,b] : f(x) > n\}$$

est non vide. Il est aussi majoré (puisque pour tout $x \in E_n$, on a $x \leq b$). Soit alors s_n sa borne supérieure (voir le théorème 153). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s_{n+1} est le plus petit majorant de E_{n+1} (voir le corollaire 155). D'autre part, le majorant s_n de E_n est aussi un majorant de E_{n+1} car $E_{n+1} \subset E_n$. On a donc $s_{n+1} \leq s_n$. La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

Montrons ensuite que $s_n \in [a,b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On applique le théorème 153 avec $\varepsilon = 1/k$. On en déduit l'existence d'un réel $x_{n,k} \in E_n$ tel que

$$s_n - \frac{1}{k} < x_{n,k} \leq s_n.$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge et que

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n,k} = s_n.$$

D'autre part, pour tous n et k, on a $x_{n,k} \in E_n$ donc $x_{n,k} \in [a,b]$. En faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit que $s_n \in [a,b]$. La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc minorée par a.

La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée. elle est donc convergente : notons s sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $s_n \in [a,b]$. Par passage à la limite, on a donc $s \in [a,b]$. La fonction f étant continue, la suite $(f(s_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et sa limite est $f(s) \in \mathbb{R}$.

On obtient une contradiction en montrant que la suite $(f(s_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge. Pour tous n et k, on a $x_{n,k} \in E_n$ donc $f(x_{n,k}) > n$. En faisant tendre k vers $+\infty$, et par continuité de f, on en déduit que $f(s_n) \geq n$ pour tout entier $n \geq 1$. Il en résulte que la suite $(f(s_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, d'où une contradiction.

Ce qui précède démontre que toute fonction continue sur un intervalle borné est majorée. Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$. Alors, la fonction $-f$ est continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$. Elle est donc majorée : il existe $M \in \mathbb{R}$,tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $-f(x) \leq M$. On en déduit que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq -M$ et donc que f est minorée.

6.3) Sur la notion de période

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On la suppose périodique, il existe donc $T \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in R \qquad f(x+T) = f(x).$$

L'objectif de cette section est d'explorer l'ensemble des réels qui sont une période pour la fonction f. La compréhension de cette partie nécessite d'avoir acquis les notions de la partie 6.1.1 page 108 et de connaître la notion de groupe (uniquement la définition) abordée dans le cours d'algèbre linéaire.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des périodes de f, c'est-à-dire

$$\mathcal{P} = \{T \in \mathbb{R} \colon \forall x \in R \quad f(x+T) = f(x)\}.$$

Montrons que $\mathcal{P}$ est un groupe pour l'addition de $\mathbb{R}$.

1. L'addition est une loi interne de $\mathcal{P}$. Soit en effet T et T' deux réels de $\mathcal{P}$. Pour tout réel $y \in \mathbb{R}$, on a $f(y+T) = f(y)$ et $f(y+T') = f(y)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique cette propriété à $y = x+T$, on trouve que $f(x+T+T') = f(x+T)$; puis on l'applique à $y = x$ et on trouve $f(x+T) = f(x)$ d'où $f(x+T+T') = f(x)$.
2. L'addition dans $\mathbb{R}$ est associative.
3. L'ensemble $\mathcal{P}$ contient 0 puisque, pour tout x réel, on a $f(x+0) = f(x)$.
4. L'ensemble $\mathcal{P}$ est stable par opposé. Soit $T \in \mathcal{P}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = f((x-T)+T) = f(x-T).$$
On a donc $-T \in \mathcal{P}$.

On montre ensuite une propriété générale des sous-ensembles de réels qui sont des groupes pour l'addition.

***Proposition* 158–** *Soit H une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que H est un groupe pour l'addition de $\mathbb{R}$. Alors,*
- *soit il existe un entier naturel a tel que*
$$H = \{na, \quad n \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z};$$
- *soit H est dense dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 159– Un ensemble H est dense dans $\mathbb{R}$ si, pour tous réels $x < y$, il existe un élément $h \in H$ tel que $x < h < y$. La proposition 11 page 10 implique par exemple que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$ et la proposition est vraie avec $a = 0$. On suppose donc $H \neq \{0\}$.
1re étape : $H \cap \mathbb{R}^{+*}$ admet une borne inférieure. L'ensemble $H \cap \mathbb{R}^{+*}$ est minoré par 0 puisque tous ses éléments sont strictement positifs. Il est non vide. Soit en effet x un élément non nul de H, ou bien $x > 0$ et alors $x \in H \cap \mathbb{R}^{+*}$; ou bien $x < 0$ et alors $-x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $-x \in H$ car H est

stable par opposé donc $-x \in H \cap \mathbb{R}^{+*}$. On note alors $a = \inf(H \cap \mathbb{R}^{+*})$ la borne inférieure de $H \cap \mathbb{R}^{+*}$.

2e étape : a est un élément de H. Si $a = 0$, comme H est un groupe on a bien $a \in H$. Considérons donc le cas où $a \neq 0$. Supposons par l'absurde $a \notin H$.

— D'après le corollaire 154 page 110 avec $\varepsilon = a$ (et $u = a$ puisque a est la borne inférieure de $H \cap \mathbb{R}^{+*}$), il existe $b \in H \cap \mathbb{R}^{+*}$ tel que $a < b < 2a$;
— D'après le corollaire 154 page 110 avec $\varepsilon = b - a$, il existe $c \in H \cap \mathbb{R}^{+*}$ tel que $a < c < b$;
— Puisque b et c sont deux éléments du groupe H, on a $b - c \in H$. De plus, $b - c > 0$ donc $b - c \in H \cap \mathbb{R}^{+*}$. Or $b - c < b - a < 2a - a = a$. Comme a est la borne inférieure de $H \cap \mathbb{R}^{+*}$ on obtient une contradiction.

3e étape : $a\mathbb{Z} \subset H$. Le réel a est un élément de H et H est stable par addition. Pour tout entier $n \geq 0$, le réel na est donc dans H. Enfin, H est stable par opposé donc pout tout entier $n < 0$, le réel na, opposé de $-na \in H$ (car $-n > 0$) est dans H.

4e étape : $H \subset a\mathbb{Z}$ ou H est dense dans $\mathbb{R}$.

1er cas : $a = 0$. Montrons que pour tous réels $x < y$, il existe $h \in H$ tel que $x < h < y$. La borne inférieure de $H \cap \mathbb{R}^{+*}$ est 0 et $y - x > 0$. Il existe donc $h \in H \cap \mathbb{R}^{+*}$ tel que $0 < h < y - x$. Soit $n = \lfloor x/h \rfloor + 1$. Par définition de la partie entière, on a

$$n - 1 = \left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor \leq \frac{x}{h} < \left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor + 1 = n \quad \text{et donc} \quad (n-1)h \leq x < nh.$$

D'autre part,

$$nh = (n-1)h + h < x + y - x = y.$$

Ainsi, $x < nh < y$. Or, $h \in H$ et H est un groupe additif donc $nh \in H$. On un donc trouvé un élément de H dans l'intervalle ouvert $]x, y[$. Le groupe H est dense dans $\mathbb{R}$.

2e cas : $a \neq 0$. Soit $h \in H$. On note $n = \lfloor h/a \rfloor$. On a donc

$$n \leq \frac{h}{a} < n + 1 \quad \text{et donc} \quad na \leq h < na + a.$$

Autrement dit, $h = na + r$ avec $r \in [0, a[$. Puisque $a \in H$, on a $h - na \in H$. Or $r < a$ et a est la borne inférieure de $H \cap \mathbb{R}^{+*}$. On a donc $r \notin \mathbb{R}^{+*}$. Puisque $r \geq 0$, on a donc $r = 0$. Cela implique $h = na$ puis $h \in a\mathbb{Z}$. Ainsi $H \subset a\mathbb{Z}$. □

Finalement, l'ensemble $\mathcal{T}$ des périodes de f est donc
— soit dense dans $\mathbb{R}$;
— soit égale à $T_0\mathbb{Z}$ avec $T_0 \in \mathbb{R}^{+*}$. Dans ce cas, le réel T_0 est appelé *la* période de f.

Pour traiter du cas des fonctions périodiques continues, nous démontrons la proposition suivante.

Proposition 160– *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est nulle sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}$. Alors f est nulle sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit D un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $d \in D$ on a $f(d) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $f(x) = 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, par densité de D dans $\mathbb{R}$, il existe $d_n \in D$ tel que

$$x - \frac{1}{n} < d_n < x + \frac{1}{n}.$$

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x. Comme f est continue en x, on en déduit que la suite $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(x)$. Mais f est nulle sur D et, pour tout n entier, $d_n \in D$. La suite $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc la suite constante nulle et sa limite est 0. On a donc $f(x) = 0$. □

On en déduit le corollaire suivant.

***Corollaire* 161–** *Soit f une fonction continue non constante sur $\mathbb{R}$ et périodique. Il existe un réel $T_0 > 0$ tel que l'ensemble des périodes de f est $T_0\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Par contraposée, supposons que l'ensemble $\mathcal{T}$ des périodes de f est dense sur $\mathbb{R}$. Alors,

$$\forall t \in \mathcal{T} \quad f(t) = f(0).$$

Si $g = f - f(0)$, la fonction g est continue et nulle sur l'ensemble $\mathcal{T}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$. Elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est alors constante sur $\mathbb{R}$. □