Département de mathématiques et informatique
Licence 1 – 11MM22
Vendredi 29 mai, 9h

Examen final – 1re session

Aucun document n'est autorisé. Aucun appareil électronique n'est autorisé.
Durée : 2 heures. Ce devoir comporte 2 pages.

La qualité de la rédaction, la clarté des justifications sont des éléments pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

1) Rappeler le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2 en 0.
2) Montrer qu'on définit une fonction sur $]-1,+\infty[$ en posant

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1,+\infty[-\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3) Justifier que f est dérivable sur $I =]-1,+\infty[-\{0\}$ puis donner une expression de la dérivée sur I.
4) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad f(x) = x^x.$$

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ est donner une expression de sa dérivée.
2) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

Exercice 3 On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction sh en posant

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1) Cette question est une question de cours. Vous devez redémontrer les résultats demandés.
   a) Montrer que sh est dérivable. Calculer sa dérivée. Tracer (en justifiant) le tableau de variations de sh.
   b) Montrer que sh admet une fonction réciproque dérivable sur $\mathbb{R}$. On note argsh cette fonction réciproque.

c) Donner une expression de la dérivée de argsh. Tracer (en justifiant) le tableau de variations de argsh.

2) Soit $x > 0$.

a) Calculer $\operatorname{sh}(\ln(2x+1))$.

b) Montrer que $\operatorname{sh}(\ln(2x+1)) \geq x$.

c) Montrer que $0 \leq \operatorname{argsh}(x) \leq \ln(2x+1)$.

3) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = x - \operatorname{argsh}\left(\frac{x}{2}\right).$$

a) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la limite de g en $+\infty$.

c) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$g(-x) \leq -x + \ln(x+1)$$

et donner la limite de g en $-\infty$.

d) Montrer que g s'annule une fois et une seule.

4) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{argsh}\left(\frac{x}{2}\right).$$

a) Soit x et y des réels. Montrer que

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

b) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.

c) Montrer que pour tout réel x, on a

$$|f(x) - \ell| \leq \frac{1}{2}|x-\ell|.$$

5) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \operatorname{argsh}\left(\frac{u_n}{2}\right).$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| \leq \frac{1}{2^n}.$$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.