Corrigé du contrôle continu

Exercice 1

1) a) La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1 + x^2 \geq 1 > 0.$$

Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$.

b) La fonction $u\colon x \to 1 + x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car, par définition, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$). Par théorème de composition,

$\boxed{\text{la fonction } f = \ln \circ u \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$

a) La fonction g est une fraction rationnelle (c'est-à-dire quotient de deux fonctions polynomiales). Elle est donc définie en tout réel n'annulant pas son dénominateur. Or,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

On en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}).$$

Finalement,

$\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.}$

b) La fonction g est une fraction rationnelle (c'est-à-dire quotient de deux fonctions polynomiales). Elle est donc continue en tout réel n'annulant pas son dénominateur. Grâce à la question précédente,

$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$

.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1$$

puis

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=1.}$$

De même,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

donc

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1$$

puis

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}g(x)=1.}$$

d) On a

$$\lim_{x\to-1}(x^2-3x+2)=6>0.$$

De plus,

$$\lim_{x\to-1}(x^2-1)=0.$$

Enfin, si $x<-1$ alors $x^2-1>0$ donc si $x<-1$ alors $g(x)>0$. On en déduit

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}g(x)=+\infty.}$$

D'autre part, si $x\in]-1,1[$ alors $x^2-1<0$ donc si $x\in]-1,1[$ alors $g(x)>0$. On en déduit

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}g(x)=-\infty.}$$

e) La fonction g n'a pas de limite finie en -1 – elle n'en a même pas à gauche – on trouve que

$$\boxed{g \text{ n'admet pas de prolongement par continuité en } -1.}$$

f) La quantité $x^2 - 3x + 2$ s'annule en 1. Elle est donc factorisable par $x - 1$. On trouve $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Puisque $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \qquad g(x) = \frac{x-2}{x+1}.$$

Or,

$$\lim_{x \to 1} x - 2 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} x + 1 = 2.$$

On en déduit

$$\boxed{\lim_{x \to 1} g(x) = -\frac{1}{2}.}$$

Une fonction admettant une limite en un point y admet une limite à gauche et une limite à droite. Les trois limites ont alors même valeur. On obtient

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = -\frac{1}{2}.}$$

g) La fonction g admet une limite en 1. Elle admet donc un prolongement par continuité en 1. Ce prolongement est la fonction $\widetilde{g}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$\boxed{\widetilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}}$$

h) **1re méthode –** On a vu que g converge vers 1 en $+\infty$. On peut donc choisir

$$\boxed{a = 0 \quad \text{et} \quad b = 1.}$$

2e méthode – Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} &= \frac{x^2 - 1 - 3x + 3}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} - \frac{3x - 3}{x^2 - 1} \\ &= 1 - 3\frac{x - 1}{(x-1)(x+1)} = 1 - \frac{3}{x+1}. \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x+1} = 0.$$

En posant $a = 0$ et $b = 1$ on a alors

$$g(x) - ax - b = -\frac{3}{x+1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Il en résulte

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - ax - b) = 0.$$

3e méthode – Pour tous réels a et b, pour tous $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$, on calcule

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} - ax - b = \frac{-ax^3 + (1-b)x^2 + (a-3)x + b + 2}{x^2 - 1}.$$

Pour qu'une fraction rationnelle tende vers 0 en $+\infty$, il suffit que son dénominateur soit de degré strictement plus grand que son numérateur. Dans notre cas, il faut donc que les coefficients des termes de degré 3 et 2 du numérateur soient nuls. Ces coefficients sont -1 et $1-b$. Il suffit donc de choisir $a = 0$ et $b = 1$.

Exercice 2

1) La fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$. Elle est donc bornée sur cet intervalle et atteint ses bornes. En particulier, il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que

$$\min_{x\in[0,1]} f(x) = f(x_0).$$

Cela revient à dire

$$\boxed{\exists x_0 \in [0, 1] \quad \forall x \in [0, 1] \quad f(x) \geq f(x_0).}$$

2) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) > 7$. En particulier $f(x_0) > 7$. Posant $m = f(x_0)$, on a $m > 7$ et, d'après la question précédente

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) \geq m.$$

On a démontré

$$\boxed{\exists m \in [7, +\infty[\quad \forall x \in [0, 1] \quad f(x) \geq m.}$$

Exercice 3

1) La fonction f est continue sur $[0, 1]$. La fonction $t \mapsto f(t + 1/n)$ est donc continue en tout réel t vérifiant

$$0 \leq t + \frac{1}{n} \leq 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad -\frac{1}{n} \leq t \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

On en déduit que la fonction g est continue sur $[0, 1] \cap [-1/n, 1 - 1/n]$. On obtient

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right].}$$

2) On calcule

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Par changement de variable $j = k + 1$ on trouve

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0.}$$

3) On suppose que

$$\mathcal{E} : \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \left(0 \leq k \leq n-1 \Rightarrow g\left(\frac{k}{n}\right) \neq 0\right).$$

a) Pour tout entier $k \in [0, n-1]$ on a donc $g(k/n) > 0$ ou $g(k/n) < 0$. Si pour tout $k \in [0, n-1]$ on avait $g(k/n) > 0$, alors on aurait

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > 0 \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \neq 0.$$

Si pour tout $k \in [0, n-1]$ on avait $g(k/n) < 0$, alors on aurait

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) < 0 \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \neq 0.$$

Finalement, on en déduit

$$\boxed{\exists (k_0, k_1) \in [0, n-1]^2 \quad g\left(\frac{k_0}{n}\right) < 0 \quad \text{et} \quad g\left(\frac{k_1}{n}\right) > 0.}$$

b) La fonction g est continue sur $[0, 1 - 1/n]$. Elle est strictement négative en k_0/n et strictement positive en k_1/n. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence de t compris entre k_0/n et k_1/n tel que $g(t) = 0$. Par définition de g cela implique

$$\boxed{\exists t \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \quad f\left(t + \frac{1}{n}\right) = f(t).}$$

4) On suppose que l'énoncé $\mathcal{E}$ n'est pas vrai.

a) La négation de l'énoncé $\mathcal{E}$ est

$$\text{non}\,(\mathcal{E}) : \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq k \leq n-1 \quad \text{et} \quad g\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

b) Soit k un entier de $[0, n-1]$ tel que $g(k/n) = 0$. On pose $t = k/n$. On a $t \in [0, 1 - 1/n]$ et $g(t) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\exists t \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \quad f\left(t + \frac{1}{n}\right) = f(t).}$$