Département de mathématiques et informatique
Licence 1 – 11MM22 : mathématiques générales 2
Vendredi 18 mars 2016, 8h

Contrôle continu

Aucun document ni aucun appareil électronique n'est autorisé.
Durée : 1 heure 45 minutes
Ce devoir comporte 2 pages.
La qualité de la rédaction, la clarté des justifications sont des éléments pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

1) Soit f la fonction de la variable réelle donnée par

$$f(x) = \ln(1 + x^2).$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Sur quel ensemble la fonction f est-elle continue ?

2) Soit g la fonction de la variable réelle donnée par

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Sur quel ensemble la fonction g est-elle continue ?

c) Quelles sont les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$? (Bien sûr, on justifiera le résultat).

d) La fonction g admet-elle une limite à gauche en -1 ? une limite à droite en -1 ? une limite en -1 ?

e) La fonction g admet-elle un prolongement par continuité en -1 ? Le cas échéant, quel est ce prolongement ?

f) La fonction g admet-elle une limite à gauche en 1 ? une limite à droite en 1 ? une limite en 1 ?

g) La fonction g admet-elle un prolongement par continuité en 1 ? Le cas échéant, quel est ce prolongement ?

h) Trouver des réels a et b tels que

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x) - ax - b) = 0.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[0,1]$. On suppose que

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) > 7.$$

1) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) \geq f(x_0).$$

2) Montrer qu'il existe $m > 7$ tel que

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) \geq m.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = f(1)$. Soit n un entier naturel non nul. Le but de cet exercice est de prouver l'existence d'un réel $t \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que

$$f\left(t + \frac{1}{n}\right) = f(t).$$

On définit une fonction g en posant

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x).$$

1) Quels sont les ensembles de définition et de continuité de g ?

2) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

3) On suppose que

$$\mathcal{E} : \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \left(0 \leq k \leq n-1 \Rightarrow g\left(\frac{k}{n}\right) \neq 0\right).$$

a) Montrer qu'il existe des entiers k_0 et k_1 dans $[0, n-1]$ tels que

$$g\left(\frac{k_0}{n}\right) < 0 \quad \text{et} \quad g\left(\frac{k_1}{n}\right) > 0.$$

b) En déduire dans ce cas qu'il existe un réel $t \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que

$$f\left(t + \frac{1}{n}\right) = f(t).$$

4) On suppose que l'énoncé $\mathcal{E}$ n'est pas vrai.

a) Écrire la négation de l'énoncé $\mathcal{E}$.

b) Montrer dans ce cas qu'il existe un réel $t \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que

$$f\left(t + \frac{1}{n}\right) = f(t).$$