Département de mathématiques et informatique
L1S1, module A ou B

Chapitre 4

Suites réelles

Emmanuel Royer

emmanuel.royer@uca.fr

➔ **Remarque importante.**

Ce cours n'est *pas* indépendant du cours de Mathématiques pour tous.

Table des matières

1 Généralités

Une suite réelle est une application d'un sous-ensemble $\mathbb{Z}_{\geq n_0} = \{n \in \mathbb{Z} \colon n \geq n_0\}$ dans $\mathbb{R}$. Si $u \colon \mathbb{Z}_{\geq n_0} \to \mathbb{R}$ est une suite réelle, on note souvent u_n plutôt que $u(n)$ sa valeur en n. Ce réel s'appelle le *terme d'indice n* de la suite. Le réel u_{n_0} s'appelle le premier terme de la suite. On note aussi $(u_n)_{n \geq n_0}$ (ou parfois juste (u_n)) la suite u.

Dans la suite, nous omettrons le terme réelle et parlerons de *suite* quand nous devrions parler de *suite réelle*.

Une suite peut être définie à l'aide d'une formule permettant le calcul direct de chaque terme de la suite, par exemple $\left(1 - \frac{1}{n-6}\right)_{n \geq 7}$. Cette formule s'appelle le *terme général* de la suite u. Une suite peut aussi être dfinie par récurrence, c'est-à-dire par la donnée des k premiers termes et d'une relation entre u_{n+k} et $u_{n+k-1}, \dots, u_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1– On définit une suite en $(u_n)_{n \geq 1}$ en posant

$$\begin{aligned} &u_1 = 1 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 3 \\ &u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \geq 1. \end{aligned}$$

Exemple 2– Soit $a \geq 1$ un entier quelconque. On définit une suite en $(u_n)_{n \geq 0}$ en posant

$$\begin{aligned} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= \begin{cases} \frac{1}{2} u_n & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 0$.

Soit n_0 un entier. On note $\mathcal{U}_{n_0}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n \geq n_0}$. On munit cet ensemble d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 3– *Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ et $v = (v_n)_{n \geq n_0}$ deux éléments de $\mathcal{U}_{n_0}$. Leur somme $u + v$ est l'élément de $\mathcal{U}_{n_0}$ dont le terme d'indice n est $u_n + v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$. Autrement dit :*

$$(u + v)_n = u_n + v_n$$

pour tout entier $n \geq n_0$.

Définition 4– *Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ un élément de $\mathcal{U}_{n_0}$ et λ un réel. Le produit externe de λ par u, noté λu est l'élément de $\mathcal{U}_{n_0}$ dont le terme d'indice n est λu_n pour tout entier $n \geq n_0$. Autrement dit :*

$$(\lambda u)_n = \lambda u_n$$

pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 5– Soit u et v les suites définies respectivement par

$$u_n = 3n + 2 \quad \text{et} \quad v_n = 2 + \frac{1}{n}$$

pour tout entier $n \geq 1$. La suite $5u - 4v$ est la suite w définie pour tout $n \geq 1$ par

$$w_n = 15n + 2 - \frac{4}{n}.$$

***Proposition* 6–** *Quelque soit l'entier n_0, l'ensemble $\mathcal{U}_{n_0}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{U}_{n_0}$ est muni d'une opération interne, l'addition, et d'une opération externe, le produit externe. Vérifions que ces deux opérations vérifient les axiomes de définition d'un espace vectoriel. Pour cela, on utilise le fait que deux suites sont égales si et seulement si leurs valeurs en tout entier sont égales et le fait que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. On commence par l'addition.

a) L'addition est associative. Soit en effet u, v et w trois suites de $\mathcal{U}_{n_0}$. Pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned} ((u+v)+w)_n &= (u+v)_n + w_n \\ &= (u_n + v_n) + w_n \\ &= u_n + (v_n + w_n) \\ &= u_n + (v+w)_n \\ &= (u + (v+w))_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $(u+v)+w = u+(v+w)$.

b) L'addition est commutative. Soit en effet u et v deux suites de $\mathcal{U}_{n_0}$. Alors pour tout $n \geq n_0$ on a

$$(u+v)_n = u_n + v_n = v_n + u_n = (v+u)_n.$$

Ainsi, $u + v = v + u$.

c) La loi admet un élément neutre. Notons en effet 0 la suite qui prend la valeur 0 en tout entier $n \geq n_0$. Pour tous ces entiers, on a

$$(u+0)_n = u_n + 0_n = u_n + 0 = u_n$$

et donc $u + 0 = u$.

d) Tout élément de $\mathcal{U}_{n_0}$ admet un opposé. Considérons en effet une suite $u \in \mathcal{U}_{n_0}$. Définissons la suite $-u$ de $\mathcal{U}_{n_0}$ par

$$(-u)_n = -u_n$$

pour tout $n \geq n_0$. Alors, pour ces entiers on a

$$(u + (-u))_n = u_n + (-u)_n = u_n - u_n = 0 = 0_n$$

et donc $-u$ est l'opposé de u.

L'ensemble $\mathcal{U}_{n_0}$ est donc un groupe commutatif. Vérifions les propriétés du produit externe.

i) Le produit externe est distributif par rapport à l'addition. Soit en effet u et v deux suites de $\mathcal{U}_{n_0}$ et λ un réel. Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda(u+v))_n &= \lambda(u+v)_n \\ &= \lambda(u_n+v_n) \\ &= \lambda u_n + \lambda v_n \\ &= (\lambda u)_n + (\lambda v)_n \\ &= (\lambda u + \lambda v)_n.\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

ii) Le produit externe est distributif par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$. Soit en effet $u \in \mathcal{U}_{n_0}$ et λ et μ deux réels. Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned}((\lambda+\mu)u)_n &= (\lambda+\mu)u_n \\ &= \lambda u_n + \mu u_n \\ &= (\lambda u)_n + (\mu u)_n \\ &= (\lambda u + \mu u)_n.\end{aligned}$$

Ainsi, $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

iii) Le produit externe est associatif avec le produit de $\mathbb{R}$. Soit en effet $u \in \mathcal{U}_{n_0}$ et λ et μ deux réels. Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned}((\lambda\mu)u)_n &= (\lambda\mu)u_n \\ &= \lambda(\mu u_n) \\ &= \lambda(\mu u)_n \\ &= (\lambda(\mu u))_n\end{aligned}$$

donc $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

iv) Le scalaire 1 n'agit pas. Soit en effet $u \in \mathcal{U}_{n_0}$. Pour tout $n \geq n_0$ on a

$$(1 \cdot u)_n = 1 \cdot u_n = u_n.$$

Ainsi $1 \cdot u = u$.

□

Remarque 7– On montrera en annexe A que l'espace vectoriel $\mathcal{U}_{n_0}$ n'est *pas* de dimension finie.

Il existe sur l'espace vectoriel des suites $\mathcal{U}_{n_0}$ une troisième opération, le produit.

Définition 8– *Soit* $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $v = (v_n)_{n\geq n_0}$ *deux éléments de* $\mathcal{U}_{n_0}$. *Leur produit* uv *est l'élément de* $\mathcal{U}_{n_0}$ *dont le terme d'indice* n *est* $u_n v_n$ *pour tout entier* $n \geq n_0$. *Autrement dit :*

$$(uv)_n = u_n v_n$$

pour tout entier $n \geq n_0$.

Cette opération interne vérifie les propriétés suivantes.

Définition 9– *Le produit de* $\mathcal{U}_{n_0}$

a) *est commutatif;*

b) *est associatif;*

c) *admet un élément neutre, la suite* 1 *définie par* $1_n = 1$ *pour tout* $n \geq 0$*;*

d) *est distributif par rapport à l'addition.*

Démonstration. Considérons trois suites u, v et w de $\mathcal{U}_{n_0}$.

a) pour tout entier $n \geq n_0$, on a $(uv)_n = u_n v_n = v_n u_n = (vu)_n$ et donc $uv = vu$. Le produit est donc commutatif;

b) Pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$((uv)w)_n = (uv)_n w_n = (u_n v_n) w_n = u_n (v_n w_n) = u_n (vw)_n = (u(vw))_n$$

et donc $(uv)w = u(vw)$. Le produit est donc associatif;

c) pour tout entier $n \geq n_0$, on a $(u1)_n = u_n 1_n = u_n \times 1 = u_n$ et donc $u1 = u$. Ainsi 1 est l'élément neutre pour le produit;

d) pour tout entier $n \geq n_0$, on a $((u+v)w)_n = (u+v)_n w_n = (u_n + v_n) w_n = u_n w_n + v_n w_n = (uw)_n + (vw)_n = (uw + vw)_n$ et donc $(u+v)w = uw + vw$. Le produit est donc distributif par rapport à l'adition.

□

Parmi les exemples de suites qu'il faut bien connaître, il y a les suites *arithmétiques*.

Définition 10– *Soit* r *un réel. Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite* arithmétique *de raison* r *si* $u_{n+1} = u_n + r$ *pour tout* $n \geq n_0$.

Exemple 11– La suite $(3+5n)_{n\geq -2}$ est arithmétique de raison 5 car $3+5(n+1)-(3+5n) = 5$ pour tout $n \geq -2$.

Toutes les suites arithmétiques sont semblables à celle de l'exemple précédent, ainsi que le montre la proposition suivante.

***Proposition* 12–** *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est arithmétique de raison* r *alors*

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0) r$$

pour tout $n \geq n_0$.

Démonstration. On appelle $\mathcal{E}(n)$ l'égalité $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$. L'égalité $\mathcal{E}(n_0)$ est vraie : $u_{n_0} = u_{n_0} + 0r$. Soit $n \geq n_0$, supposons vraie l'égalité $\mathcal{E}(n)$. Alors,

$$u_{n+1} = u_n + r = u_{n_0} + (n - n_0)r + r = u_{n_0} + (n + 1 - n_0)r$$

et donc $\mathcal{E}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{E}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. □

On peut alors calculer la somme des premiers termes de toute suite arithmétique.

***Proposition* 13–** *Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique de raison r alors la somme des $k+1$ premiers termes de cette suite est*

$$\sum_{j=0}^{k} u_{n_0+j} = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_{n_0+k} = (k+1)u_{n_0} + \frac{k(k+1)}{2}r.$$

pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. On a

$$\sum_{j=0}^{k} u_{n_0+j} = \sum_{j=0}^{k} \Big(u_{n_0} + jr\Big) = (k+1)u_{n_0} + r\sum_{j=0}^{k} j = (k+1)u_{n_0} + \frac{k(k+1)}{2}r.$$

□

Pour retenir la proposition 13, on peut remarque que $\frac{k(k+1)}{2}r$ est le produit de la somme des k premiers entiers naturels avec la raison et que $(k+1)u_{n_0}$ est le premier terme multiplié par le nombre de termes de la somme.

Il faut aussi connaître les suites géométriques.

Définition 14– *Soit q un réel. Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite* géométrique *de raison q si $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \geq n_0$.*

Exemple 15– La suite $(3 \cdot 5^n)_{n \geq -2}$ est géométrique de raison 5 car $3 \cdot 5^{n+1} = 5 \cdot 3 \cdot 5^n$ pour tout $n \geq -2$.

Toutes les suites géométriques sont semblables à celle de l'exemple précédent, ainsi que le montre la proposition suivante.

***Proposition* 16–** *Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique de raison q alors*

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$$

pour tout $n \geq n_0$.

Démonstration. Si $q = 0$, le résultat est vrai à condition de faire la convention $0^0 = 1$. On suppose désormais $q \neq 0$. On appelle $\mathcal{E}(n)$ l'égalité $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$. L'égalité $\mathcal{E}(n_0)$ est vraie : $u_{n_0} = u_{n_0} q^0$. Soit $n \geq n_0$, supposons vraie l'égalité $\mathcal{E}(n)$. Alors,

$$u_{n+1} = q u_n = q u_{n_0} q^{n-n_0} = u_{n_0} q^{n+1-n_0}$$

et donc $\mathcal{E}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{E}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. □

On peut alors calculer la somme des premiers termes de toute suite géométrique.

***Proposition* 17–** *Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique de raison q alors la somme des $k+1$ premiers termes de cette suite est*

$$\sum_{j=0}^{k} u_{n_0+j} = \begin{cases} (k+1)u_{n_0} & \text{si } q = 1 \\ u_{n_0} \dfrac{q^{k+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. Une suite géométrique de raison 1 est constante et égale à u_{n_0}. La somme de ses $k+1$ premiers termes est donc $(k+1)u_{n_0}$. On suppose maintenant $q \neq 1$. On a

$$\sum_{j=0}^{k} u_{n_0+j} = \sum_{j=0}^{k} (q^j u_{n_0}) = u_{n_0} \sum_{j=0}^{k} q^j.$$

Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathcal{E}(n)$ l'égalité

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

L'égalité $\mathcal{E}(0)$ est vraie. Supposons vraie l'égalité $\mathcal{E}(n)$. Alors,

$$\sum_{j=0}^{n+1} q^j = \sum_{j=0}^{n} q^j + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}.$$

L'égalité $\mathcal{E}(n+1)$ est donc conséquence de l'égalité $\mathcal{E}(n)$. Par récurrence, l'égalité $\mathcal{E}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$ et on termine la preuve en prenant $n = k$. □

Les suites croissantes et décroissantes jouent un rôle important dans l'étude des suites.

Définition 18– *Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite.*

1) *On dit qu'elle est* croissante *si* $u_{n+1} \geq u_n$ *pour tout* $n \geq n_0$. *On dit qu'elle est* strictement croissante *si* $u_{n+1} > u_n$ *pour tout* $n \geq n_0$.
2) *On dit qu'elle est* décroissante *si* $u_{n+1} \leq u_n$ *pour tout* $n \geq n_0$. *On dit qu'elle est* strictement décroissante *si* $u_{n+1} < u_n$ *pour tout* $n \geq n_0$.
3) *On dit qu'elle est* monotone *si elle est soit croissante, soit décroissante.*
4) *On dit qu'elle est constante si, pour tout* $n \geq n_0$, *on a* $u_n = u_{n_0}$.
5) *On dit qu'elle est stationnaire s'il existe un entier* $n_1 \geq n_0$ *tel que, pour tout* $n \geq n_1$, *on a* $u_n = u_{n_1}$.

Exemple 19– i) Les suites arithmétiques de raison positive sont croissantes.

ii) Les suites arithmétiques de raison négative sont décroissantes.

iii) Les suites géométriques de raison supérieure à 1 sont croissantes si leur premier terme est positif et décroissantes sinon.

iv) Les suites géométriques de raison comprise entre 0 et 1 sont décroissantes si leur premier terme est positif et croissantes sinon.

v) Les suites géométriques de raison strictement négatives et premier terme non nul ne sont ni croissantes ni décroissantes.

vi) Les suites constantes sont stationnaires mais les suites stationnaires ne sont pas nécessairement contantes.

Exemple 20– i) La suite $(\ln(n))_{n\geq 1}$ est strictement croissante [a]. En effet

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0.$$

ii) La suite $(\exp(n))_{n\geq 0}$ est strictement croissante. C'est une suite géométrique de raison $e = \exp(1) > 1$.

iii) Soit u, la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{n}{2^n}$. Pour tout n, on a $u_n \neq 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Si $n \geq 1$, on en déduit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n > 0$ et donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite u est donc décroissante.

iv) Soit u, la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_{2n} > u_{2n+1}$ (puisque $u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$) alors que $u_{2n+1} < u_{2n+2}$. La suite u n'est dons pas monotone.

a. On rappelle que les fonctions logarithme et exponentielle ont été étudiées lors du cours de *Mathématiques pour tous.*

Exemple 21– i) Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, alors la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.

ii) Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante, alors la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.

Exemple 22– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante [b]. On définit une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ en fixant la valeur de u_{n_0} et en posant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq n_0$. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est monotone. On a en effet l'alternative suivante.

i) Soit $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$. On note $\mathcal{C}(n)$ l'égalité $u_{n+1} \geq u_n$. L'égalité $\mathcal{C}(n_0)$ est vraie. Puisque f croît, pour tout $n \geq n_0$, l'égalité $\mathcal{C}(n)$ implique $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ et donc $\mathcal{C}(n+1)$. Par récurrence, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.

ii) Soit $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$. On note $\mathcal{D}(n)$ l'égalité $u_{n+1} \leq u_n$. L'égalité $\mathcal{D}(n_0)$ est vraie. Puisque f croît, pour tout $n \geq n_0$, l'égalité $\mathcal{D}(n)$ implique $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ et donc $\mathcal{D}(n+1)$. Par récurrence, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.

Remarque 23– On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante *à partir d'un certain rang* s'il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que la suite $(u_n)_{n\geq n_1}$ est croissante.

Remarque 24– De façon générale, une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite satisfaire une propriété *à partir d'un certain rang* s'il existe un entier n_1 telle que la suite $(u_n)_{n\geq n_1}$ satisfait cette propriété.

La suite $(\cos(n))_{n>0}$ ne prend ses valeurs que dans $[-1,1]$. En revanche, la suite $(n)_{n\geq 0}$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes et la suite $(-\ln(n))_{n\geq 1}$ peut prendre des valeurs arbitrairement petite. On formalise ces notions.

Définition 25– Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.

1) *On dit qu'elle est* majorée *s'il existe un réel* M *tel que, pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq$* M.
2) *On dit qu'elle est* minorée *s'il existe un réel m tel que, pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \geq m$.*
3) *On dit qu'elle est* bornée *si elle est à la fois minorée et majorée.*

Remarque 26– Il faut remarquer qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel M tel que $-\mathrm{M} \leq u_n \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un réel M tel que $|u_n| \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$.

a) En effet, considérons une suite u bornée. Il existe m_0 et m_1 tels que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $m_0 \leq u_n \leq m_1$. Puisque $m_0 \geq -|m_0|$ et $m_1 \leq |m_1|$, on a donc $-|m_0| \leq u_n \leq |m_1|$ puis $-\max\{|m_0|,|m_1|\} \leq u_n \leq \max\{|m_0|,|m_1|\}$ pour tout $n \geq n_0$. En posant $\mathrm{M} = \max\{|m_0|,|m_1|\}$, on obtient $|u_n| \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$.

b) Réciproquement, supposons $|u_n| \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $-\mathrm{M} \leq u_n \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$. La suite u est donc minorée par $-$M et majorée par M. Elle est donc bornée.

b. Vous avez vu en *Mathématiques pour tous* que cela signifie que $f(x) \geq f(y)$ pour tous x et y tels que $x \geq y$

Exemple 27– La suite $u = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ est majorée par 1 (en effet elle est décroissante donc $u_n \leq u_0$ pour tout n, et $u_0 = 1$) et minorée par 0. Elle est donc bornée. Notons que 1 n'est pas le seul réel qui majore u, tout réel $M \geq 1$ majore u. De même, 0 n'est pas le seul réel qui minore u puisque tout réel $m \leq 0$ minore u

2 Limite d'une suite

2.1) Convergence vers une limite finie

L'objectif de cette partie est de rendre compte des situations où les valeurs d'une suite peuvent être rendues aussi proches que voulu d'un réel donné sans ne plus s'en éloigner.

Définition 28– Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite et ℓ un réel. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge *vers ℓ, ce qu'on note*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \textit{ou} \quad u_n \to \ell$$

si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

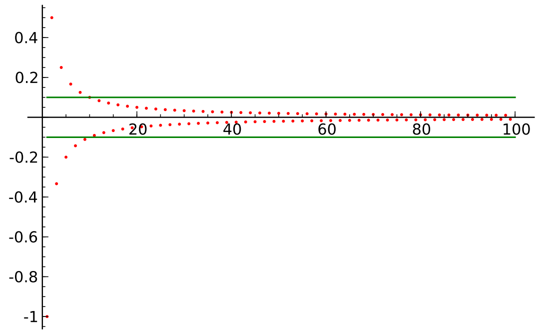
Imaginez que l'on trace dans un plan muni d'un repère orthonormal (Oxy) les couples (n, u_n) pour tout $n \geq n_0$. La définition de la convergence vers ℓ signifie que, quelque soit la bande horizontale choisie autour de la droite $y = \ell$, dès que n est assez grand, toutes les valeurs u_n sont confinées dans cette bande. On peut se reporter à la figure 1 pour une illustration de la définition.

Remarque 29– Pour dire qu'une suite converge vers ℓ, on dit aussi qu'elle tend vers ℓ ou qu'elle a pour *limite* ℓ. Une suite est dite *convergente* si elle converge vers un réel. Si une suite n'admet pas de limite réelle, on dit qu'elle diverge.

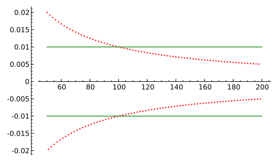
Exemple 30–

1) Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite stationnaire. Il existe un réel c et un entier $n_1 \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$ on a $u_n = c$. Montrons que la suite converge vers c. Ayant fixé $\varepsilon > 0$, on choisit $N = n_1 + 1$ et pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - c| = 0 \leq \varepsilon$.
   Toute suite stationnaire est donc convergente. Les exemples suivants montrent qu'il existe des suites convergentes qui ne sont pas stationnaires.
2) Montrons que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>0}$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit pour N le premier entier strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, c'est-à-dire $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Si $n \geq N$ on a alors $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$.
3) On généralise l'exemple précédent. Soit α un réel positif strictement positif. Montrons que la suite [c] $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n>0}$ tend vers 0.

c. On rappelle la définition vue en cours de *Mathématiques pour tous*. Pour tout $a > 0$ et tout réel x, on pose $a^x = e^{x\ln(a)}$.



(a) $\varepsilon = 0,1$, $N = 10$



(b) $\varepsilon = 0,01$, $N = 100$

FIGURE 1 – Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit pour N le premier entier strictement supérieur à $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$, c'est-à-dire $N = \left\lfloor \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha} \right\rfloor + 1$. Si $n \geq N$ on a alors $n \geq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$ puis $n^\alpha \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| \leq \varepsilon$.

Cet exemple montre en particulier que les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n>0}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n>0}$ tendent vers 0.

4) Soit q un réel tel que $|q| < 1$. Montrons que la suite $(q^n)_{n>0}$ tend vers 0.
Si $q = 0$, on a $q^n = 0$ pour tout $n > 0$; ayant fixé $\varepsilon > 0$, on choisit $N = 1$ et pour tout $n \geq N$, on a $|q^n - 0| = 0 \leq \varepsilon$.
Supposons donc $q \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour N, on choisit un entier qui soit à la fois strictement positif et supérieur à $\frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$, par exemple $N = \max\left(\left\lfloor \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} \right\rfloor + 1, 0\right)$. Si $n \geq N$, on a alors $n \geq \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. Puisque $|q| < 1$, on en déduit $n\ln|q| \leq \ln\varepsilon$ puis, en prenant l'exponentielle de cette égalité $|q|^n \leq \varepsilon$. Ainsi $|q^n - 0| \leq \varepsilon$.

5) Considérons la suite $\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$. On a

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

d'où

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et N un entier positif supérieur à $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, par exemple $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rfloor + 1$. Pour tout $n \geq N$ on a alors $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$. Ainsi, la suite $\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ converge vers 2.

***Proposition* 31–** *Si une suite converge vers un réel, ce réel est unique.*

Démonstration. Soit ℓ et ℓ' deux nombres réels et $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une suite dont on suppose qu'elle converge vers ℓ et ℓ'. Montrons qu'alors $\ell = \ell'$. Supposons, par l'absurde, que $\ell \neq \ell'$. On pose alors $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3}$ qui est un réel strictement positif. Puisque u converge vers ℓ, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Puisque u converge aussi vers ℓ', il existe un entier $N' \geq n_0$ tel que si $n \geq N'$ alors $|u_n - \ell'| \leq \varepsilon$. Pour tout $n \geq \max(N, N')$ on a donc

$$|\ell - \ell'| = \left|(u_n - \ell') - (u_n - \ell)\right| \leq |u_n - \ell'| + |u_n - \ell| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|.$$

Puisque $|\ell - \ell'| > 0$ on en déduit l'inégalité contradictoire $1 \leq \frac{2}{3}$. Ainsi $\ell = \ell'$. □

Exercice 32– On considère deux suites $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ et $v = (v_n)_{n\geq n_0}$. On suppose qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $u_n = v_n$ pout tout entier $n \geq n_1$. Montrer que si la suite u tend vers un réel ℓ, alors la suite v tend aussi vers ℓ.

Exercice 33– On considère une suite $u = (u_n)_{n\geq n_0}$.

a) i) On suppose que u tend vers le réel ℓ. Montrer que la suite $(u_n - \ell)_{n\geq n_0}$ tend vers 0 ;

ii) On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que la suite $(u_n - \ell)_{n\geq n_0}$ tend vers 0. Montrer que u tend vers ℓ.

b) i) On suppose que la suite u tend vers 0. Montrer que la suite $(|u|)_{n\geq n_0}$ tend vers 0.

ii) On suppose que la suite $(|u|)_{n\geq n_0}$ tend vers 0. Montrer que la suite u tend vers 0.

c) i) On suppose que u tend vers le réel ℓ. Montrer que la suite $(|u_n - \ell|)_{n\geq n_0}$ tend vers 0 ;

ii) On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que la suite $(|u_n - \ell|)_{n\geq n_0}$ tend vers 0. Montrer que u tend vers ℓ.

Remarque 34– On considère une suite $u = (u_n)_{n\geq n_0}$. Si u converge vers un réel ℓ. Montrons qu'alors, la suite $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ converge vers $|\ell|$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Or, pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|$$

(voir le chapitre *Nombres*, Proposition 13). On en déduit que, pour tout $n \geq N$, on a $||u_n| - |\ell|| \leq \varepsilon$. La suite $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ converge donc vers $|\ell|$.
⚠La réciproque n'est pas vraie. Nous allons montrer que si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq n_0$, alors la suite $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ converge vers 1 alors que la suite u n'a pas de limite. Que la suite $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ converge vers 1 est évident puisque c'est la suite constante égale à 1. Supposons, par l'absurde, que u converge vers le réel ℓ. On applique alors la définition de cette convergence avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$. On obtient un entier $N \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $|(-1)^n - \ell| \leq \frac{1}{2}$. En particulier, choisissant $n = 2N$, on a $|1 - \ell| \leq \frac{1}{2}$

puis, choisissant $n = 2\mathrm{N}+1$, on a $|1+\ell| \leq \frac{1}{2}$. Puisque $2 = |(1-\ell)+(1+\ell)|$, on en déduit l'inégalité contradictoire

$$2 \leq |1-\ell| + |1+\ell| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

La suite u ne peut donc pas avoir de limite finie.

Cette unicité de la limite permet de définir des nombres comme limite de suites (voir l'exemple 84).

***Proposition* 35–** *Toute suite convergeant vers un réel est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition de la convergence, avec le choix $\varepsilon = 1$, il existe un entier $\mathrm{N} \geq n_0$ tel que si $n \geq \mathrm{N}$ alors $|u_n - \ell| \leq 1$. Lorsque n parcourt l'ensemble fini $\{n_0, \ldots, \mathrm{N}-1\}$, l'ensemble des valeurs prises par $|u_n - \ell|$ est fini. On peut donc définir

$$\alpha = \max\{|u_n - \ell| \colon n \in \{n_0, \ldots, \mathrm{N}-1\}\}$$

puis $\mathrm{M} = \max(1, \alpha)$. Ainsi, $|u_n - \ell| \leq \mathrm{M}$ pour tout entier $n \geq n_0$. On en déduit que $\ell - \mathrm{M} \leq u_n \leq \ell + \mathrm{M}$ pour tout entier $n \geq n_0$. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est donc bornée. □

⚠Il existe des suites bornées qui ne sont pas convergentes. On a montré à la remarque 34 que la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ ne converge pas. Elle est cependant bornée puisqu'elle ne prend que les valeurs -1 et 1.

Il est souvent un peu pénible de calculer la limite d'une suite en utilisant directement la définition. Une autre façon de procéder est de disposer d'un ensemble de suites de références (dont on connaît la limite) et de connaître le comportement des suites lorsqu'on applique des opérations à cet ensemble de suites de références.

***Théorème* 36–** *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ avec ℓ et ℓ' réels. Alors*

1) $u_n + v_n \to \ell + \ell'$;
2) *si λ est un réel,* $\lambda u_n \to \lambda \ell$;
3) $u_n v_n \to \ell \ell'$;
4) *si $\ell \neq 0$, il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que la suite* $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq n_1}$ *est définie et*

$$\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ, il existe un entier $N_1 \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq N_1$ on a $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque $(v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ', il existe un entier $N_2 \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq N_2$ on a $|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geq N$ alors
$$\left|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\right| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
On en déduit que $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $\ell + \ell'$.
2) Si $\lambda = 0$, la suite $(\lambda u_n)_{n\geq n_0}$ est la suite constante nulle, elle admet donc $0 = 0\cdot\ell$ pour limite.
Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on a alors $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$. Puisque $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Pour tout entier $n \geq N$ on a donc $|\lambda u_n - \lambda\ell| = |\lambda||u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ceci montre que $\lambda u_n \to \lambda\ell$.
3) Pour tout $n \geq n_0$, on remarque que
$$u_n v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + (v_n - \ell')\ell$$
d'où l'on déduit
$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq |u_n - \ell|\cdot|v_n| + |v_n - \ell'|\cdot|\ell|.$$
La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, elle est donc bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|v_n| \leq M$. On a donc
$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq |u_n - \ell|\cdot M + |v_n - \ell'|\cdot|\ell|.$$
Soit $\varepsilon > 0$, on a $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$. Puisque $u_n \to \ell$, il existe $N_1 \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq N_1$ on a
$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$
Ainsi
$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |v_n - \ell'|\cdot|\ell|$$
pour tout $n \geq N_1$.
Si $\ell = 0$, on en déduit
$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$
pour tout $n \geq N_1$ et donc $u_n v_n \to \ell\ell'$.
Supposons maintenant $\ell \neq 0$. On a $\frac{\varepsilon}{2|\ell|} > 0$. Puisque $v_n \to \ell'$, il existe $N_2 \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq N_2$ on a
$$|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2|\ell|}.$$
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a donc
$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2|\ell|}|\ell| = \varepsilon$$
puis $u_n v_n \to \ell\ell'$.

4) Nous commençons par montrer qu'il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_1$. Puisque $\ell \neq 0$, on peut choisir $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2}$ dans la définition de $u_n \to \ell$. On obtient alors un entier $n_1 \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq n_1$ on a $|u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2}$, c'est-à-dire
$$\ell - \frac{|\ell|}{2} \leq u_n \leq \ell + \frac{|\ell|}{2}. \tag{1}$$
Si $\ell < 0$, alors $\ell + \frac{|\ell|}{2} = \frac{\ell}{2} < 0$ et donc $u_n < 0$ pour tout $n \geq n_1$. Si $\ell > 0$, alors $\ell - \frac{|\ell|}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$ et donc $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_1$. Dans les deux cas $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_1$. La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_1}$ est donc définie.

Montrons maintenant la deuxième partie de l'énoncé : $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$. Pour tout $n \geq n_1$ on a
$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|\ell| \cdot |u_n|}.$$
Si $\ell < 0$, l'inégalité de droite de l'encadrement (1) conduit à $u_n \leq \frac{\ell}{2} = -\frac{|\ell|}{2} < 0$ donc $|u_n| = -u_n \geq \frac{|\ell|}{2}$. Si $\ell > 0$, l'inégalité de gauche de l'encadrement (1) conduit à $u_n \geq \frac{\ell}{2} = \frac{|\ell|}{2} > 0$ donc $|u_n| = u_n \geq \frac{|\ell|}{2}$. Dans les deux cas, on a $|u_n| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0$ puis
$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \frac{2}{|\ell|^2}|u_n - \ell|$$
pour tout $n \geq n_1$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \to \ell$, il existe $n_2 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_2$ on a $|u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|^2}{2}\varepsilon$. Posons $\mathrm{N} = \max(n_1, n_2)$. Pour tout $n \geq \mathrm{N}$ on a
$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \frac{2}{|\ell|^2} \cdot \frac{|\ell|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$
On en déduit que $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.

□

Exemple 37– Considérons la suite $u = \left(\frac{2n+3}{7n+1}\right)_{n \geq 0}$. Pour tout entier $n > 0$, on a
$$\frac{2n+3}{7n+1} = \frac{2+3/n}{7+1/n}.$$
On a vu que $\dfrac{1}{n} \to 0$ et que la suite constante de terme général 3 tend vers 3. Le point 2) du théorème 36 implique donc que $\dfrac{3}{n} \to 0$. La suite constante de terme général 2 tend vers 2. Grâce au point 1) on a alors $2 + \dfrac{3}{n} \to 2$. De même, $7 + \dfrac{1}{n} \to 7$. Puisque $7 \neq 0$ on déduit du point 4) que $\dfrac{1}{7+1/n} \to \dfrac{1}{7}$. Enfin, utilisant le point 3) on obtient
$$\frac{2+3/n}{7+1/n} \to \frac{2}{7}.$$

Exemple 38– Soit a et b deux réels. On considère une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ convergeant vers une limite réelle $\ell \neq -b$. Grâce au point 4) du théorème 36, il existe un entier n_1 tel que la suite

$$\left(\frac{u_n+a}{u_n+b}\right)_{n\geq n_1}$$

est définie. Grâce au point 1) on a $u_n+a \to \ell+a$ et $u_n+b \to \ell+b$. Grâce au point 4) on a $\dfrac{1}{u_n+b} \to \dfrac{1}{\ell+b}$. Enfin, grâce au point 3) on obtient

$$\frac{u_n+a}{u_n+b} \to \frac{\ell+a}{\ell+b}.$$

Corollaire 39– *Toute suite géométrique de raison q telle que $|q|<1$ converge vers 0.*

Démonstration. Considérons une suite géométrique $u = \left(u_{n_0}q^{n-n_0}\right)_{n\geq n_0}$.

Si $q=0$, on a $u_n = 0$ dès que $n \geq n_0+1$ et donc u tend vers 0.

Supposons alors $q \neq 0$. On a

$$u_n = \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}q^n$$

pour tout $n \geq n_0$. D'après l'exemple 30, $q^n \to 0$ donc $u_n \to 0$. □

Remarque 40– Les points 1) et 2) du théorème 36 montrent que le sous-ensemble $\mathcal{U}^*_{n_0}$ de $\mathcal{U}_{n_0}$ constitué des suites convergentes :

$$\mathcal{U}^*_{n_0} = \left\{(u_n)_{n\geq n_0} \in \mathcal{U}_{n_0} : \text{il existe un réel } \ell \text{ tel que } u_n \to \ell\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}_{n_0}$. En revanche, ayant fixé un réel ℓ, le sous-ensemble $\mathcal{U}^\ell_{n_0}$ de $\mathcal{U}_{n_0}$ constitué des suites admettant ℓ pour limite :

$$\mathcal{U}^\ell_{n_0} = \left\{(u_n)_{n\geq n_0} \in \mathcal{U}_{n_0} : u_n \to \ell\right\}$$

n'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}_{n_0}$ que si $\ell = 0$. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{U}^*_{n_0}$ et $\mathcal{U}^0_{n_0}$ ne sont pas de dimension finie (voir l'annexe A).

2.2) Limite infinie

Définition 41– *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$* tend *vers $+\infty$, ce qu'on note*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad ou \quad u_n \to +\infty$$

si, pour tout réel M, il existe un entier $\mathrm{N} \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$, on a $u_n \geq \mathrm{M}$.

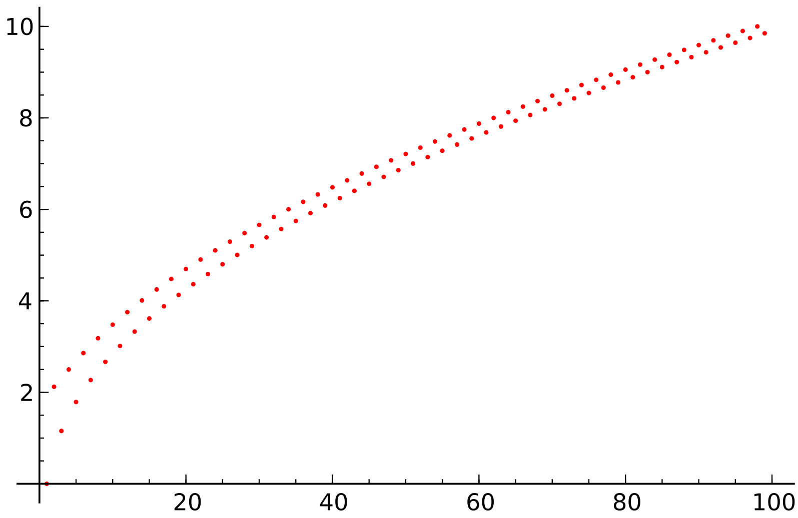


Figure 2 – Une suite non croissante de limite $+\infty$, la suite $\left(\sqrt{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$.

Imaginez que l'on trace dans un plan muni d'un repère orthonormal (Oxy) les couples (n, u_n) pour tout $n \geq n_0$. La définition de la convergence vers $+\infty$ signifie que, quelque soit la droite horizontale choisie, dès que n est assez grand, toutes les valeurs u_n sont au dessus cette droite. On peut se reporter à la figure 2 pour une illustration de la définition.

Remarque 42– Pour dire qu'une suite tend vers $+\infty$, on dit aussi qu'elle admet $+\infty$ comme limite.

On a une notion identique pour les suites devenant de plus en plus négatives.

Définition 43– *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$* tend *vers $-\infty$, ce qu'on note*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \text{ou} \quad u_n \to -\infty$$

si, pour tout réel m, il existe un entier $\mathrm{N} \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$, on a $u_n \leq m$.

Imaginez que l'on trace dans un plan muni d'un repère orthonormal (Oxy) les couples (n, u_n) pour tout $n \geq n_0$. La définition de la convergence vers $-\infty$ signifie que, quelque soit la droite horizontale choisie, dès que n est assez grand, toutes les valeurs u_n sont au dessous cette droite.

Remarque 44– Pour dire qu'une suite tend vers $-\infty$, on dit aussi qu'elle admet $-\infty$ comme limite.

Remarque 45– Il faut prendre garde que l'expression « la suite u diverge » signifie que la suite u n'a pas de limite réelle. Cela peut donc signifier trois choses : soit que le suite

u tend vers $+\infty$, soit qu'elle tend vers $-\infty$, soit qu'elle n'a pas de limite ni réelle ou infinie.

Remarque 46– Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $-\infty$.

Exemple 47–

1) Si $q > 1$, montrons que la suite $(q^n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Si $M \leq 0$, alors pour tout $n \geq n_0$ on a $q^n > 0 \geq M$. Si $M > 0$, on choisit pour N un entier supérieur à $\dfrac{\ln M}{\ln q}$, par exemple $N = \left\lfloor \dfrac{\ln M}{\ln q} \right\rfloor + 1$. Pour $n \geq N$, et puisque $q > 1$, on a alors $q^n \geq M$.
2) Si $\alpha > 0$, montrons que la suite $(n^\alpha)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Si $M \leq 0$, alors pour tout $n \geq n_0$ on a $n^\alpha > 0 \geq M$. Si $M > 0$, on choisit pour N un entier supérieur à $M^{1/\alpha}$, par exemple $N = \left\lfloor M^{1/\alpha} \right\rfloor + 1$. Pour $n \geq N$ on a alors $n^\alpha \geq M$.

Le résultat suivant généralise la proposition 31.

***Proposition* 48–** *Si une suite admet pour limite un réel, $-\infty$ ou $+\infty$, cette limite est unique.*

Démonstration. On considère une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ puis ℓ et ℓ' deux limites de cette suite. On distingue différents cas.

1) Si ℓ et ℓ' sont réels, la proposition 31 implique que $\ell = \ell'$.
2) Supposons $\ell \in \{-\infty, +\infty\}$. Grâce aux définitions de $u_n \to +\infty$ et $u_n \to -\infty$, pour tout M, il existe N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n| \geq M$. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'est donc pas bornée. Elle ne peut donc pas converger vers un réel. Ainsi, $\ell' \in \{-\infty, +\infty\}$.
   a) Supposons $\ell = +\infty$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $u_n \geq 1$. Supposons par l'absurde que $\ell' = -\infty$. Il existe alors N' tel que pour tout $n \geq N'$ on a $u_n \leq -1$. On obtient une contradiction dès que $n \geq \max(N, N')$ de sorte que nécessairement $\ell' = +\infty$.
   b) Si $\ell = -\infty$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $u_n \leq -1$. Supposons par l'absurde que $\ell' = +\infty$. Il existe alors N' tel que pour tout $n \geq N'$ on a $u_n \geq 1$. On obtient une contradiction dès que $n \geq \max(N, N')$ de sorte que nécessairement $\ell' = -\infty$.

□

Exercice 49–

1) Montrer que si une suite tend vers $+\infty$, elle n'est pas majorée.
2) Montrer que si une suite tend vers $-\infty$, elle n'est pas minorée.

On généralise aussi les résultats des opérations sur les limites.

***Proposition* 50** (Produit externe et limites)– *Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On suppose que* $u_n \to \ell$ *avec* $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

i) si $\ell \in \mathbb{R}$ *alors* $\lambda u_n \to \lambda\ell$ *;*

ii) si $\ell = +\infty$ *alors* $\lambda u_n \to \begin{cases} -\infty & si\ \lambda < 0 \\ 0 & si\ \lambda = 0\ ; \\ +\infty & si\ \lambda > 0 \end{cases}$

iii) si $\ell = -\infty$ *alors* $\lambda u_n \to \begin{cases} +\infty & si\ \lambda < 0 \\ 0 & si\ \lambda = 0 \\ -\infty & si\ \lambda > 0 \end{cases}$

Démonstration.

i) C'est le point 2) du théorème 36.

ii) On suppose $u_n \to +\infty$.

  a) Supposons $\lambda < 0$. Soit $m \in \mathbb{R}$. Comme $u_n \to +\infty$, il existe N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a $u_n \geq \frac{m}{\lambda}$. Puisque $\lambda < 0$, on en déduit que si $n \geq \mathrm{N}$ alors $\lambda u_n \leq m$.

  b) Supposons $\lambda = 0$. La suite $(\lambda u_n)_{n\geq n_0}$ est la suite constante nulle. Elle admet donc 0 comme limite.

  c) Supposons $\lambda > 0$. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$. On a $u_n \to +\infty$ donc il existe N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a $u_n \geq \frac{\mathrm{M}}{\lambda}$. Puisque $\lambda > 0$, on en déduit que si $n \geq \mathrm{N}$ alors $\lambda u_n \geq \mathrm{M}$.

iii) On suppose $u_n \to -\infty$. En utilisant la remarque 46, on voit que $-u_n \to +\infty$. En appliquant le point ii) à la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$, on trouve que $-\lambda u_n \to -\infty$ si $\lambda < 0$, que $-\lambda u_n \to 0$ si $\lambda = 0$ et $-\lambda u_n \to +\infty$ si $\lambda > 0$. Il reste alors à appliquer de nouveau la remarque 46 pour obtenir la limite de $\lambda(u_n)_{n\geq n_0}$.

□

Lorsque nous marquerons IND (pour *indéterminé*), cela signifie qu'il n'y a pas de résultat général applicable à toutes les suites. Il faut alors utiliser une méthode adaptée à chaque cas particulier.

***Proposition* 51** (Somme et limites)– *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ avec $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et $\ell' \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Le tableau ci-dessous résume les limites éventuelles de $(u_n)_{n\geq n_0} + (v_n)_{n\geq n_0}$ en fonction des valeurs de ℓ et ℓ'.*

ℓ \ ℓ'	$-\infty$	$\in\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*IND*
$\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	*IND*	$+\infty$	$+\infty$

Remarque 52– Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$, on ne peut pas prévoir la limite de $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ sans étude spécifique, ainsi qu'on le voit en considérant les exemples suivants.

- Si $u_n = n$ et $v_n = -n/2$ pour tous n alors $u_n + v_n \to +\infty$;
- si $u_n = n$ et $v_n = -2n$ pour tous n alors $u_n + v_n \to -\infty$;
- soit α un réel quelconque, si $u_n = n + \alpha/2$ et $v_n = -n + \alpha/2$ pour tous n alors $u_n + v_n \to \alpha$;
- si $u_n = n$ et $v_n = -n+(-1)^n$, alors $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ n'a pas de limite (voir l'exemple 86).

Démonstration de la proposition 51.

i) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' = -\infty$. Soit m réel. Il existe N_1 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_1$ on a $u_n \leq m/2$ et N_2 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_2$ on a $v_n \leq m/2$. Posons $\mathrm{N} = \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$. Pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a $u_n + v_n \leq m$.

ii) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. Soit m réel. La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est bornée donc en particulier majorée. Il existe donc C tel que, pour tout n on a $v_n \leq \mathrm{C}$. Il existe par ailleurs N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$ on a $u_n \leq m - \mathrm{C}$. Finalement, pour tout $n \geq \mathrm{N}$ on a $u_n + v_n \leq m$.

iii) Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = -\infty$. On raisonne comme précédemment en échangeant les notations ℓ et ℓ'.

iv) Si ℓ et ℓ' sont réelles, le résultat est le point 1) du théorème 36.

v) Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = +\infty$. Soit M réel. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée, donc en particulier minorée. Il existe donc C tel que, pour tout n on a $u_n \geq \mathrm{C}$. Il existe par ailleurs N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$ on a $v_n \geq \mathrm{M} - \mathrm{C}$. Pour tout $n \geq \mathrm{N}$ on a donc $u_n + v_n \geq \mathrm{M}$.

vi) Si $\ell = +\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. On raisonne comme précédemment en échangeant les notations ℓ et ℓ'.

vii) Si $\ell = +\infty$ et $\ell' = +\infty$. Soit M réel. Il existe N_1 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_1$ on a $u_n \geq \mathrm{M}/2$ et N_2 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_2$ on a $v_n \geq \mathrm{M}/2$. Posons $\mathrm{N} = \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$. Pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a $u_n + v_n \geq \mathrm{M}$.

□

Exercice 53– Prouver les points v) à vii) de la proposition 51 en utilisant les points i) à iii) et la remarque 46.

Exemple 54– Les suites arithmétiques de raison strictement positive tendent vers $+\infty$. Les suites arithmétiques de raison strictement négative tendent vers $-\infty$. Les suites arithmétiques sont en effet de la forme $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$ pour tout $n \geq n_0$.

***Proposition* 55** (Produit et limites)– *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Le tableau ci-dessous résume les limites éventuelles de la suite produit $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ en fonction des valeurs de ℓ et ℓ'.*

ℓ \ ℓ'	$-\infty$	< 0	0	> 0	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND	$-\infty$	$-\infty$
< 0	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
0	IND	0	0	0	IND
> 0	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	IND	$+\infty$	$+\infty$

Remarque 56– Si une suite tend vers 0 et une autre vers $-\infty$ ou $+\infty$, on ne peut pas prévoir la limite de leur produit sans étude spécifique. On le voit en considérant les exemples suivants.

- ➡ Soit α un réel non nul quelconque, si $u_n = 1/(\alpha n)$ et $v_n = \alpha^2 n$ pour tous n alors $u_n v_n \to \alpha$;
- ➡ si $u_n = 1/n^2$ et $v_n = n$ pour tous n alors $u_n v_n \to 0$;
- ➡ si $u_n = 1/n$ et $v_n = n^2$ pour tous n alors $u_n v_n \to +\infty$;
- ➡ si $u_n = -1/n$ et $v_n = n^2$ pour tous n alors $u_n v_n \to -\infty$;
- ➡ si $u_n = (-1)^n/n$ et $v_n = n$, alors $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ n'a pas de limite (voir l'exemple 86).

Démonstration de la proposition 55. On ne traite que les cas non déjà traités et on s'autorise à permuter les suites pour se ramener à un cas déjà démontré.

i) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' = -\infty$. Soit M un réel. Il existe N_1 tel que, pour tout $N \geq N_1$ on a $u_n \leq -\sqrt{|M|}$. Il existe N_2 tel que, pour tout $N \geq N_2$ on a $v_n \leq -\sqrt{|M|}$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a $u_n v_n \geq |M|$ et donc $u_n v_n \geq M$.

ii) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}^{-*}$. En utilisant la définition de la convergence $v_n \to \ell'$ avec $\varepsilon = -\ell'/2 > 0$, on trouve N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ on a

$$\frac{\ell'}{2} \leq v_n - \ell' \leq -\frac{\ell'}{2}$$

et donc

$$v_n \leq \ell'/2. \tag{2}$$

Puisque $u_n \to -\infty$, si M est un réel, il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$ on a

$$u_n \leq 2|M|/\ell'. \tag{3}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, les inégalités (2) et (3) sont valides et concernent des nombres négatifs. Pour tout $n \geq N$, on a donc $u_n v_n \geq |M|$ et donc $u_n v_n \geq M$.

iii) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$. Le théorème 36 implique que $-v_n \to -\ell' < 0$. D'après le ii), on a $u_n(-v_n) \to +\infty$. Mais puisque $u_n(-v_n) = -(u_n v_n)$, la proposition 50 permet de déduire $u_n v_n \to -\infty$.

iv) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' = +\infty$. La proposition 50 implique que $-v_n \to -\infty$. D'après le i), on a $u_n(-v_n) \to +\infty$. Mais puisque $u_n(-v_n) = -(u_n v_n)$, la proposition 50 permet de déduire $u_n v_n \to -\infty$.

v) Si $\ell < 0$ et $\ell' = +\infty$. On a alors $-v_n \to -\infty$. Grâce à ii) on en déduit $-u_n v_n \to +\infty$ et donc $u_n v_n \to -\infty$.

vi) Si $\ell > 0$ et $\ell' = +\infty$. On a alors $-v_n \to -\infty$. Grâce à iii) on en déduit $-u_n v_n \to -\infty$ et donc $u_n v_n \to +\infty$.

vii) Si $\ell = +\infty$ et $\ell' = +\infty$. On a alors $-u_n \to -\infty$ et $-v_n \to -\infty$. Puisque $(-u_n)(-v_n) = u_n v_n$ on en déduit $u_n v_n \to +\infty$.

$\square$

***Proposition* 57** (Inverse et limites)– *Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. On suppose que $u_n \to \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

i) si ℓ est réel et non nul alors il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_1}$ est définie et $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{\ell}$;

ii) si $\ell = 0$ et s'il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, on a $u_n > 0$ alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$;

iii) si $\ell = 0$ et s'il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, on a $u_n < 0$ alors $\frac{1}{u_n} \to -\infty$;

iv) si $\ell = -\infty$ ou $\ell = +\infty$ alors il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_1}$ est définie et $\frac{1}{u_n} \to 0$.

Remarque 58– La proposition 57 ne dit rien si $u_n \to 0$ sans garder le même signe à partir d'un certain rang (c'est-à-dire si elle change de signe une infinité de fois). Dans ce cas, et si de plus la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_1, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_1}$ n'a pas de limite. Supposons en effet que $(u_n)_{n \geq n_0}$ tende vers 0 et que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_1$. Supposons aussi que, pour tout $\mathrm{N} \geq n_1$, il existe $n_2 \geq \mathrm{N}$ et $n_3 \geq \mathrm{N}$ tels que $u_{n_2} > 0$ et $u_{n_3} < 0$. Puisque $|u_n| \to 0$, le point ii) de la proposition 57 implique $\frac{1}{|u_n|} \to +\infty$. La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ n'est alors pas bornée. Si elle admet une limite, celle-ci ne peut être que $-\infty$ ou $+\infty$. En particulier que toutes ses valeurs à partir d'un certain rang sont de signe constant. Ce n'est pas le cas.

Démonstration de la proposition 57.

i) C'est le point 4) du théorème 36.

ii) Soit M un réel. Si $M \leq 0$, on a $\dfrac{1}{u_n} \geq M$ pour tout $n \geq n_1$. Supposons $M > 0$. Puisque $u_n \to 0$, il existe N_1 tel que si $n \geq N_1$ alors $|u_n| \leq \dfrac{1}{M}$. Posons $N = \max(n_1, N_1)$. Si $n \geq N$ alors $0 < u_n \leq \dfrac{1}{M}$ et donc $\dfrac{1}{u_n} \geq M$.

iii) Soit M un réel. Si $M \geq 0$, on a $\dfrac{1}{u_n} \leq M$ pour tout $n \geq n_1$. Supposons $M < 0$. Puisque $u_n \to 0$, il existe N_1 tel que si $n \geq N_1$ alors $|u_n| \leq -\dfrac{1}{M}$. Posons $N = \max(n_1, N_1)$. Si $n \geq N$ alors $0 < |u_n| \leq -\dfrac{1}{M}$ et $u_n < 0$ donc $\dfrac{1}{u_n} \leq M$.

iv) Que ℓ soit $-\infty$ ou $+\infty$, la suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$. On en déduit que pour tout $n \geq \max(n_1, N)$ on a $\dfrac{1}{|u_n|} \leq \varepsilon$.

□

Exemple 59– On considère deux entiers d et d' strictement positifs puis des réels $a_0, \ldots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ et des réels $b_0, \ldots, b_{d'}$ avec $b_{d'} \neq 0$. Pour tout $n > 0$, on écrit

$$b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'} = \left(\frac{b_0}{n^{d'}} + \frac{b_1}{n^{d'-1}} + \ldots + b_{d'} \right) n^{d'}.$$

Cette quantité tend vers $+\infty$ si $b_{d'} > 0$ et vers $-\infty$ si $b_{d'} < 0$. Dans le cas où $b_{d'} > 0$, il existe donc n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ on a $b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'} > 1$. De même, dans le cas où $b_{d'} < 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ on a $b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'} < -1$. Dans les deux cas, il existe $n_0 > 0$ tel que $b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'} \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi peut-on définir la suite

$$\left(\frac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_d n^d}{b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'}} \right)_{n \geq n_0}.$$

Pour tout $n \geq n_0$, on écrit

$$\frac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_d n^d}{b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'}} = \frac{n^d}{n^{d'}} \cdot \frac{\frac{a_0}{n^d} + \frac{a_1}{n^{d-1}} + \ldots + a_d}{\frac{b_0}{n^{d'}} + \frac{b_1}{n^{d'-1}} + \ldots + b_{d'}}.$$

Puisque

$$\frac{\frac{a_0}{n^d} + \frac{a_1}{n^{d-1}} + \ldots + a_d}{\frac{b_0}{n^{d'}} + \frac{b_1}{n^{d'-1}} + \ldots + b_{d'}} \to \frac{a_d}{b_{d'}}$$

on obtient

$$\frac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_d n^d}{b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'}} \to \begin{cases} 0 & \text{si } d < d' \\ \dfrac{a_d}{b_{d'}} & \text{si } d = d' \\ +\infty & \text{si } d > d' \text{ et si } a_d \text{ et } b_{d'} \text{ ont même signe} \\ -\infty & \text{si } d > d' \text{ et si } a_d \text{ et } b_{d'} \text{ sont de signes opposés.} \end{cases}$$

3 Comparaisons de suites

3.1) Inégalités et limites

***Proposition* 60–** *Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites. On suppose qu'il existe N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a $u_n \leq v_n$. Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ où ℓ et ℓ' sont tous deux réels, alors $\ell \leq \ell'$.*

⚠ Le théorème ne concerne que des inégalités larges. Définissons deux suites u et v en posant $u_n = 1/n$ et $v_n = 2/n$ pour tout entier $n > 0$. On a $u_n < v_n$ pour tout $n > 0$ mais $\lim u_n = \lim v_n$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant $\ell' < \ell$. On pose alors $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{3} > 0$. Il existe N_1 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_1$ on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$, soit encore

$$\frac{2\ell + \ell'}{3} \leq u_n \leq \frac{4\ell - \ell'}{3}. \tag{4}$$

De même, il existe N_2 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_2$ on a $|v_n - \ell'| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\frac{4\ell' - \ell}{3} \leq v_n \leq \frac{2\ell' + \ell}{3}. \tag{5}$$

Des inégalités (4) et (5), on déduit que si $n \geq \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$ alors

$$u_n \geq \frac{2\ell + \ell'}{3} = \frac{\ell + \ell + \ell'}{3} > \frac{\ell + 2\ell'}{3} \geq v_n.$$

Pour $n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$, on obtient l'encadrement contradictoire $v_n < u_n \leq v_n$. □

La proposition précédente ne permet pas de dire si une suite admet une limite mais seulement de comparer des limites. Le théorème d'encadrement sert lui à prouver l'existence d'une limite de suite.

***Théorème* 61** (Théorème d'encadrement)**–** *Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$, $(v_n)_{n \geq n_0}$ et $(w_n)_{n \geq n_0}$ trois suites. On suppose qu'il existe N_0 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_0$, on a*

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(w_n)_{n \geq n_0}$ admettent la même limite réelle ℓ, alors $v_n \to \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$ on a

$$-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon$$

et N_2 tel que, pour tout $n \geq N_2$ on a

$$-\varepsilon \leq w_n - \ell \leq \varepsilon.$$

Soit $N = \max(N_0, N_1, N_2)$. Si $n \geq N$, on a

$$-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell \leq \varepsilon$$

et donc $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

Exemple 62– On considère la suite $u = \left(\frac{\cos n}{n}\right)_{n\geq 1}$. Pour tout n on a

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Or on sait que $-1/n \to 0$ et $1/n \to 0$ donc $u_n \to 0$.

Exercice 63– Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. On suppose qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $|u_n| \leq v_n$ pour tout $n \geq n_1$. Enfin, on suppose que $v_n \to 0$. Montrer que $u_n \to 0$.

Exemple 64– Nous allons montrer que si α est un réel strictement positif alors

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \to 1.$$

Pour cela, grâce au théorème d'encadrement, il suffit d'encadrer $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha$ par les termes généraux deux suites de limite 1. Puisque $\alpha > 0$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \geq 1$$

pour tout $n \geq 1$. De $\alpha \leq \lfloor \alpha \rfloor + 1$, on déduit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$$

où $k = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ est un entier strictement positif. La suite $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k\right)_{n>0}$ est le produit de k suites qui tendent vers 1, elle tend donc vers 1. On a donc encadré $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k\right)_{n>0}$ par deux suites de limite 1 d'où le résultat.

L'équivalent du théorème d'encadrement pour les limites infinies est le suivant.

Proposition 65– *Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *deux suites. On suppose qu'il existe* N_0 *tel que, pour tout* $n \geq \mathrm{N}_0$*, on a* $u_n \leq v_n$*.*

1) *Si* $u_n \to +\infty$ *alors* $v_n \to +\infty$*.*
2) *Si* $v_n \to -\infty$ *alors* $u_n \to -\infty$*.*

Démonstration.

1) Soit M un réel. Il existe N_1 tel que si $n \geq \mathrm{N}_1$ alors $u_n \geq \mathrm{M}$. Soit $\mathrm{N} = \max(\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1)$. On a $v_n \geq u_n \geq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$.
2) Soit m un réel. Il existe N_1 tel que si $n \geq \mathrm{N}_1$ alors $v_n \leq m$. Soit $\mathrm{N} = \max(\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1)$. On a $v_n \leq u_n \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$.

□

Exemple 66– Considérons la suite $(n + \cos n)_{n\geq 0}$. Pour tout n, on a $n - 1 \leq n + \cos n$. Puisque $n - 1 \to +\infty$, on en déduit $n + \cos n \to +\infty$.

3.2) Croissance polynômiale et croissance exponentielle

L'objectif de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Théorème 67– *Si* α *est un réel strictement positif et si* r *est un réel strictement supérieur à* 1 *alors*

$$\frac{n^\alpha}{r^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_n = n^\alpha / r^n$ pour tout entier naturel n. Pour tout $n \geq 1$ on a alors $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

Puisque $r > 1$ on peut choisir $\varepsilon = \frac{r-1}{2} > 0$ dans la définition de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \to 1$ (voir l'exemple 64). On obtient alors l'existence d'un entier $n_0 \geq 1$ tel que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \leq 1 + \varepsilon = \frac{r+1}{2}$$

pour tout $n \geq n_0$. On a alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \leq \frac{r+1}{2r} < 1$$

pour tout $n \geq n_0$. Par récurrence il suit

$$u_n \leq \left(\frac{r+1}{2r}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$$

pour tout $n \geq n_0$. Enfin, puisque $(r+1)/(2r) < 1$, on a

$$\left(\frac{r+1}{2r}\right)^{n-n_0} u_{n_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, on déduit du théorème d'encadrement qu'elle tend vers 0. □

Exemple 68– On a

$$\frac{2^n + n^7}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n^7}{3^n}.$$

Puisque $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, on a $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$. Par ailleurs, $\frac{n^7}{3^n} \to 0$ donc

$$\frac{2^n + n^7}{3^n} \to 0.$$

3.3) Approximation décimale des nombres réels

Soit a un nombre réel. L'objet de cette partie est d'en donner des approximations décimales. Un nombre décimal est un nombre rationnel qui n'a qu'un nombre fini de chiffres décimaux.

Exercice 69– Soit x un nombre réel. Montrer qu'il est décimal si et seulement s'il existe un entier relatif k et un entier naturel n tel que $x = \frac{x}{10^n}$.

Nous allons approcher le nombre réel a par des nombres décimaux. On définit une suite $\mathrm{A}(a) = (\mathrm{A}_n(a))_{n\geq 0}$ en posant

$$\mathrm{A}_n(a) = \frac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 70– Donner les valeurs de $\mathrm{A}_n(\pi)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

La définition de la partie entière implique $\lfloor 10^n a \rfloor \leq 10^n a < \lfloor 10^n a \rfloor + 1$. On a donc

$$10^n a - 1 < \lfloor 10^n a \rfloor \leq 10^n a$$

et donc

$$a - \frac{1}{10^n} < \mathrm{A}_n(a) \leq a \tag{6}$$

pour tout $n \geq 0$. Grâce au théorème d'encadrement, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n(a) = a.$$

les termes de la suite $\mathrm{A}_(a)$ étant tous des nombres décimaux, on dit que cette est une *approximation décimale* du nombre réel a. De plus, l'encadrement (6) implique

$$\mathrm{A}_n(a) < a \leq \mathrm{A}_n(a) + \frac{1}{10^n}$$

pour tout $n \geq 0$. On dit que chaque terme $\mathrm{A}_n(a)$ est une valeur approchée par défaut de a à 10^{-n} près.

Définition 71– Soit a un nombre réel et ε un réel positif. Un réel x est

1) *une* valeur approchée *de a à ε près si $x-\varepsilon \leq a \leq x+\varepsilon$;*
2) *une* valeur approchée par défaut *de a à ε près si $x \leq a \leq x+\varepsilon$;*
3) *une* valeur approchée par excès *de a à ε près si $x-\varepsilon \leq a \leq x$.*

On montre ensuite que les valeurs approchées de a données par les termes successifs de $A(a)$ sont de plus en plus précises ou, ce qui revient au même, que la suite $A(a)$ est croissante. Pour tout nombre réel x, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$ et donc $10\lfloor x \rfloor \leq 10x$. Le nombre $10\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur à $10x$ et, le nombre $\lfloor 10x \rfloor$ le plus grand entier inférieur à $10x$. On a donc $10\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 10x \rfloor$. Choisissant $x = 10^n a$, on trouve

$$\lfloor 10^n a \rfloor \leq \frac{\lfloor 10^{n+1} a \rfloor}{10}$$

puis, après division par 10^n, on obtient $A_n(a) \leq A_{n+1}(a)$ pour tout $n \geq 0$. La suite $A(a)$ est donc croissante.

Remarque 72– Soit a un nombre réel. La suite $A(a)$ tend vers a. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $a-\varepsilon \leq A_n(a) \leq a+\varepsilon$. Soit $x < y$ deux nombres réels. On choisit $a = \frac{x+y}{2}$ et $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$. On trouve qu'il existe N tel que $x \leq A_n(a) \leq y$, et donc il existe un nombre décimal compris entre x et y. Entre deux nombres réels distincts, on peut donc toujours trouver un nombre décimal. On dit que l'ensemble des nombres décimal est *dense* dans l'ensemble des nombres réels. Cette notion sera approfondie en cours de *Topologie*.

4 Convergence des suites monotones

Proposition 73– *Si une suite croissante n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Considérons une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ croissante et non majorée. Il existe N tel que $u_N \geq M$ sinon $(u_n)_{n \geq n_0}$ serait majorée par M. Enfin, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ étant croissante, on trouve $u_n \geq u_N \geq M$ pour tout $n \geq N$. □

⚠Dans la proposition 73, l'hypothèse que la suite est croissante est nécessaire. Considérons en effet la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette suite n'est pas majorée, pourtant elle ne tend pas vers $+\infty$.

Corollaire 74– *Si une suite décroissante n'est pas minorée alors elle tend vers $-\infty$.*

Démonstration. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante et n'est pas minorée alors la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante et n'est pas majorée (si $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée par M alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée par $-\mathrm{M}$). On en déduit que $-u_n \to +\infty$ puis que $u_n \to -\infty$. □

On admet le résultat suivant concernant les suites croissantes majorées.

***Théorème* 75–** *Si une suite croissante est majorée alors elle admet une limite finie.*

On en déduit un résultat de même type pour les suites décroissantes.

***Corollaire* 76–** *Si une suite décroissante est minorée alors elle admet une limite finie.*

Démonstration. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante et minorée alors la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante et majorée. On en déduit l'existence d'un réel ℓ tel que que $-u_n \to \ell$ puis que $u_n \to -\ell$. □

Exemple 77– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante. On définit une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ en posant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq n_0$ et en donnant une valeur à u_{n_0}. On suppose qu'il existe un réel L tel que $\mathrm{L} = f(\mathrm{L})$.

i) On suppose que $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$ et $u_{n_0} \geq \mathrm{L}$. Grâce à l'exemple 22, on sait que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante. La croissance de f implique que si $u_n \geq \mathrm{L}$ alors $f(u_n) \geq f(\mathrm{L})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq \mathrm{L}$. Par récurrence, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée. Elle admet donc une limite.

ii) On suppose que $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$ et $u_{n_0} \leq \mathrm{L}$. Grâce à l'exemple 22, on sait que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante. La croissance de f implique que si $u_n \leq \mathrm{L}$ alors $f(u_n) \leq f(\mathrm{L})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq \mathrm{L}$. Par récurrence, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée. Elle admet donc une limite.

Exemple 78– On considère une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ à valeurs dans les entiers de 0 à 9. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot 10^{-k}.$$

Pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = x_{n+1} \cdot 10^{-n-1} \geq 0$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante. Par ailleurs,

$$0 \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - 10^{-n}}{1 - 10^{-1}} = 1 - \frac{1}{10^n} \leq 1.$$

Cette inégalité n'est rien d'autre que $0, x_1 \ldots x_n \leq 0, \underbrace{9 \ldots 9}_{n \text{ fois}} = 1 - 0, \underbrace{0 \ldots 0}_{n-1 \text{ fois}}1$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc majorée. Étant croissante et majorée, cette suite admet une limite. Chaque valeur de u_n est une valeur approchée du réel de $[0,1]$ dont chaque x_k est la k^{e} décimale. Noter que nos calculs montrent que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1$$

ce qui est une preuve de la non unicité du développement décimal des réels :

$$0,999\ldots = 1.$$

Enfin, même si les résultats précédents ne permettent pas de calculer la limite, ils permettent de la minorer ou de la majorer [d].

***Proposition* 79–**

1) *Si une suite est croissante, chacun de ses termes est inférieur à sa limite.*
2) *Si une suite est décroissante, chacun de ses termes est supérieur à sa limite.*

Démonstration. 1) Par convention le résultat est vrai si la suite est croissante et non majorée puisqu'elle tend alors vers $+\infty$. Soit donc $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite croissante et majorée et $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. S'il existe N tel que $u_\mathrm{N} > \ell$, alors $u_n \geq u_\mathrm{N} > \ell$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. On pose alors $\varepsilon = (u_\mathrm{N} - \ell)/2 > 0$. Il existe N_1 tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq \mathrm{N}_1$. On en déduit

$$\begin{cases} u_n \geq u_\mathrm{N} \\ u_n \leq \ell + \varepsilon = \dfrac{u_\mathrm{N} + \ell}{2} < u_\mathrm{N} \end{cases}$$

pour tout $n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}_1)$. On obtient une contradiction d'où l'inexistence de N. On a donc $u_n \leq \ell$ pour tout $n \geq n_0$.

2) Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite décroissante et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ sa limite. Alors, $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante et tend vers $-\ell$. D'après ce qui précède, on a donc $-u_n \leq -\ell$ pour tout $n \geq n_0$ ce qui implique $u_n \geq \ell$ pour tout $n \geq n_0$.

□

Ces résultats permettent même de donner des méthodes de calcul de nombres réels « enserrés » par des suites dites *adjacentes*.

Définition 80– *Deux suites sont* adjacentes *si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers* 0.

Exemple 81– Les suites de terme général $1 - \frac{1}{n}$ et $1 + \frac{1}{n}$ sont adjacentes : la première est croissante, la seconde est décroissante et leur différence, $-\frac{2}{n}$ tend vers 0.

Le résultat principal concernant les suites adjacentes est leur convergence vers une limite commune.

***Théorème* 82–** *Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et admettent la même limite.*

d. Par convention, tout réel est strictement inférieur à $+\infty$ et strictement supérieur à $-\infty$.

Démonstration. On suppose que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, que $(v_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante et que $u_n - v_n \to 0$. La suite $(u_n - v_n)_{n\geq n_0}$ est bornée, il existe donc M tel que $|u_n - v_n| \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier, et en utilisant la décroissance de $(v_n)_{n\geq n_0}$, on a

$$u_n \leq \mathrm{M} + v_n \leq \mathrm{M} + v_0$$

pour tout $n \geq n_0$. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est donc croissante et majorée, on en déduit qu'elle admet une limite réelle ℓ. De façon similaire, on a

$$v_n \geq u_n - \mathrm{M} \geq u_0 - \mathrm{M}$$

pour tout $n \geq n_0$. La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est donc décroissante et minorée, on en déduit qu'elle admet une limite réelle ℓ'. On a alors $u_n - v_n \to \ell - \ell'$. Puisque $u_n - v_n \to 0$, on a $\ell = \ell'$. □

Les suites adjacentes permettent de construire des approximations successsives de leur limite commune.

***Proposition* 83–** *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont deux suites adjacentes, $(u_n)_{n\geq n_0}$ étant croissante, leur limite commune ℓ satisfait l'encadrement*

$$u_n \leq \ell \leq v_n$$

pour tout entier $n \geq n_0$.

Démonstration. Cela résulte du fait, déjà démontré, que les termes d'une suite croissante sont toujours inférieurs à la limite de cette suite et que les termes d'une suite décroissante sont toujours supérieurs à la limite de cette suite. □

Exemple 84– On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

La différence entre les deux suites tend vers 0, en effet $n! \geq n$ donc $n! \to +\infty$ puis

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \to 0.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante puisque

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0.$$

Enfin la $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puisque

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0.$$

Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont donc adjacentes. Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ admettent donc une limite réelle commune. On appelle e cette limite [e]. On a donc

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq e\leq \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}$$

pour tout entier n. En prenant $n=15$ on trouve l'approximation suivante de e :

$$e=2{,}718281828458+\mathrm{R}$$

avec

$$0\leq \mathrm{R}\leq \frac{1}{15!}\leq 7{,}7\cdot 10^{-13}.$$

5 Suites extraites

***Proposition* 85–** *Soit $u=(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite et $\ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. La suite u converge vers ℓ si et seulement si $u_{2n}\to\ell$ et $u_{2n+1}\to\ell$.*

Démonstration. On définit deux suites u et v en posant $v_n=u_{2n}$ et $w_n=u_{2n+1}$ pour tout entier $n\geq n_0/2$.

1) On suppose $\ell\in\mathbb{R}$.

   a) On suppose que u converge vers ℓ.

      i) Montrons que v converge vers ℓ. Soit $\varepsilon>0$. Il existe N_0 tel que si $n\geq \mathrm{N}_0$ alors $|u_n-\ell|\leq\varepsilon$. Soit N un entier supérieur à $\mathrm{N}_0/2$. Si $n\geq \mathrm{N}$ alors $2n\geq \mathrm{N}_0$ et donc $|u_{2n}-\ell|\leq\varepsilon$, c'est à dire $|v_n-\ell|\leq\varepsilon$. On en tire que v converge vers ℓ.

      ii) Montrons que w converge vers ℓ. Soit $\varepsilon>0$. Il existe N_0 tel que si $n\geq \mathrm{N}_0$ alors $|u_n-\ell|\leq\varepsilon$. Soit N un entier supérieur à $(\mathrm{N}_0-1)/2$. Si $n\geq \mathrm{N}$ alors $2n+1\geq \mathrm{N}_0$ et donc $|u_{2n+1}-\ell|\leq\varepsilon$, c'est à dire $|w_n-\ell|\leq\varepsilon$. On en tire que w converge vers ℓ.

   Si u converge vers le réel ℓ, c'est donc aussi le cas des suites v et w.

   b) Réciproquement, on suppose que que v et w convergent vers ℓ. Montrons que u converge vers ℓ. Soit $\varepsilon>0$. Il existe N_0 tel que pour tout $n\geq \mathrm{N}_0$ on a

$$|u_{2n}-\ell|\leq\varepsilon. \tag{7}$$

   Il existe N_1 tel que pour tout $n\geq \mathrm{N}_1$ on a

$$|u_{2n+1}-\ell|\leq\varepsilon. \tag{8}$$

   Posons $\mathrm{N}=\max(2\mathrm{N}_0,2\mathrm{N}_1+1)$. Soit $n\geq\mathrm{N}$:

---

e. Vous verrez dans le cours *Séries numériques et suites de fonctions* que ce nombre est le nombre exp(1).

i) si n est pair, on écrit $n = 2p$; on a $p \geq N_0$ donc, grâce à (7), $|u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$ et donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$;

ii) si n est impair, on écrit $n = 2p + 1$; on a $p \geq N_1$ donc, grâce à (8), $|u_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon$ et donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Pour tout $n \geq N$, on a donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi, u converge vers ℓ.

2) On suppose $\ell = +\infty$.

a) On suppose que u tend vers $+\infty$.

i) Montrons que v tend vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe N_0 tel que si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq M$. Soit N un entier supérieur à $N_0/2$. Si $n \geq N$ alors $2n \geq N_0$ et donc $u_{2n} \geq M$, c'est à dire $v_n \geq M$. Pour tout M, il existe N tel que, si $n \geq N$, alors $v_n \geq M$. On en tire que v tend vers $+\infty$.

ii) Montrons que w tend vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe N_0 tel que si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq M$. Soit N un entier supérieur à $(N_0 - 1)/2$. Si $n \geq N$ alors $2n + 1 \geq N_0$ et donc $u_{2n+1} \geq M$, c'est à dire $w_n \geq M$. Pour tout M, il existe N tel que, si $n \geq N$, alors $w_n \geq M$. On en tire que w tend vers $+\infty$.

Si u tend vers $+\infty$, c'est donc aussi le cas des suites v et w.

b) Réciproquement, on suppose que v et w tendent vers $+\infty$. Montrons que u tend vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$ on a $v_n \geq M$, et donc

$$u_{2n} \geq M. \tag{9}$$

Il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ on a $w_n \geq M$, et donc

$$u_{2n+1} \geq M. \tag{10}$$

Posons $N = \max(2N_0, 2N_1 + 1)$. Soit $n \geq N$:

i) si n est pair, on écrit $n = 2p$; on a $p \geq N_0$ donc, grâce à (9), $u_{2p} \geq M$ et donc $u_n \geq M$;

ii) si n est impair, on écrit $n = 2p + 1$; on a $p \geq N_1$ donc, grâce à (10), $u_{2p+1} \geq M$ et donc $u_n \geq M$.

Ainsi, pour tout M, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq M$. On en déduit que u tend vers $+\infty$.

3) On suppose $\ell = -\infty$. La suite u tend vers $-\infty$ si et seulement si la suite $-u$ tend vers $+\infty$. D'après ce qu'on vient de démontrer, la suite $-u$ tend vers $+\infty$ si et seulement si les suites $-v$ et $-w$ tendent vers $+\infty$, c'est-à-dire si et seulement si les suites v et w tendent vers $-\infty$.

□

Exemple 86– Considérons la suite $u = ((-1)^n)_{n \geq 0}$ puis les deux suites $v = (u_{2n})_{n \geq 0}$ et $w = (u_{2n+1})_{n \geq 0}$. La suite v est la suite constante égale à 1, elle converge donc vers 1. La suite w est la suite constante égale à -1, elle converge donc vers -1. Puisque $1 \neq -1$, il en ressort que u n'a pas de limite.

Définition 87– *Soit $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. On appelle suite extraite de u toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ avec $\varphi\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ strictement croissante vérifiant $\varphi(n_0)\geq n_0$.*

Remarque 88– Au lieu de suite extraite, on dit parfois sous-suite.

Exemple 89– Les suites suivantes sont des suites extraites de u :

i) $(u_{2n})_{n\geq n_0}$: on a $\varphi(n) = 2n$ (sous-suite des termes de rangs pairs) ;

ii) $(u_{2n+1})_{n\geq n_0}$: on a $\varphi(n) = 2n+1$ (sous-suite des termes de rangs impairs) ;

iii) $(u_{n+1})_{n\geq n_0}$: on a $\varphi(n) = n+1$.

Proposition 90– *Si une suite u tend vers $\ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, alors toute suite extraite de u tend vers ℓ.*

Pour démontrer la proposition 90, on a besoin d'un résultat intermédiaire.

Lemme 91– *Soit $\varphi\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ une application strictement croissante telle que $\varphi(n_0)\geq n_0$. Pour tout entier $n\geq n_0$, on a $\varphi(n)\geq n$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence en appelant $\mathcal{H}(n)$ la propriété $\varphi(n)\geq n$. La propriété $\mathcal{H}(n_0)$ est vraie par hypothèse sur φ. Pour $n\geq n_0$, supposons vraie la propriété $\mathcal{H}(n)$. Puisque φ est strictement croissante, on a $\varphi(n+1)>\varphi(n)$. Comme $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)$ sont entiers, cette inégalité stricte implique $\varphi(n+1)\geq\varphi(n)+1$. En utilisant $\mathcal{H}(n)$, on en déduit $\varphi(n+1)\geq n+1$, c'est-à-dire $\mathcal{H}(n+1)$. □

Démonstration de la proposition 90. On considère une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ admettant une limite et $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ une de ses suites extraites.

1) Supposons que u converge vers ℓ avec $\ell\in\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe N tel que si $n\geq \mathrm{N}$ alors $|u_n-\ell|\leq\varepsilon$. Si $n\geq\mathrm{N}$, on a $\varphi(n)\geq n\geq\mathrm{N}$ et donc $|u_{\varphi(n)}-\ell|\leq\varepsilon$. Ainsi $u_{\varphi(n)}\to\ell$.
2) Supposons que u tende vers $+\infty$. Soit $\mathrm{M}\in\mathbb{R}$. Il existe N tel que si $n\geq\mathrm{N}$ alors $u_n\geq\mathrm{M}$. Si $n\geq\mathrm{N}$, on a $\varphi(n)\geq n\geq\mathrm{N}$ et donc $u_{\varphi(n)}\geq\mathrm{M}$. Ainsi $u_{\varphi(n)}\to+\infty$.
3) Supposons que u tende vers $-\infty$. Soit $m\in\mathbb{R}$. Il existe N tel que si $n\geq\mathrm{N}$ alors $u_n\leq m$. Si $n\geq\mathrm{N}$, on a $\varphi(n)\geq n\geq\mathrm{N}$ et donc $u_{\varphi(n)}\leq m$. Ainsi $u_{\varphi(n)}\to-\infty$.

□

Une importante conséquence pratique de la proposition 90 est que si d'une suite on peut extraire deux sous-suites n'ayant pas même limite, alors la suite n'a pas de limite réelle ou infinie.

Exemple 92– Soit a et b deux réels avec a différent de 0 et de 1 [(f)] . On définit une suite par récurrence en posant

$$u_{n+1} = au_n + b$$

f. Le cas $a=0$ est le cas des suites constantes. Le cas $a=1$ est le cas des suites arithmétiques déjà étudié dans l'exemple 54.

pour tout $n \geq n_0$. La suite $(u_{n+1})_{n\geq n_0}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\geq n_0}$. On en tire que si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ a une limite réelle ou infinie, alors la suite $(u_{n+1})_{n\geq n_0}$ a même limite.

i) Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers le réel ℓ, alors puisque $u_{n+1} \to \ell$. Mais

$$u_{n+1} = au_n + b \to a\ell + b$$

donc $\ell = a\ell + b$. On en déduit $\ell = \frac{b}{1-a}$.

ii) Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$, alors $au_n + b \to +\infty$ si $a > 0$ et $au_n + b \to -\infty$ si $a < 0$. Puisque $u_{n+1} \to +\infty$, on déduit que le cas $u_n \to +\infty$ ne peut pas se produire dans le cas $a < 0$.

iii) De même, le cas $u_n \to -\infty$ ne peut pas se produire que dans le cas $a > 0$.

Exemple 93– Soit a, b, c, d des réels. On définit une suite u par récurrence en posant

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

pour tout $n \geq n_0$. On suppose $ad - bc \neq 0$ [g] et $c \neq 0$ [h]. On suppose enfin que la suite est bien définie, c'est-à-dire qu'on peut montrer que la quantité $cu_n + d$ ne s'annule pour aucune valeur de n.

1) On suppose que u tend vers $-\infty$ ou $+\infty$, alors $u_n \neq 0$ pour n suffisamment grand. On peut donc écrire
$$\frac{au_n + b}{cu_n + d} = \frac{a + b/u_n}{c + d/u_n}.$$
Cette quantité tend vers a/c mais, étant égale à u_{n+1} elle doit tendre vers $-\infty$ ou $+\infty$. La suite u ne peut donc pas avoir de limite infinie.

2) On suppose que u converge vers le réel $\ell \neq -d/c$, alors $u_{n+1} \to \ell$ et

$$\frac{au_n + b}{cu_n + d} \to \frac{a\ell + b}{c\ell + d}.$$

On a donc $\ell = \dfrac{a\ell + b}{c\ell + d}$ puis $c\ell^2 + (d - a)\ell - b = 0$. Il n'y a de solution réelle que si $(d - a)^2 + 4bc \geq 0$.

3) On suppose que u converge vers le réel $\ell = -d/c$. Alors $au_n + b \to b - ad/c \neq 0$. Ainsi, $\left|\dfrac{au_n + b}{cu_n + d}\right| \to +\infty$. Ceci contredit $|u_{n+1}| \to |d/c|$. On ne peut donc pas avoir $\ell = -d/c$.

En conclusion, si u admet une limite, cette limite est nécessairement finie et est solution réelle de $c\ell^2 + (d - a)\ell - b = 0$.

g. Si $ad - bc = 0$ alors $\frac{au_n+b}{cu_n+d} = \frac{a}{c}$ pour tout $n \geq n_0 + 1$ donc la suite est stationnaire.

h. Le cas $c = 0$ se ramène à l'exemple 92.

6 Quelques suites particulières

6.1) Suites arithmético-géométriques

Définition 94– *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est* arithmético-géométrique *s'il existe deux nombres réels a et b tels que*

$$u_{n+1} = au_n + b$$

pour tout $n \geq n_0$.

En prenant $b = 0$ on retrouve les suites géométriques ; en prenant $a = 1$, on retrouve les suites arithmétiques.

Exemple 95– La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 7u_n + 1$ est arithmético-géométrique.

Dans la suite, on considère une suite arithmético-géométrique comme dans la définition et on suppose $a \neq 1$.

On commence par montrer qu'il existe r tel que la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ définie par $v_n = u_n + r$ pour tout $n \geq n_0$ est géométrique de raison a. On calcule

$$v_{n+1} = u_{n+1} + r = au_n + b + r = av_n - ar + b + r.$$

La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est donc géométrique de raison a si et seulement si $-ar + b + r = 0$ autrement dit si et seulement $r = \frac{b}{a-1}$.

On pose $r = \frac{b}{a-1}$. Les résultats concernant les suites géométriques permettent d'étudier la limite de $(u_n)_{n\geq n_0}$ en considérant la suite $(v_n)_{n\geq n_0} = (u_n + r)_{n\geq n_0}$. On a donc $(u_n)_{n\geq n_0} = (v_n - r)_{n\geq n_0}$.

i) Si $u_0 = \frac{b}{1-a}$ alors $v_0 = 0$ donc $(v_n)_{n\geq n_0}$ est la suite constante nulle et $(u_n)_{n\geq n_0}$ est la suite constante égale à $u_0 = \frac{b}{1-a}$;

ii) si $a > 1$ et $u_0 \neq \frac{b}{1-a}$ alors $v_n \to +\infty$ et donc $u_n \to +\infty$;

iii) si $|a| < 1$ alors $v_n \to 0$ et donc $u_n \to \frac{b}{1-a}$;

iv) si $a < -1$ et $u_0 \neq \frac{b}{1-a}$ alors $(v_n)_{n\geq n_0}$ n'a pas de limite puisque $v_{2n} \to \text{signe}(v_0)\infty$ et $v_{2n+1} \to -\text{signe}(v_0)\infty$ ces deux limites étant distinctes puisque $v_0 \neq 0$. Il en résulte que $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'a pas de limite : si elle avait une limite ℓ, la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ admettrait $\ell + r$ comme limite.

On peut enfin aisément retrouver la somme des premiers termes de $(u_n)_{n\geq n_0}$. En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} u_k = \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} (v_k - r) = \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} v_k - nr = v_{n_0}\frac{a^n-1}{a-1} - nr \\ = (u_{n_0}+r)\frac{a^n-1}{a-1} - nr \\ = \left(u_{n_0} + \frac{b}{a-1}\right)\frac{a^n-1}{a-1} - n\frac{b}{a-1}.\end{aligned}$$

6.2) Quelques propriétés des suites complexes

Nous n'avons jusqu'à présent parlé que de suites réelles (que nous appelions simplement suites). On peut définir et étudier une notion de suite complexe.

Une suite complexe est une application d'un sous-ensemble $\mathbb{Z}_{\geq n_0} = \{n \in \mathbb{Z} \colon n \geq n_0\}$ dans $\mathbb{C}$, et comme pour les suites réelles on note $(u_n)_{n\geq n_0}$ une telle suite. Sur l'ensemble $\mathcal{U}_{n_0}^{\mathbb{C}}$ des telles suites on définit une addition

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{n_0}^{\mathbb{C}} \times \mathcal{U}_{n_0}^{\mathbb{C}} & \to & \mathcal{U}_{n_0}^{\mathbb{C}} \\ (u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0} & \mapsto & (u_n+v_n)_{n\geq n_0}. \end{array}$$

On définit aussi un produit externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathcal{U}_{n_0}^{\mathbb{C}} & \to & \mathcal{U}_{n_0}^{\mathbb{C}} \\ \lambda, (u_n)_{n\geq n_0} & \mapsto & (\lambda u_n)_{n\geq n_0}. \end{array}$$

De même qu'on a démontré la proposition 6, vous montrerez que $\mathcal{U}_{n_0}^{\mathbb{C}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Plus d'informations sur les suites complexes sont données en annexe B.

Si a est un complexe non nul, on note $\mathcal{R}_a^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+1} = au_n$ pour tout $n \geq 0$. Cet ensemble contient la suite nulle, il est stable par addition (si $u_{n+1} = au_n$ et $v_{n+1} = av_n$ pour tout $n \geq 0$ alors $(u_{n+1} + v_{n+1}) = a(u_n + v_n)$ pour tout $n \geq 0$) et il est stable par produit externe (soit $\lambda \in \mathbb{C}$, si $u_{n+1} = au_n$ pour tout $n \geq 0$ alors $\lambda u_{n+1} = a(\lambda u_n)$ pour tout $n \geq 0$). L'ensemble $\mathcal{R}_a^{\mathbb{C}}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}_0^{\mathbb{C}}$. Les éléments de $\mathcal{R}_a^{\mathbb{C}}$ sont les suites géométriques de raison a. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison a, alors $u_n = a^n u_0$ pour tout $n \geq 0$ et donc $(u_n)_{n\geq 0} = u_0(a^n)_{n\geq 0}$. L'espace vectoriel $\mathcal{R}_a^{\mathbb{C}}$ est donc de dimension 1 engendré par la suite $(a^n)_{n\geq 0}$.

Les suites de $\mathcal{R}_a^{\mathbb{C}}$ s'appelent des *suites linéaires d'ordre* 1. Nous allons ensuite étudier les *suites linéaires d'ordre* 2, c'est-à-dire vérifiant une relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout n.

6.3) Suites définies par une récurrence linéaire d'ordre 2

6.3.1– Introduction

Soit a et b deux nombres complexes avec $b \neq 0$. On note $\mathcal{R}_{a,b}^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \geq 0$. Cet ensemble contient la suite nulle, il est stable par addition (si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$ pour tout $n \geq 0$, alors $(u_{n+2} + v_{n+2}) = a(u_{n+1} + v_{n+1}) + b(u_n + v_n)$ pour tout $n \geq 0$) et il est stable par produit externe (soit $\lambda \in \mathbb{C}$, si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \geq 0$, alors $\lambda u_{n+2} = a(\lambda u_{n+1}) + b(\lambda u_n)$ pour tout $n \geq 0$). L'ensemble $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}^{\mathbb{C}}_0$. On va déterminer ce sous-espace vectoriel.

6.3.2– Une méthode algébrique

On note r_1 et r_2 les nombres complexes racines de l'équation $x^2 - ax - b = 0$. On rappelle qu'alors $r_1 + r_2 = a$ et $r_1 r_2 = -b$.

i) Si $r_1 = r_2$, montrons que les suites $(r_1^n)_{n\geq 0}$ et $(nr_1^n)_{n\geq 0}$ constituent une famille libre de $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$.

Il faut donc en particulier vérifier qu'elles sont des éléments de $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$. On a $r_1^2 = ar_1 + b$. Si $n \geq 0$, on en déduit après multiplication par r_1^n que $r_1^{n+2} = ar_1^{n+1} + br_1^n$. Ainsi, $(r_1^n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$. Si $x^2 - ax - b = 0$ n'a qu'une racine, c'est-à-dire si $r_1 = r_2$, alors $a = 2r_1$ et $b = -r_1^2$. En particulier, $ar_1 + 2b = 0$. En multipliant par $(n+2)r_1^n$ l'égalité $r_1^2 = ar_1 + b$, on trouve

$$\begin{aligned}(n+2)r_1^{n+2} &= (n+2)ar_1^{n+1} + (n+2)br_1^n\\ &= a(n+1)r_1^{n+1} + bnr_1^n + (ar_1 + 2b)r_1^n\\ &= a(n+1)r_1^{n+1} + bnr_1^n.\end{aligned}$$

On a donc $(nr_1^n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$.

Montrons maintenant la liberté de la famille $\left\{(r_1^n)_{n\geq 0}, (nr_1^n)_{n\geq 0}\right\}$. Soit λ et μ deux complexes tels que $\lambda(r_1^n)_{n\geq 0} + \mu(nr_1^n)_{n\geq 0} = 0$. Pour tout $n \geq 0$, on a alors $\lambda r_1^n + \mu nr_1^n = 0$. Puisque $b = -r_1^2 \neq 0$, on a $r_1 \neq 0$ et donc $\lambda + \mu n = 0$ pour tout $n \geq 0$. Le choix de $n = 0$ donne $\lambda = 0$. Le choix $n = 1$ donne ensuite $\mu = 0$. La famille $\left\{(r_1^n)_{n\geq 0}, (nr_1^n)_{n\geq 0}\right\}$ est donc une famille libre de $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$.

ii) Si $r_1 \neq r_2$, montrons que les suites $(r_1^n)_{n\geq 0}$ et $(r_2^n)_{n\geq 0}$ constituent une famille libre de $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$.

Il faut donc en particulier vérifier qu'elles sont des éléments de $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$. On a $r_1^2 = ar_1 + b$. Si $n \geq 0$, on en déduit après multiplication par r_1^n que $r_1^{n+2} = ar_1^{n+1} + br_1^n$. Ainsi, $(r_1^n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$. On a aussi $r_2^2 = ar_2 + b$ donc $(r_2^n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$.

Montrons maintenant la liberté de la famille $\left\{(r_1^n)_{n\geq 0}, (r_2^n)_{n\geq 0}\right\}$. Soit λ et μ deux complexes tels que $\lambda(r_1^n)_{n\geq 0} + \mu(r_2^n)_{n\geq 0} = 0$. Pour tout $n \geq 0$ on a alors $\lambda r_1^n + \mu r_2^n = 0$. Le choix $n = 0$ conduit à $\mu = -\lambda$ de sorte que $\lambda(r_1^n - r_2^n) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Puisque $r_1 \neq r_2$, le choix $n = 1$ implique $\lambda = 0$. La famille $\left\{(r_1^n)_{n\geq 0}, (r_2^n)_{n\geq 0}\right\}$ est donc une famille libre de $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$.

On définit donc deux suites v et w

$$v = (r_1^n)_{n\geq 0} \quad \text{et} \quad w = \begin{cases}(nr_1^n)_{n\geq 0} & \text{si } r_1 = r_2\,;\\ (r_2^n)_{n\geq 0} & \text{si } r_1 \neq r_2.\end{cases}$$

On a montré que la famille $\{v, w\}$ est une famille libre de $\mathcal{R}_{a,b}^{\mathbb{C}}$.

On veut maintenant montrer que la famille $\{v, w\}$ engendre $\mathcal{R}_{a,b}^{\mathbb{C}}$. Soit $u \in \mathcal{R}_{a,b}^{\mathbb{C}}$. On veut donc montrer qu'il existe un couple de nombres complexes (α, β) tels que

$$u_n = \alpha v_n + \beta w_n = 0$$

pour tout ≥ 0. Si un tel couple existe, le choix de $n = 0$ et $n = 1$ montre qu'il est solution du système

$$\begin{cases} \alpha v_0 + \beta w_0 = u_0 \\ \alpha v_1 + \beta w_1 = u_1. \end{cases} \tag{11}$$

Le déterminant de la matrice associée est $d = w_1 v_0 - v_1 w_0$. On a $v_0 = 1$ et $v_1 = r_1$. De plus, si $r_1 = r_2$ alors $w_0 = 0$ et $w_1 = r_1$ tandis que, si $r_1 \neq r_2$ alors $w_0 = 1$ et $w_1 = r_2$. Si $r_1 = r_2$ on a donc $d = r_1 \neq 0$ (en effet, si $r_1 = 0$ alors $b = 0$ ce qu'on a exclu) et si $r_1 \neq r_2$ alors $d = r_2 - r_1 \neq 0$. Dans les deux cas, le déterminant de la matrice associée au système (11) est non nul et ce système a une solution (unique). On choisit pour (α, β) la solution de ce système. On note $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse

$$u_r = \alpha v_r + \beta w_r \quad \text{pour tout } 0 \leq r \leq n.$$

Notre choix de (α, β) implique que $\mathcal{H}(1)$ est vraie. Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. On veut montrer que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. Puisque $\mathcal{H}(n)$ est vraie, on a $u_r = \alpha v_r + \beta w_r$ pour tout $r \leq n$ et, il reste à montrer que $u_{n+1} = \alpha v_{n+1} + \beta w_{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a u_n + b u_{n-1} \\ &= a(\alpha v_n + \beta w_n) + b(\alpha v_{n-1} + \beta w_{n-1}) \text{ par } \mathcal{H}(n) \\ &= \alpha(a v_n + b v_{n-1}) + \beta(a w_n + b w_{n-1}) \\ &= \alpha v_{n+1} + \beta w_{n+1}. \end{aligned}$$

On a donc $u_n = \alpha v_n + \beta w_n$ pour tout $n \geq 0$ d'où $u = \alpha v + \beta w$.

La famille libre $\{v, w\}$ engendre $\mathcal{R}_{a,b}^{\mathbb{C}}$. C'est donc une base de $\mathcal{R}_{a,b}^{\mathbb{C}}$. On a démontré le résultat suivant.

Théorème 96– *Soit a un nombre complexe et b un nombre complexe non nul. L'ensemble $\mathcal{R}_{a,b}^{\mathbb{C}}$ des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ pour tout entier $n \geq 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}_0^{\mathbb{C}}$ de dimension 2 . Notons r_1 et r_2 les racines de l'équation $x^2 - ax - b = 0$:*

a) si $r_1 \neq r_2$, le sous-espace vectoriel $\mathcal{R}_{a,b}^{\mathbb{C}}$ admet pour bases la famille formée de deux suites $(r_1^n)_{n\geq 0}$ et $(r_2^n)_{n\geq 0}$;

b) si $r_1 = r_2$, le sous-espace vectoriel $\mathcal{R}_{a,b}^{\mathbb{C}}$ admet pour bases la famille formée de deux suites $(r_1^n)_{n\geq 0}$ et $(n r_1^n)_{n\geq 0}$.

Autrement dit, pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ pour tout $n \geq 0$, il existe un unique couple de nombres complexes (α, β) tel que

a) si $r_1 \neq r_2$, $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ pour tout $n \geq 0$;

b) si $r_1 = r_2$, $u_n = (\alpha + \beta n) r_1^n$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque 97– Si a, b, u_0 et u_1 sont réels, par récurrence toutes les valeurs de la suite $u \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$ sont réelles. L'ensemble $\mathcal{R}_{a,b}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \geq 0$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{U}_0$. Montrons que, comme précédemment, il est de dimension 2.

Si les racines r_1 et r_2 sont réelles, le même raisonnement conduit au même résultat (avec des combinaisons linéaires à coefficients réels).

Nous traitons le cas où l'une des racines n'est pas réelle. Si r_1 est racine alors son conjugué $\overline{r_1}$ l'est aussi. En effet, en prenant le conjugué de l'égalité $r_1^2 - ar_1 - b = 0$ et en utilisant le fait que a et b sont réels, on obtient $\overline{r_1}^2 - a\overline{r_1} - b = 0$. Ainsi, $r_2 = \overline{r_1}$ et les racines sont de la forme $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ où $\rho > 0$ est le module commun à r_1 et r_2 et $\theta \in \mathbb{R}$ est un module de r_1. On définit alors les suites v et w en posant

$$v_n = \rho^n \cos(n\theta) = \frac{r_1^n + r_2^n}{2} \quad \text{et} \quad w_n = \rho^n \sin(n\theta) = \frac{r_1^n - r_2^n}{2i}$$

pour tout $n \geq 0$.

Montrons que la famille $\{v, w\}$ est une famille libre de $\mathcal{R}_{a,b}$. Les suites $(r_1^n)_{n\geq 0}$ et $(r_2^n)_{n\geq 0}$ vérifient $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \geq 0$ d'après l'étude du cas complexe, leur somme et différence aussi et donc v et w sont des éléments de $\mathcal{R}_{a,b}$. Soit λ et μ deux réels tels que $\lambda v + \mu w = 0$. Alors, pour tout $n \geq 0$ on a $\lambda\rho^n \cos(n\theta) + \mu\rho^n \sin(n\theta) = 0$. Le choix de $n = 0$ conduit à $\lambda = 0$. Le choix de $n = 1$ conduit ensuite à $\mu = 0$. En effet $\sin\theta \neq 0$ puisque r_2 n'est pas réelle.

On poursuit ensuite comme dans le cas complexe pour montrer que la famille $\{v, w\}$ engendre $\mathcal{R}_{a,b}$.

Exercice 98– Écrire en détail la démonstration du fait que la famille $\{v, w\}$ engendre $\mathcal{R}_{a,b}$.

On obtient le résultat suivant.

Théorème 99– *Soit a un nombre réel et b un nombre réel non nul. L'ensemble $\mathcal{R}_{a,b}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout entier $n \geq 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}_0$ de dimension 2. Notons r_1 et r_2 les racines (éventuellement complexes) de l'équation $x^2 - ax - b = 0$.*

a) si les deux racines sont réelles et distinctes, ce sous-espace vectoriel $\mathcal{R}_{a,b}$ admet pour base la famille constituée des deux suites $(r_1^n)_{n\geq 0}$ et $(r_2^n)_{n\geq 0}$;

b) si les deux racines sont réelles et égales, ce sous-espace vectoriel $\mathcal{R}_{a,b}$ admet pour base la famille constituée des deux suites $(r_1^n)_{n\geq 0}$ et $(nr_1^n)_{n\geq 0}$;

c) si les deux racines sont complexes non réelles (et donc conjuguées et distinctes), on note $r_1 = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors ce sous-espace vectoriel $\mathcal{R}_{a,b}$ admet pour base la famille constituée des deux suites $(\rho^n \cos(n\theta))_{n\geq 0}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n\geq 0}$.

Autrement dit, si $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout entier $n \geq 0$, alors il existe un unique couple de nombres réels (α, β) tel que

a) si les deux racines sont réelles et distinctes, $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ pour tout $n \geq 0$;

b) si les deux racines sont réelles et égales, $u_n = (\alpha + \beta n) r_1^n$ pour tout $n \geq 0$;

c) si les deux racines sont complexes non réelles (et donc conjuguées et distinctes), on note $r_1 = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors $u_n = (\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))\,\rho^n$ pour tout $n \geq 0$.

Dans le cas *c*) du théorème 99, on peut donner un autre expression pour toute suite non nulle $(u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{R}_{a,b}$. Soit α et β non tous deux nuls. On a alors

$$\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos(n\theta) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin(n\theta)\right).$$

Or,

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 = 1.$$

Il existe donc un réel φ tel que

$$\cos(-\varphi) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad \text{et} \quad \sin(-\varphi) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Ainsi,

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos(n\theta) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin(n\theta) = \cos(n\theta+\varphi).$$

En posant $\mathrm{R} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, on a donc

$$(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))\,\rho^n = \mathrm{R}\rho^n\cos(n\theta+\varphi).$$

Exercice 100– On garde les notations du théorème 99 et on suppose être dans le cas *c*). Montrer que s'il existe deux réels $\mathrm{R} \geq 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n = \mathrm{R}\rho^n\cos(n\theta+\varphi)$$

pour tout entier $n \geq 0$ appartient à $\mathcal{R}_{a,b}$. En déduire que $\mathcal{R}_{a,b}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ pour lesquelles existent deux réels $R \geq 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_n = R\rho^n \cos(n\theta + \varphi)$$

pour tout entier $n \geq 0$.

6.3.3– Une méthode matricielle

On donne maintenant une méthode basée sur du calcul matriciel.
Si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \geq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Notons $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. On a donc $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

pour tout $n \geq 0$. On en déduit par récurrence que $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{a,b}$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

pour tout $n \geq 0$.

Le reste de cette partie est donc consacré au calcul de A^n. Comme précédemment, on note r_1 et r_2 les nombres complexes racines de l'équation $x^2 - ax - b = 0$. Puisque $A - \lambda I$ a pour déterminant $\lambda^2 - a\lambda - b$, les complexes r_1 et r_2 sont les seules valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Ce sont donc les seules valeurs de λ pour lesquelles le système $(A - \lambda I)X = 0$ a une infinité de solution. On utilisera les relations suivantes entre coefficients et racines : $r_1 + r_2 = a$ et $r_1 r_2 = -b$.

i) On suppose $r_1 \neq r_2$. On a

$$(A - r_1 I)\begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 & 1 \\ b & a - r_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b + (a - r_1)r_1 \end{pmatrix} = 0.$$

De la même façon, $(A - r_2 I)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ r_2 \end{smallmatrix}\right) = 0$. On note $e_1 = (1, r_1)$ et $e_2 = (1, r_2)$. Si $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$, la première coordonnée livre $\alpha = -\beta$ et la seconde conduit alors à $\alpha(r_1 - r_2) = 0$. Puisque $r_1 \neq r_2$, on en déduit $\alpha = 0$ puis $\beta = 0$. La famille $\{e_1, e_2\}$ est donc libre. Puisque le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ est de dimension 2, on en déduit que la famille $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{C}^2$. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à la base $\{e_1, e_2\}$. C'est une matrice inversible. On calcule

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1}{r_2 - r_1}\begin{pmatrix} r_2 & -1 \\ -r_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1}\begin{pmatrix} r_1 r_2 - a r_1 - b & r_2^2 - a r_2 - b \\ -(r_1^2 - a r_1 - b) & -(r_1 r_2 - a r_2 - b) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1}\begin{pmatrix} -r_1^2 + r_1 r_2 & 0 \\ 0 & r_2^2 - r_1 r_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi obtient-on

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $P^{-1}AP$ est diagonale, on la note D. On a $A = PDP^{-1}$ et donc $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \geq 0$. Or $D^n = \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}$ d'où

$$A^n = \frac{1}{r_2 - r_1}\begin{pmatrix} r_2 r_1^n - r_1 r_2^n & r_2^n - r_1^n \\ b(r_2^n - r_1^n) & r_2^{n+1} - r_1^{n+1} \end{pmatrix}$$

pour tout $n \geq 0$. On déduit de (12) que

$$u_n = \frac{r_2 r_1^n - r_1 r_2^n}{r_2 - r_1} u_0 + \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1} u_1 = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} r_2^n$$

pour tout $n \geq 0$.

ii) On suppose $r_1 = r_2$. On a alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r_1^2 & 2r_1 \end{pmatrix}$. Par récurrence, on montre alors que

$$A^n = \begin{pmatrix} -(n-1)r_1^n & n r_1^{n-1} \\ -n r_1^{n+1} & (n+1) r_1^n \end{pmatrix}$$

pour tout $n \geq 1$. On obtient alors [i]

$$u_n = -(n-1) r_1^n u_0 + n r_1^{n-1} u_1 = \left(\frac{u_1}{r_1} - u_0\right) n r_1^n + u_0 r_1^n$$

pour tout $n \geq 1$ (on vérifie facilement que cette formule est vraie aussi pour $n = 0$).

Remarque 101– Tous ces calculs relèvent de la théorie de la diagonalisation qui sera vue plus tard [j]. Cette théorie explique pourquoi les calculs menés ici conduisent à des résultats simples.

i. Noter que $b \neq 0$ implique $r_1 \neq 0$.

j. Du moins si vous continuez l'étude des mathématiques, ce que souhaite l'auteur de ces lignes...

6.3.4– Exemples

➡ Cherchons le terme général de la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2. \end{cases}$$

L'équation associée est $x^2 - x - 1 = 0$ dont les racines sont

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Il existe donc des réels α et β tels que

$$u_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

pour tout $n \geq 0$. Les choix de $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \alpha + \beta \\ u_1 = 2 = \alpha\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

La résolution du système conduit à

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10} \\ \beta = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}. \end{cases}$$

et donc

$$u_n = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

pour tout $n \geq 0$.

➡ Cherchons le terme général de la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 4. \end{cases}$$

L'équation associée est $x^2 - 4x + 4 = 0$ dont les racines sont $r_1 = r_2 = 2$. Il existe donc des réels α et β tels que

$$u_n = (\alpha + \beta n) \cdot 2^n$$

pour tout $n \geq 0$. Les choix de $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \alpha \\ u_1 = 4 = 2\alpha + 2\beta. \end{cases}$$

La résolution du système conduit à $\alpha = \beta = 1$ et donc

$$u_n = (n+1) \cdot 2^n$$

pour tout $n \geq 0$.

➡ Cherchons le terme général de la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = -8u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2. \end{cases}$$

L'équation associée est $x^2 + 8 = 0$ dont les racines sont $r_1 = 2\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/2}$ et $r_2 = -2\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/2}$. Il existe donc des réels α et β tels que

$$u_n = \left(\alpha \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \beta \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)(2\sqrt{2})^n$$

pour tout $n \geq 0$. Les choix de $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \alpha \\ u_1 = 2 = 2\sqrt{2}\beta. \end{cases}$$

On a donc

$$u_n = \left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)(2\sqrt{2})^n$$

pour tout $n \geq 0$.

➡ Cherchons le terme général de la suite complexe définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = 3iu_{n+1} + (i+3)u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2. \end{cases}$$

L'équation associée est $x^2 - 3ix - i - 3 = 0$ dont les racines sont $r_1 = i - 1$ et $r_2 = 2i + 1$. Il existe donc des complexes α et β tels que

$$u_n = \alpha(i-1)^n + \beta(2i+1)^n$$

pour tout $n \geq 0$. Les choix de $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \alpha + \beta \\ u_1 = 2 = \alpha(i-1) + \beta(2i+1). \end{cases}$$

La résolution du système conduit à

$$\begin{cases} \alpha = i \\ \beta = 1 - i. \end{cases}$$

et donc

$$u_n = i(i-1)^n + (1-i)(2i+1)^n$$

pour tout $n \geq 0$.

7 Exercices

1) On définit trois suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ en posant

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2},\ v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad w_n = u_n^2$$

pour tout $n \geq 0$.

1) Calculer u_n, v_n et w_n pour $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$.
2) Donner le terme général de la suite $(u_{2n})_{n\geq 0}$.
3) Donner le terme général de la suite $(v_{n^2})_{n\geq 0}$.
4) Donner le terme général de la suite $(w_{2n-2})_{n\geq 1}$.

2) On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour $n \geq 0$. Calculer u_n pour $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

3) Justifier que l'on définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = 1/4$ et $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n^3}$ pour $n \geq 0$

4) Soit a un réel tel que $|a| \leq 1$. On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n^2}$ pour tout $n \geq 0$. Que valent $u_{2173201}$ et u_{1548} ?

5) Parmi les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ suivantes, dire lesquelles sont arithmétiques. Preciser, le cas échéant la raison et le premier terme.

1) $u_n = -7n + 3$
2) $u_n = -4$
3) $u_n = \sqrt{n}$
4) $u_n = (n+5)^3 - n^3 - 15(n-1)^2$.

6) Déterminer les trois premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$ sachant que

$$\begin{cases} u_0 + u_1 - u_2 = 7 \\ 2u_0 + 3u_1 - 4u_2 = 13. \end{cases}$$

7) Pour tout entier $\mathrm{N} \geq 1$, déterminer la somme des N premiers termes de la suite $(3^n - 7n + 6)_{n\geq 0}$.

8) On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = v_0 = 1$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = 8u_n + 7v_n \\ v_{n+1} = 7u_n + 8v_n. \end{cases}$$

Déterminer les suites $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$ et $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ pour tout $n \geq 0$ puis calculer le terme général des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

9) Le philosophe grec Zénon d'Élée (autour de -450) prétendait démontrer l'impossibilité d'un mouvement par le raisonnement suivant : une flèche ne peut pas atteindre sa cible puisqu'avant d'atteindre cette cible, il lui faut parcourir la moitié de la distance, puis la moitié du chemin restant puis ainsi de suite, une infinité de moitiés. Pourquoi la conclusion de ce raisonnement est-elle fausse ?

10) Calculer les limites des suites de terme général

1) $\dfrac{n^7+6n^3+2}{n^2+1}$, $\dfrac{n^5-6n^2+1}{6n^7+8n+2}$, $\dfrac{n^2+n+1}{2n^2+n+1}$.

2) $2-3^n$, $n-3^n$, $2-\dfrac{1}{3^n}$, $n^2-n+1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

3) $\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}$, $\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n+1}$, $\sqrt{n^4+n^2+2}-\sqrt{n^4+n^2}$.

11) On définit une suite $u=(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0=0$ et

$$u_{n+1}=\frac{9u_n-4}{12u_n-5} \quad \text{pour tout entier } n\geq 0.$$

1) Montrer que pour tout $n\geq 0$ tel que $12u_n-5\neq 0$, on a

$$u_{n+1}=\frac{9}{12}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12u_n-5}.$$

2) En déduire que, pour tout $n\geq 1$, on peut définir u_n et que $u_n\geq \dfrac{2}{3}$.

3) Pour tout entier $n\geq 0$, on pose

$$v_{n+1}=\frac{-2u_n+1}{3u_n-2}.$$

Montrer que la suite $v=(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique.

4) Déterminer la limite de v.

5) Pour tout entier $n\geq 0$, établir l'expression de u_n en fonction de v_n.

6) Quelle est la limite de u ?

12) On définit une suite $u=(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0=0$ et

$$u_{n+1}=\frac{-2u_n-2}{6u_n+5} \quad \text{pour tout entier } n\geq 0.$$

1) a) Montrer que pour tout $n\geq 0$ tel que $6u_n+5\neq 0$, on a

$$u_{n+1}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6u_n+5}.$$

b) En déduire que, pour tout $n\geq 1$, on peut définir u_n et que $u_n\geq -\dfrac{1}{2}$.

2) On pose $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 6 & 5\end{pmatrix}$.

a) Pour quelles valeurs λ_0 et λ_1 du paramètre réel λ la matrice $\mathrm{M}-\lambda\mathrm{I}$ n'est-elle pas inversible ?

b) On note

$$V_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} \text{ et } V_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\}.$$

Montrer qu'il existe deux vecteurs w_0 et w_1 de $\mathbb{R}^2$ tels que w_0 engendre V_0 et w_1 engendre V_1.

c) Montrer que $\{w_0, w_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\{w_0, w_1\}$, on note $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Donner les valeurs de a, b, c et d.

3) On définit une suite $v = (v_n)_{n \geq 0}$ en posant, pour tout $n \geq 0$ entier

$$v_n = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

a) Montrer que v est bien définie et que c'est une suite géométrique.

b) Déterminer la limite de v.

c) Pour tout entier $n \geq 0$, établir l'expression de u_n en fonction de v_n.

d) En déduire que u converge et donner sa limite.

4) On va retrouver cette limite par une autre méthode.

a) Calculer $D = P^{-1}AP$.

b) Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n par $M^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$. Déterminer $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n.

c) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$ on a

$$u_n = \frac{\beta_n}{\delta_n}.$$

d) En déduire que u converge et donner sa limite.

13) On définit une suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{-5u_n + 4}{-9u_n + 7} \quad \text{pour tout entier } n \geq 0.$$

1) a) Montrer que pour tout $n \geq 0$ tel que $-9u_n + 7 \neq 0$, on a

$$u_{n+1} = \frac{5}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{-9u_n + 7}.$$

b) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, on peut définir u_n et que $u_n \leq \frac{2}{3}$.

2) On pose $M = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Pour quelle valeur λ la matrice $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}$ n'est-elle pas inversible ?

b) On note

$$\mathrm{V} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}.$$

Montrer V est un sous-espace vectoriel de dimension 1 et en construire un vecteur générateur w.

c) Construire un vecteur t tel que $\{w, t\}$ soit une base de $\mathbb{R}^2$. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\{w, t\}$.

3) On note $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) Calculer a, b, c et d.

b) On définit une suite $v = (v_n)_{n \geq 0}$ en posant, pour tout $n \geq 0$ entier

$$v_n = \frac{a u_n + b}{c u_n + d}.$$

Montrer que v est bien définie et que c'est une suite arithmético-géométrique.

c) Déterminer la limite de v.

d) Pour tout entier $n \geq 0$, établir l'expression de u_n en fonction de v_n.

e) En déduire que u converge et donner sa limite.

4) On va retrouver cette limite par une autre méthode.

a) Calculer $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1} \mathrm{M} \mathrm{P}$.

b) Par récurence, calculer T^n pour tout entier $n \geq 0$.

c) En déduire T^n pour tout entier $n \geq 0$.

d) Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n par $\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$. Déterminer $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n.

e) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$ on a

$$u_n = \frac{\beta_n}{\delta_n}.$$

f) En déduire que u converge et donner sa limite.

14) On définit une suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \quad \text{pour tout entier } n \geq 0.$$

1) Montrer que u est bien définie.

2) Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{1 + u_n} + \sqrt{1 + u_{n-1}}}$$

pour tout $n \geq 1$.

3) En déduire que u est croissante.
4) Montrer qu'il existe un unique réel positif ℓ tel que $\ell = \sqrt{1+\ell}$.
5) Montrer que $u_n \leq \ell$ pour tout $n \geq 0$.
6) Déduire des question précédente que u converge.
7) En donnant une relation entre u_{n+1}^2 et u_n pour tout entier $n \geq 0$, déterminer la limite de u.

15) On définit une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \quad \text{pour tout entier } n \geq 0.$$

1) Pour tout $n \geq 0$, montrer que si $0 < u_n < 2$ alors $0 < \sqrt{2-u_n} < 2$. En déduire que u est bien définie et bornée.
2) Pour tout $n \geq 1$, montrer que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n-1} - u_n}{\sqrt{2-u_n} + \sqrt{2-u_{n-1}}}.$$

3) En déduire par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$ la propriété

$$\mathcal{P}(n)\colon \begin{cases} u_{2n+2} > u_{2n} \\ u_{2n+3} < u_{2n+1} \end{cases}$$

est vraie.
4) On définit deux suites $a = (u_{2n})_{n\geq 0}$ et $b = (u_{2n+1})_{n\geq 0}$. Étudier variations de a et b.
5) Déduire de la question précédente et de la première question que a et b sont convergentes.
6) On note A la limite de a et B la limite de b. Montrer que $\mathrm{B}^2 = 2 - \mathrm{A}$ puis que $(\mathrm{B}-1)(\mathrm{B}^3 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{B} - 2) = 0$.
7) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$ la propriété

$$\mathcal{P}(n)\colon \begin{cases} u_{2n} < 1 \\ u_{2n+1} > 1 \end{cases}$$

est vraie. n déduire que $\mathrm{B} \geq 1$.
8) Déduire des questions 6 et 7 que $\mathrm{B} = 1$.
9) Montrer que la suite u converge et donner sa limite.

16) Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n}$$

pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que u est bien définie.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \geq \sqrt{2}$.

c) Étudier les variations de u.

d) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}.$$

e) Montrer que u converge et déterminer sa limite.

17) On définit deux suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ par

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5}, \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + 2u_n}{5}$$

pour tout $n \geq 0$. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

18) Le but de cet exercice est de déterminer le terme général de la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

pour tout $n \geq 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

a) Montrer qu'il existe une matrice M telle que, pour tout $n \geq 0$ on a $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{U}_n$.

b) Exprimer U_n en fonction de U_0 pour tout $n \geq 0$.

c) Pour quelles valeurs λ_0, λ_1 et λ_2 du paramètre réel λ la matrice $\mathrm{M} - \lambda\mathrm{I}$ n'est-elle pas inversible ?

d) On note

$$\mathrm{V}_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathrm{V}_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}$$

et

$$\mathrm{V}_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}.$$

Montrer qu'il existe trois vecteurs v_0, v_1 et v_2 de $\mathbb{R}^3$ tels que v_0 engendre V_0, v_1 engendre V_1 et v_2 engendre V_2.

e) Montrer que $\{v_0, v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\{v_0, v_1, v_2\}$.

f) Calculer $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{P}$.

g) En déduire une expression de U_n puis de u_n pour tout $n \geq 0$.

A Structure linéaire de l'espace vectoriels des suites

On a vu proposition 6 que l'ensemble $\mathcal{U}_{n_0}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq n_0}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Montrons que cet espace est de dimension infinie. On raisonne par l'absurde en le supposant de dimension finie d. Considérons alors les $d+1$ suites $u^{(1)},\ldots,u^{(d+1)}$ définies par

$$\begin{array}{c}
u^{(1)}_{n_0} = 1 \quad \text{et} \quad u^{(1)}_n = 0 \quad \text{si } n \neq n_0 \\
u^{(2)}_{n_0+1} = 1 \quad \text{et} \quad u^{(2)}_n = 0 \quad \text{si } n \neq n_0+1 \\
\vdots \\
u^{(d)}_{n_0+d-1} = 1 \quad \text{et} \quad u^{(d)}_n = 0 \quad \text{si } n \neq n_0+d-1. \\
u^{(d+1)}_{n_0+d} = 1 \quad \text{et} \quad u^{(d+1)}_n = 0 \quad \text{si } n \neq n_0+d.
\end{array}$$

La famille $\{u^{(1)},u^{(2)},\ldots,u^{(d+1)}\}$ est libre : soit en effet $\lambda_1,\ldots,\lambda_{d+1}$ des réels tels que

$$\lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} + \ldots + \lambda_{d+1} u^{(d+1)} = 0.$$

Pour tout entier $n \geq n_0$ on a donc

$$\lambda_1 u^{(1)}_n + \lambda_2 u^{(2)}_n + \ldots + \lambda_{d+1} u^{(d+1)}_n = 0.$$

Le choix de $n = n_0$ donne $\lambda_1 = 0$. Le choix $n = n_0+1$ donne $\lambda_2 = 0$. En choisissant successivement pour n les entiers de n_0 à n_0+d on montre que les réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_{d+1}$ sont nuls. On a donc construit une famille libre à $d+1$ éléments d'un espace vectoriel de dimension d. C'est contradictoire. L'espace $\mathcal{U}_{n_0}$ n'est pas de dimension finie.

Remarque 102– Chacune des suites $u^{(1)},\ldots,u^{(d+1)}$ tend vers 0. Le raisonnement précédent justifie donc aussi la remarque 40.

B Convergence des suites complexes (par Thierry Buffard)

Définition 103– *Une* suite numérique complexe *notée* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(ou plus simplement* (z_n)*) est une application de* $\mathbb{N}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$.

Définition 104– *On dit qu'une suite complexe* (z_n) *est* convergente *(dans* $\mathbb{C}$*) s'il existe un nombre complexe* ℓ *tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq \mathrm{N} \Longrightarrow |z_n - \ell| < \varepsilon). \tag{13}$$

On dit alors que la suite (z_n) tend vers ℓ, *ou encore que la* suite (z_n) converge vers ℓ *ou encore que la* suite (z_n) a pour limite ℓ.

***Proposition* 105** (comme dans $\mathbb{R}$)– *Si* (z_n) *est une suite convergente, alors sa limite est unique et est notée* $\lim_{n\to+\infty} z_n$ *ou* $\lim(z_n)$.

Exemple 106– Soit $z_n = \frac{in}{n+i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\lim(z_n) = i$.
On a $z_n - i = \frac{in}{n+i} - i = \frac{1}{n+i}$, donc $|z_n - i| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour $N_0 = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} \right\rfloor + 1$ si $\varepsilon \leq 1$ et $N_0 = 0$ si $\varepsilon > 1$, on a $|z_n - i| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_0$.
On a ainsi montré que $\lim(z_n) = i$.

Remarque 107– On a l'équivalence :

$$\lim(z_n) = \ell \in \mathbb{C} \text{ si et seulement si la suite réelle } (|z_n - \ell|) \text{ converge vers } 0.$$

***Théorème* 108** (comme dans $\mathbb{R}$)–
a) *Si* (z_n) *est une suite complexe convergente vers* $\ell \in \mathbb{C}$, *alors la suite réelle* $(|z_n|)$ *converge vers* $|\ell|$.
b) *Toute suite complexe convergente est bornée c'est-à-dire vérifie qu'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $|z_n| \leq M$.
c) *Si* $\lim(z_n) = \ell \in \mathbb{C}$ *et* $\lim(z'_n) = \ell' \in \mathbb{C}$, *alors* $\lim(z_n + z'_n) = \ell + \ell'$,
d) *Si* $\lim(z_n) = \ell \in \mathbb{C}$ *et* $\lim(z'_n) = \ell' \in \mathbb{C}$, *alors* $\lim(z_n z'_n) = \ell\ell'$,
e) *Si* $\lim(z_n) = \ell \in \mathbb{C}$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *alors* $\lim(\lambda z_n) = \lambda\ell$,
f) *Si* $\lim(z_n) = \ell \in \mathbb{C}$ *et* $\ell \neq 0$, *alors la suite* $(\frac{1}{z_n})$ *est définie à partir d'un certain rang* n_0 *et la suite* $\left(\frac{1}{z_n}\right)_{n\geq n_0}$ *est convergente de limite* $\frac{1}{\ell}$.
g) *Si la suite* (z_n) *est convergente, alors toute suite extraite de* (z_n) *est convergente vers* $\lim(z_n)$,
h) *La suite* (z_n) *est convergente vers* $\ell \in \mathbb{C}$ *si et seulement si les deux suites extraites* (z_{2n}) *et* (z_{2n+1}) *sont convergentes vers* ℓ.

Le théorème suivant permet de se ramener à l'étude des suites réelles.

***Théorème* 109–** *Soit* (z_n) *une suite complexe et soit* $\ell = a + ib \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. *Alors, la suite* (z_n) *converge vers* $\ell = a + ib$ *si et seulement si la suite réelle* $(\mathfrak{Re}(z_n))$ *converge vers* a *et la suite réelle* $(\mathfrak{Im}(z_n))$ *converge vers* b.

Démonstration. a) Supposons la convergence de la suite complexe (z_n) vers $\ell = a + ib \in \mathbb{C}$ et montrons la convergence des suites réelles $(\mathfrak{Re}(z_n))$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))$ vers respectivement a et b.
On sait que $\lim(z_n) = \ell$ équivaut à $\lim(|z_n - \ell|) = 0$.
Or, $|\mathfrak{Re}(z_n) - a| = |\mathfrak{Re}(z_n - \ell)| \leq |z_n - \ell|$ et donc $|\mathfrak{Re}(z_n) - a| \to 0$ c'est-à-dire $\mathfrak{Re}(z_n) \to a$.
De même, $|\mathfrak{Im}(z_n) - b| = |\mathfrak{Im}(z_n - \ell)| \leq |z_n - \ell|$ et donc $|\mathfrak{Im}(z_n) - b| \to 0$ c'est-à-dire $\mathfrak{Im}(z_n) \to b$.

b) Supposons $\mathfrak{Re}(z_n) \to a \in \mathbb{R}$ et $\mathfrak{Im}(z_n) \to b \in \mathbb{R}$ et montrons la convergence de la suite complexe (z_n) vers $\ell = a + ib$. On a :

$$\begin{aligned} |z_n - (a+ib)| &= |(\mathfrak{Re}(z_n) - a) + i(\mathfrak{Im}(z_n) - b)| \\ &\leq |\mathfrak{Re}(z_n) - a| + |\mathfrak{Im}(z_n) - b|. \end{aligned}$$

On obtient donc : $|z_n - (a+ib)| \to 0 + 0 = 0$.

□

Exemple 110– Soit $z_n = \frac{in}{n+i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{n}{n^2+1} + i\,\frac{n^2}{n^2+1}$.
Puisque $\mathfrak{Re}(z_n) = \frac{n}{n^2+1} \to 0$ et $\mathfrak{Im}(z_n) = \frac{n^2}{n^2+1} \to 1$, on obtient $\lim(z_n) = 0 + 1.i = i$.