Département de mathématiques et informatique
L1S1, module A ou B

# Chapitre 2

# Matrices

Emmanuel Royer

emmanuel.royer@uca.fr

# Table des matières



**Référence** François Liret & Dominique Martinais, « Cours de mathématiques, Algèbre 1$^{re}$ année ». Dunod.

**Avertissement préliminaire.** Dans tout ce chapitre, on fixe $\mathbb{K}$ l'un des trois corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ceci signifie que vous pouvez lire le chapitre en remplaçant la lettre $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}$ puis le relire en remplaçant la lettre $\mathbb{K}$ par $\mathbb{C}$ et le relire une troisième fois en remplaçant la lettre $\mathbb{K}$ par $\mathbb{Q}$.

# 1 Les matrices

## 1.1) Définition

On appelle matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ la donnée :

a) d'un nombre $p$ de colonnes ;

b) d'un nombre $n$ de lignes ;

c) d'un ensemble de $np$ coefficients de $\mathbb{K}$ rangés dans un tableau de $n$ lignes et $p$ colonnes.

On numérote les coefficients avec deux indices : le premier indique le numéro de la ligne (on les numérote du haut vers le bas), le second le numéro de la colonne (on les numérote de gauche à droite). Ainsi, le coefficient $a_{ij}$ est à l'intersection de la $i^{\text{e}}$ ligne et de la $j^{\text{e}}$ colonne. On note alors $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ la matrice. On dit que la matrice est de taille $n\times p$ (lire « $n$ croix $p$ » et respecter l'ordre de lecture).

*Exemple* 1– Si

$$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 2}} = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

alors

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2$$

$$a_{21} = 3, a_{22} = 4$$

$$a_{31} = 5, a_{32} = 6.$$

*Exemple* 2–

$$(i+2j)_{\substack{1\le i\le 2\\1\le j\le 3}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7\\ 4 & 6 & 8\end{pmatrix} \qquad (-i+j)_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$

*Notation* 3– On note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n\times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

## 1.2) Matrices particulières

### 1.2.1– Matrices colonnes

Ce sont les matrices à une colonne : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

### 1.2.2– Matrices lignes

Ce sont les matrices à une ligne : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

### 1.2.3– Matrices carrées

Ce sont les matrices qui ont même nombres de lignes et de colonnes. Ce nombre de lignes et de colonnes s'appelle l'ordre de la matrice. Les coefficients ayant même indice de ligne et de colonne s'appellent les coefficients diagonaux. Par exemple, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{smallmatrix}\right)$ est une matrice carrée d'ordre 2. Les coefficients diagonaux sont 1 et 7.

*Notation* 4– On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

### 1.2.4– Matrices triangulaires inférieures

Ce sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale (c'est-à-dire d'indices $ij$ avec $j > i$) sont nuls. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 1.2.5– Matrices triangulaires supérieures

Ce sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessous de la diagonale (c'est-à-dire d'indices $ij$ avec $j < i$) sont nuls. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 1.2.6– Matrices diagonales

Ce sont les matrices carrées à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures. Les seuls coefficients pouvant être non nuls sont donc ceux de la diagonale.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On noter $\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients sont $(a_1, \dots, a_n)$.

#### 1.2.7– Matrices scalaires

Ce sont les matrices diagonales dont tous les coefficients diagonaux sont égaux. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

#### 1.2.8– Matrice identité

C'est la matrice scalaire dont tous les coefficients diagonaux valent 1. On note $\mathrm{I}_n$ la matrice identité d'ordre $n$. Par exemple :

$$\mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 1.2.9– Matrice nulle

C'est la matrice non nécessairement carrée dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,p}$ ou $0_{n\,p}$ si elle a $n$ lignes et $p$ colonnes, 0 s'il n'y a pas d'ambigüité. Par exemple :

$$0_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# 2 Calcul matriciel

## 2.1) Égalité des matrices

Deux matrices A et B sont égales, ce qu'on note A = B si
— elles ont même nombre de lignes ;
— elles ont même nombre de colonnes ;
— les coefficients à la même position sont égaux.

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, la condition d'égalité des coefficients est :

$$\text{pour tout } i \text{ dans } \{1,\dots,n\}, \text{ pour tout } j \text{ dans } \{1,\dots,p\},\ a_{ij} = b_{ij}.$$

*Exemple* 5–

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 5 \\ 3 & 4-7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2+3 \\ 3 & -3 \\ 1-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Exemple* 6–

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.2) Addition des matrices

Soit A et B deux matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant même nombre de lignes $n$ et même nombre de colonnes $p$, la somme $A+B$ de A et B est la matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes dont chaque coefficient est somme des coefficients de même position de A et de B : si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ alors $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$.

*Exemple* 7–

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 12 \\ -5 & 3 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & -7 & 21 \\ 5 & 13 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+14 & 7-7 & 12+21 \\ -5+5 & 3+13 & 21+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 33 \\ 0 & 16 & 33 \end{pmatrix}.$$

Les règles suivantes résultent des règles équivalentes sur l'addition des éléments de $\mathbb{K}$.

***Proposition* 8–** *Si* A, B *et* C *sont trois matrices de* $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

- *L'addition est associative :* $(A+B)+C = A+(B+C)$ *;*
- *la matrice nulle à n lignes et p colonnes est un élément neutre pour l'addition :* $A+0 = A$*;*
- *toute matrice admet un symétrique : en posant* $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ *on a*

$$A + (-A) = 0\ ;$$

- *l'addition est commutative :* $A+B = B+A$.

*Remarque* 9– On note $A-B$ la somme de A et du symétrique de B, autrement dit $A-B = A+(-B)$.

## 2.3) Produit d'une matrice par un élément de $\mathbb{K}$

Soit A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle produit (externe) de $\lambda$ par A, et on note $\lambda A$ la matrice dont chaque coefficient est obtenu en multipliant le coefficient de même position de A par $\lambda$ :

$$\lambda(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}.$$

*Exemple* 10–

$$3\begin{pmatrix} \pi & e^2 \\ \sin(4) & \cos(4) \\ -1 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\pi & 3e^2 \\ 3\sin(4) & 3\cos(4) \\ -3 & 3\varepsilon_0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie sans réelle difficulté la proposition suivante.

**Théorème 11–** *Soit* $\lambda, \mu$ *des éléments de* $\mathbb{K}$, $A$ *et* $B$ *des matrices de* $M_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors,*

*a)* $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

*b)* $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

*c)* $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

*d)* $1A = A$.

*Remarque* 12– Le choix, dans b) de $\lambda = \mu = 0$ montre que $0 \cdot A = 0$. Le choix de $\lambda = -\mu = 1$ montre ensuite que $(-1) \cdot A = -A$ : le produit par $-1$ de A est l'opposé de A.

## 2.4) Produit de deux matrices

### 2.4.1– Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix}$ une matrice ligne de $M_{1,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{p,1}(\mathbb{K})$ (noter que la ligne et la colonne ont même nombre d'éléments). Le produit de A par B, noté AB est la matrice $1 \times 1$ dont le coefficient est

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p.$$

*Exemple* 13– Le produit de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}.$$

### 2.4.2– Produit d'une matrice par une matrice colonne

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et $B \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne.

*Remarque* 14– Noter que A a autant de colonnes que B a de lignes.

Le produit de A par B, noté AB est la matrice colonne $n \times 1$ dont la ligne n° $i$ est le coefficient du produit de la ligne n° $i$ de A avec la colonne B et ce pour chaque numéro de ligne $i$ entre 1 et $n$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \dots + a_{1p}b_p \\ \vdots \\ a_{i1}b_1 + \dots + a_{ip}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + \dots + a_{np}b_p \end{pmatrix}.$$

*Exemple* 15– Le produit de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 3 + 1 \times 0 \\ 3 \times 1 - 1 \times 3 + 2 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.4.3– Produit d'une matrice par une matrice

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices.

*Remarque* 16– Noter que A a autant de colonnes que B a de lignes.

Le produit de A par B est la matrice $n \times q$ dont la colonne n° $j$ est le produit de A par la colonne n° $j$ de B et ce pour chaque numéro de colonne $j$ compris entre 1 et $q$ :

$$A \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & \boxed{B_2} & \cdots & \boxed{B_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{AB_1} & \boxed{AB_2} & \cdots & \boxed{AB_q} \end{pmatrix}.$$

*Exemple* 17– On veut faire le produit de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On commence par remarquer que A a trois colonnes et que B a trois lignes : le produit peut être calculé. Par ailleurs, A à 2 lignes et B a 4 colonnes, la matrice produit sera donc de taille $2 \times 4$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 \\ 3 \times 2 - 1 \times (-1) + 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 \\ 3 \times 0 - 1 \times 1 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Remarque* 18– Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$, alors pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et tout $j \in \{1,\dots,q\}$, le coefficient d'indice $ij$ de AB est

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. \tag{1}$$

### 2.4.4– Propriétés

**Restriction de définition.** Le produit des matrices A et B n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Les propriétés suivantes peuvent être démontrées par calcul en utilisant l'expression (1) des coefficients d'un produit.

**Associativité.** Soit A, B et C telles que
- le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (de sorte qu'on peut calculer AB) ;
- le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de C (de sorte qu'on peut calculer BC).

Alors

$$(AB)C = A(BC).$$

⚠ **Défaut de commutativité.** Le produit matriciel n'est pas commutatif. C'est évident lorsqu'on peut calculer AB mais pas BA (ce qui arrive si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B mais que le nombre de colonnes de B diffère du nombre de lignes de A, comme dans l'exemple 17) mais on peut aussi avoir $AB \neq BA$ lorsque A et B sont deux matrices carrées de même ordre. Ainsi, pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Rôle des matrices identité.** Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$AI_p = A \quad \text{et} \quad I_nA = A.$$

**Distributivité par rapport à l'addition.** Si A, B et C sont trois matrices telles que A et B ont même nombre de lignes et même nombre de colonnes et le nombre de lignes de C est égal au nombre de colonnes de A (et donc de B). Alors

$$(A+B)C = AC + BC.$$

Si A, B et C sont trois matrices telles que B et C ont même nombre de lignes et même nombre de colonnes et le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (et donc de C). Alors

$$A(B+C) = AB + AC.$$

**Compatibilité avec le produit externe.** Si A et B sont deux matrices telles que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\lambda(\mathrm{AB}) = (\lambda \mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\lambda \mathrm{B}).$$

⚠ **Produit nul.** Le produit de deux matrices peut-être nul alors qu'aucune des matrices n'est nulle. Par exemple, si

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\mathrm{AB} = 0 \quad \text{mais} \quad \mathrm{A} \neq 0 \text{ et } \mathrm{B} \neq 0.$$

### 2.4.5– Puissances

Si $k \geq 0$ est un entier et si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la puissance $k^{\mathrm{e}}$ de A de la façon suivante :

$$\boxed{\mathrm{A}^k = \begin{cases} \mathrm{I}_n & \text{si } k = 0 \\ \mathrm{A}^{k-1}\mathrm{A} = \underbrace{\mathrm{A} \cdots \mathrm{A}}_{\text{produit de } k \text{ copies de A}} & \text{si } k \geq 1. \end{cases}}$$

*Exemple* 19– Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}$, alors

$$\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^2\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 110 & 134 & 164 \\ 312 & 389 & 477 \\ 558 & 697 & 861 \end{pmatrix} \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3946 & 4920 & 6064 \\ 11456 & 14278 & 17588 \\ 20632 & 25700 & 31654 \end{pmatrix}.$$

La proposition suivante est aisément démontrée.

***Proposition* 20–** *Soit* A *est une matrice carrée, soit $k$ et $\ell$ sont deux entiers.*

$$\mathrm{A}^k\mathrm{A}^\ell = \mathrm{A}^{k+\ell},$$

$$\left(\mathrm{A}^k\right)^\ell = \mathrm{A}^{k\ell},$$

$$(\lambda \mathrm{A})^k = \lambda^k \mathrm{A}^k \quad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

*Exercice* 21– Montrer que si $\mathrm{A} = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ est une matrice diagonale alors, $\mathrm{A}^k$ est la matrice diagonale obtenue en élevant à la puissance $k$ les coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire

$$\mathrm{A}^k = \mathrm{Diag}(a_1^k, \ldots, a_n^k).$$

On a démontré dans $\mathbb{C}$ la formule du binôme de Newton : si $z$ et $w$ sont deux nombres complexes, alors

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k$$

pour tout entier $n \geq 0$. En relisant la preuve, vous verrez l'importance du fait que le produit de $z$ et $w$ commute. Dès lors que le produit de deux matrices commute, on peut faire la même preuve.

***Proposition* 22–** *Soit* A *et* B *deux matrices carrées telles que* AB = BA *et* $n \geq 0$ *un entier. Alors*

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^{n-k} \mathrm{B}^k.$$

*Exemple* 23– Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. La matrice $\mathrm{I}_3$ commute avec A (elle commute avec toute matrice). Notant I au lieu de $\mathrm{I}_3$, on a donc

$$\begin{aligned}
(\mathrm{A}+\mathrm{I})^3 &= \mathrm{A}^3 + 3\mathrm{A}^2\mathrm{I} + 3\mathrm{A}\mathrm{I}^2 + \mathrm{I}^3 \\
&= \mathrm{A}^3 + 3\mathrm{A}^2 + 3\mathrm{A} + \mathrm{I} \\
&= \begin{pmatrix} 468 & 576 & 684 \\ 1062 & 1305 & 1548 \\ 1656 & 2034 & 2412 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 562 & 690 & 819 \\ 1272 & 1564 & 1854 \\ 1983 & 2436 & 2890 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

*Exemple* 24– Considérons les matrices $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Elles ne commutent pas car $\mathrm{TS} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors que $\mathrm{ST} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On calcule

$$(\mathrm{T}+\mathrm{S})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

alors que

$$\mathrm{T}^2 + 2\mathrm{TS} + \mathrm{S}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En revanche on vérifiera $(\mathrm{T}+\mathrm{S})^2 = \mathrm{T}^2 + \mathrm{TS} + \mathrm{ST} + \mathrm{S}^2 = (\mathrm{S}+\mathrm{T})^2$.

### 2.4.6– Inverse d'une matrice carrée

Si $x$ est un réel non nul, il admet un inverse : c'est un réel $y = 1/x$ tel que $xy = 1$ et par commutativité, $yx = 1$. La multiplication n'étant pas commutative dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, il faut *a priori* prendre des précautions.

*Définition 25– Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée d'ordre n. Une matrice* B *carrée d'ordre n est appelée* inverse à droite *de* A *si* $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ *et* inverse à gauche *de* A *si* $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$.

Si une matrice A admet un inverse à droite B et un inverse à gauche C alors B = C et on peut donc dire que B est un inverse de A sans ambigüité. Montrons le en calculant CAB de deux façons grâce à l'associativité du produit matriciel : $(\mathrm{CA})\mathrm{B} = \mathrm{C}(\mathrm{AB})$ donc $\mathrm{I}_n\mathrm{B} = \mathrm{CI}_n$ puis $\mathrm{B} = \mathrm{C}$.

Par ailleurs, si une matrice A admet un inverse à droite et à gauche, cet inverse est unique. Supposons que B et C sont deux inverses à droite et à gauche : $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{AC} = \mathrm{CA} = \mathrm{I}_n$. Alors B = C car

$$\mathrm{C} = \mathrm{CI}_n = \mathrm{C}(\mathrm{AB}) = (\mathrm{CA})\mathrm{B} = \mathrm{I}_n\mathrm{B} = \mathrm{B}.$$

*Définition 26– Une matrice carrée est dite* inversible *si elle admet un inverse à droite et à gauche. Cet inverse est alors unique. On note* $\mathrm{A}^{-1}$ *l'inverse de la matrice inversible* A. *Si* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, *on a* $\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

***Proposition 27–*** *Soit* A *une matrice inversible et* $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

1) *La matrice* $\mathrm{A}^{-1}$ *est inversible d'inverse* A.
2) *La matrice* $\lambda\mathrm{A}$ *est inversible d'inverse* $\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{A}^{-1}$.

*Exercice 28–* Démontrer la proposition 27.

*Exemple 29–* Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Vous vérifierez que B est inverse de A en montrant $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_2$ et $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_2$. Nous montrerons plus loin comment calculer l'inverse d'une matrice inversible.

*Exercice 30–* 1) Montrer que la matrice nulle n'est pas inversible.

2) Si $a_1, \ldots, a_n$ sont non nuls, montrer que la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible d'inverse $\mathrm{Diag}(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$.

On montre comment se comporte l'inversion vis-à-vis du produit.

***Théorème 31–*** *Soit* A *et* B *deux matrices carrées inversibles de même taille. Alors le produit* AB *est inversible et son inverse est* $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.

⚠Il faut prendre garde au changement de l'ordre de la multiplication lorsqu'on prend l'inverse d'un produit.

*Démonstration du théorème 31.* Il suffit de calculer

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

et

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = BB^{-1} = I.$$

□

Le théorème suivant est plus compliqué mais il permet en pratique d'oublier la distinction entre inverse à droite et à gauche. Il est démontré en annexe (voir § A.3).

***Théorème* 32–** *Si une matrice carrée admet un inverse à gauche, alors elle admet un inverse à droite. Elle est donc inversible.*

Ce théorème implique qu'étant donné une matrice carrée A, si on trouve une matrice de même taille B telle que $AB = I$ alors $BA = I$ et $B = A^{-1}$. Dans l'exemple 29 il suffit donc de montrer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour déduire

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

On peut alors parler de puissances négatives d'une matrice inversible. Si A est inversible, la réitération du théorème 31 montre que $A^k$ est inversible pour tout entier $k \geq 0$ d'inverse $\left(A^{-1}\right)^k$. On pose alors

$$\boxed{A^{-k} = (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}.}$$

### 2.4.7– Transposée d'une matrice

*Définition* 33– *Si* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ *est une matrice à n lignes et p colonnes, on appelle transposée de* A *et on note* ${}^tA$ *la matrice à p lignes et n colonnes dont le coefficient de la ligne nº i et colonne nº j est* $a_{ji}$. *Ainsi,* ${}^t\left((a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\right) = (a_{ji})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n}}$.

Les colonnes de ${}^tA$ sont donc les lignes de A ou, ce qui revient au même, les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A.

*Exemple* 34– La transposée de $\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$ est

$${}^t\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}.$$

La proposition suivante se vérifie par calcul.

***Proposition* 35–** *Soit* A *et* B *deux matrices et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors,*

*a)* ${}^t\left({}^tA\right) = A \qquad (A \in M_{n,p}(\mathbb{K}))$

*b)* ${}^t(\lambda A) = \lambda \cdot {}^tA \qquad (A \in M_{n,p}(\mathbb{K}))$

*c)* ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \qquad (A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K}))$

*d)* ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA \qquad (A \in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in M_{p,q}(\mathbb{K}))$

⚠ Il faut prendre garde au changement de l'ordre de la multiplication lorsqu'on prend la transposée d'un produit.

***Proposition* 36–** *Si* A *est une matrice carrée inversible alors sa transposée est inversible et*

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right).$$

*Démonstration.* Il suffit de calculer ${}^tA \cdot {}^t\left(A^{-1}\right) = {}^t\left(A^{-1}A\right) = {}^tI = I$. □

# 3 Systèmes d'équations linéaires

## 3.1) Remarques générales

Un système d'équations linéaires est un ensemble d'équations d'inconnues $x_1, \dots, x_p$ de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où pour tout $i$ et $j$ les coefficients $a_{ij}$ et $b_i$ sont fixés dans $\mathbb{K}$. Si on note

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

on cherche $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ tel que $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. La matrice colonne B s'appelle le *second membre* du système. Si $\mathrm{B} = 0$, on dit que le système est un système d'équations linéaires *homogènes*. Les systèmes d'équations linéaires homogènes admettent toujours au moins une solution : la matrice colonne nulle.

***Proposition* 37–** *Si* A *est une matrice carrée inversible, le système* $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ *a une solution unique. Cette solution est* $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$.

*Démonstration.* Si $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ alors $\mathrm{AX} = \mathrm{A}(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}) = (\mathrm{AA}^{-1})\mathrm{B} = \mathrm{B}$ et donc X est solution. Réciproquement, si $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ alors $\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AX}) = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ donc $(\mathrm{AA}^{-1})\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ et $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$. □

*Exemple* 38– Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc A est inversible d'inverse $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. On en déduit que le système

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

a une unique solution donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{A}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

autrement dit $x = 1/3$ et $y = 7/3$.

Nous montrons ensuite que l'ensemble des solutions de $AX = B$ se déduit de la connaissance d'une solution et de l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires homogènes associé $AX = 0$.

***Proposition* 39–** *Soit* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. *S'il existe* $X_0 \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ *tel que* $AX_0 = B$, *alors l'ensemble des solutions de* $AX = B$ *est l'ensemble des matrices colonnes* $X = X_0 + Y$ *où* $Y$ *parcourt l'ensemble des solutions de* $AY = 0$.

*Démonstration.* Soit $X = M_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y = X - X_0$, alors $AX = A(Y + X_0) = AY + AX_0 = AY + B$. On en déduit que si $X$ vérifie $AX = B$ alors $AY = 0$. On en déduit aussi la réciproque, à savoir que si $AY = 0$ alors $AX = B$. □

***Proposition* 40–** *Soit* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. *On suppose que les matrices colonnes* $X_1$ *et* $X_2$ *de* $M_{p,1}(\mathbb{K})$ *sont solutions de* $AX = 0$. *Alors*

*a) (Stabilité par addition) la matrice colonne* $X_1 + X_2$ *est solution de* $AX = 0$

*b) (Stabilité par produit externe) si* $\lambda \in \mathbb{K}$, *la matrice colonne* $\lambda X_1$ *est solution de* $AX = 0$.

*Démonstration.* Le premier point résulte de $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0$, le second de $A(\lambda X) = \lambda AX = 0$. □

Cette proposition implique en particulier que s'il existe une solution non nulle à un système linéaire homogène alors il existe une infinité de solutions (si $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution non nulle, $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$ est solution pour tous les $\lambda \in \mathbb{K}$).

## 3.2) Résolution des systèmes

L'objectif de cette partie est de montrer comment résoudre n'importe quel système d'équations linéaires. On s'en servira en particulier pour inverser les matrices. Le principe général est de mettre le système en *échelons*.

Définition 41– *Soit* $A$ *une matrice non nulle. On dit que* $A$ *est en échelons lorsqu'elle a les propriétés suivantes :*

*1) chaque ligne non nulle a son premier coefficient non nul égal à* 1 *;*

*2) toute ligne suivant une ligne nulle est nulle ;*

*3) si une ligne non nulle a son premier coefficient non nul sur la colonne nº* $j$, *alors la ligne suivante, si elle n'est pas nulle, a son premier coefficient non nul sur une colonne nº* $k > j$.

*Pour dire qu'une matrice est en échelons, on dit aussi qu'elle est échelonnée.*

Voilà la forme générale d'une matrice non nulle en échelons.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ast & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ast & \dots & \dots & \dots & \dots & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ast & \dots & \dots & \dots & \ast \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\ast$ désigne n'importe quel élément de $\mathbb{K}$.

*Exemple* 42– Les matrices carrées d'ordre 2 en échelons sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \ast \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \ast \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $3 \times 2$ en échelons sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \ast \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \ast \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $2 \times 3$ en échelons sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ast \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ast \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \ast & \ast \\ 0 & 1 & \ast \end{pmatrix}.$$

*Remarque* 43– Il faut remarquer que

1) si une matrice carrée est en échelons et n'a pas de ligne nulle, alors elle est triangulaire supérieure avec des 1 pour coefficients diagonaux ;
2) si une matrice en échelons a strictement plus de lignes que de colonnes, ses dernières lignes sont nécessairement nulles.

Pour mettre une matrice en échelons, on va utiliser des opérations élémentaires sur les lignes [a]. Ces opérations permettent de transformer tout système en un système plus simple à résoudre mais dont les solutions sont les mêmes.

*Définition* 44– *Les* opérations élémentaires sur les lignes *sont*

*a) multiplication d'une ligne par* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ *;*

*b) échange de deux lignes ;*

*c) ajout à une ligne d'une* autre *ligne multipliée par* $\lambda \in \mathbb{K}$.

---

*a*. Chacune de ces opérations correspond à la multiplication à gauche de la matrice par une matrice dite « élémentaire » (voir l'annexe A).

*Exemple* 45– Partons de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. En multipliant la deuxième ligne par 2 on obtient

$$L_2 \leftarrow 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si sur cette nouvelle matrice, on échange les deuxième et troisième lignes, on obtient

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on ajoute à la troisième ligne de cette matrice $-10$ fois la première pour obtenir

$$L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix}.$$

Nous admettons le théorème suivant qui sera démontré en annexe (voir § A.2).

***Théorème* 46–** *Toute matrice non nulle peut être transformée en une matrice en échelons à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.*

*Exemple* 47– Nous mettons en échelons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -9 & -9 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -\dfrac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \tfrac{2}{3}L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow \dfrac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \dfrac{3}{16}L_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et cette dernière matrice est en échelons.

*Exemple* 48– Nous mettons en échelons la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \tfrac{1}{2} L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et cette dernière matrice est en échelons.

*Définition* 49– *Soit* A *une matrice en échelons. On appelle* ligne principale *toute ligne non nulle. Si* $AX = B$ *est un système d'équations linéaires, on appelle* équation principale *toute équation correspondant à une ligne principale de* A *et* inconnue principale *toute inconnue correspondant au premier coefficient non nul d'une ligne principale.*

*Exemple* 50– Considérons le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il est en échelons. Les lignes principales de la matrice sont ses deux premières, et les équations principales sont

$$\begin{cases} x - 2y \quad\;\; + 2t = 2 \\ \qquad\; y - z + 3t = 0. \end{cases}$$

Les inconnues principales sont donc $x$ et $y$.

Nous donnons maintenant une méthode de résolution des systèmes appelées *méthode de Gauss*. Dès lors que nous savons qu'une matrice peut toujours être transformée en matrice en échelons par des opérations élémentaires sur les lignes, nous voyons que cette méthode s'applique à tout système. Qu'elle donne effectivement les solutions du système de départ résulte du fait qu'appliquer des transformations élémentaires revient à multiplier la matrice à gauche par une matrice inversible. Ce fait sera démontré en annexe (voir le théorème 108).

***Théorème* 51** (Méthode de Gauss)– *Soit* A *une matrice ayant au moins deux lignes et une colonne. Soit* B *une matrice colonne ayant autant de lignes que* A*. On cherche à résoudre le système* $AX = B$.

1) *En appliquant une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de* A *et* B*, on transforme le système* $AX = B$ *en un système* $\widetilde{A}X = \widetilde{B}$ *avec* $\widetilde{A}$ *en échelons ;*
2) *ce système admet au moins une solution si et seulement si les seconds membres des équations non principales sont nuls ;*
3) *s'il y a au moins une solution, on obtient toutes les solutions en considérant les inconnues non principales comme des paramètres pouvant prendre toutes les valeurs de* $\mathbb{K}$ *et en exprimant les inconnues principales en fonctions de ces paramètres ;*
4) *l'ensemble obtenu est l'ensemble des solutions du sytème de départ* $AX = B$.

*Exemple* 52– On veut résoudre le système

$$\begin{cases} x - 2y \phantom{-z} + t = 2 \\ x - y - z + 4t = 2 \\ x - 3y + z - 2t = 2 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On met en échelons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ en appliquant les mêmes opérations à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On travaille donc sur la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & \vdots & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice correspond au système

$$\begin{cases} x-2y \quad\quad + \; t = 2 \\ \quad\quad y - z + 3t = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 = 0. \end{cases}$$

Il n'y a qu'une équation non principale, elle est donnée par la dernière ligne. Le second membre de cette équation est 0 donc il y a au moins une solution [b]. Les inconnues principales sont les premières des lignes principales donc $x$ et $y$. Les solutions sont donc exprimées en fonctions de $z$ et $t$ prises en paramètres : $y = z - 3t$ d'après la deuxième équation et $x = 2 + 2z - 7t$ en reportant $y$ dans la première équation. Cela revient à dire les deux choses suivantes :

1) pour n'importe quelles valeurs de $z$ et $t$, les quadruplets $(x, y, z, t)$ avec $x = 2+2z-7t$ et $y = z - 3t$ sont des solutions du système

2) si un quadruplet $(x, y, z, t)$ est solution du système alors $x = 2 + 2z - 7t$ et $y = z - 3t$.

*Exemple* 53– On veut résoudre le système

$$\begin{cases} \quad\; y+z=2 \\ x+y+z=2 \\ x \quad\; +z=1 \\ x+y-z=0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On met en échelons la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ en appliquant les mêmes opérations à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On travaille donc sur la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

*b*. Si on avait choisi $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ au lieu de $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme second membre du système de départ, on aurait obtenu 1 comme second membre de l'équation non principale du système échelonné et le système n'aurait pas eu de solution.

$$
\begin{array}{ll}
L_1 \leftrightarrow L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \\
L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \\
L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Cette matrice correspond au système

$$
\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad\; y + z = 2 \\ \qquad\;\; z = 1 \\ \qquad\;\; 0 = 0. \end{cases}
$$

Il n'y a qu'une équation non principale, elle est donnée par la dernière ligne. Le second membre de cette équation est 0 donc il y a au moins une solution. Les inconnues principales sont les premières des lignes principales donc $x$, $y$ et $z$. On trouve $z = 1$ puis $y = 1$ et enfin $x = 0$.

*Remarque* 54– La méthode de Gauss implique que si un système, après mise en échelons, n'a que des inconnues principales alors il a une solution unique si les équations non principales ont 0 comme second membre et n'a aucune solution si l'une des équations non principales au moins a un second membre non nul.

**Corollaire 55–** *Soit* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. *Si* $p > n$ *alors le système* $AX = 0$ *admet une infinité de solutions.*

*Démonstration.* Puisqu'il y a plus d'inconnues que d'équations, il y a nécessairement des inconnues non principales. De plus, les seconds membres sont tous nuls. □

La remarque suivante est importante pour la résolution des systèmes carrés [c]. Elle est justifiée en annexe (voir page 52).

*Remarque* 56– Si A est carrée et si la matrice en échelons obtenue n'a pas de ligne nulle, on peut continuer à faire des opérations élémentaires pour transformer A en I. En appliquant les mêmes opérations à B, on obtient B′ de sorte que AX = B et IX = B′ ont mêmes solutions. Autrement dit, X = B′.

*Exemple* 57– On résout le système

$$\begin{cases} x + 5y - z = 7 \\ 3x + 16y + 4z = 2 \\ 2x + 9y + z = 3 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 16 & 4 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

en travaillant sur la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & \vdots & 7 \\ 3 & 16 & 4 & \vdots & 2 \\ 2 & 9 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 7 & \vdots & -19 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & -11 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 7 & \vdots & -19 \\ 0 & 0 & 10 & \vdots & -30 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{10}L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 7 & \vdots & -19 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{pmatrix}.$$

On a obtenu une matrice carrée en échelons sans ligne nulle, le système a donc une solution unique. On poursuit l'application de transformations élémentaires sur les

*c*. Ayant autant d'équations que d'inconnues.

lignes pour faire apparaître l'identité :

$$L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -36 & 102 \\ 0 & 1 & 7 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 36L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 7 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 7L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Le système a donc pour solution $x = -6$, $y = 2$ et $z = -3$.

***Corollaire* 58–** *Soit* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in M_{p,1}$. *Si* $p > n$ *alors le système* $AX = B$ *soit n'admet aucune solution, soit admet une infinité de solutions.*

# 4 Inversion de matrices

Chercher un inverse pour la matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, c'est chercher une matrice $B = (x_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ telle que $AB = I$. Cette équation se traduit en un système d'équations pour chaque colonne :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_{1,1} + a_{1,2}x_{2,1} + \cdots + a_{1,n}x_{n,1} = 1 \\ a_{2,1}x_{1,1} + a_{2,2}x_{2,1} + \cdots + a_{2,n}x_{n,1} = 0 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_{1,1} + a_{n,2}x_{2,1} + \cdots + a_{n,n}x_{n,1} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{1,1}x_{1,2} + a_{1,2}x_{2,2} + \cdots + a_{1,n}x_{n,2} = 0 \\ a_{2,1}x_{1,2} + a_{2,2}x_{2,2} + \cdots + a_{2,n}x_{n,2} = 1 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_{1,2} + a_{n,2}x_{2,2} + \cdots + a_{n,n}x_{n,2} = 0 \end{cases} \cdots$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_{1,n} + a_{1,2}x_{2,n} + \cdots + a_{1,n}x_{n,n} = 0 \\ a_{2,1}x_{1,n} + a_{2,2}x_{2,n} + \cdots + a_{2,n}x_{n,n} = 0 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_{1,n} + a_{n,2}x_{2,n} + \cdots + a_{n,n}x_{n,n} = 1. \end{cases}$$

On veut donc résoudre les $n$ systèmes

$$A\begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \\ \vdots \\ x_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, A\begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme tous ces systèmes sont associés à la même matrice, ils vont être résolus en appliquant la même succession d'opérations élémentaires, et seules les second membres seront différents à chaque étape. On applique donc la méthode suivante.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On construit une matrice à $n$ lignes et $2n$ colonnes $(A|I)$ en écrivant la matrice identité d'ordre $n$ à droite de A. En appliquant des opérations élémentaires, on transforme la matrice A en la matrice en échelons $\widetilde{A}$. On applique les mêmes opérations à I. On obtient $(\widetilde{A}|\widetilde{I})$. Si $\widetilde{A}$ a une ligne nulle, elle n'est pas inversible et A n'est pas inversible. Sinon, en appliquant de nouvelles opérations élémentaires, on transforme $\widetilde{A}$ en I. Les mêmes opérations élémentaires transforment $\widetilde{I}$ en $A^{-1}$. Cette méthode est justifiée en annexe (voir § A.5).

*Exemple* 59– On cherche à inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. On travaille donc sur

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2}L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow -\dfrac{2}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \dfrac{1}{3}L_3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow -3L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

La matrice de gauche est en échelons et sans ligne nulle. On en déduit que A est inversible et on continue les opérations élémentaires pour avoir I à gauche :

$$\begin{array}{ll}
L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_3 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \\
L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_3 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).
\end{array}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Exemple* 60– On cherche à inverser $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. On travaille donc sur

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll}
L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right).
\end{array}$$

La dernière ligne de la matrice non augmentée est nulle, donc la matrice A n'est pas inversible.

La méthode d'inversion de matrices présentée implique en particulier le résultat suivant.

***Théorème 61–*** *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée. Elle est inversible si et seulement si le système* $AX = 0$ *(en* $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$*) n'admet que* $0$ *comme solution.*

*Démonstration.* On a déjà vu que si A est inversible alors 0 est la seule solution. Supposons que A ne soit pas inversible. Après mise en échelon, le système $AX = 0$ est donc équivalent à un système avec une ligne non principale (puisque A est transformée en une matrice ayant au moins une ligne nulle). Le second membre de ce nouveau système est 0 et il a donc une infinité de solutions. □

# 5 Déterminants

On associe à chaque matrice un nombre permettant de déterminer si elle est inversible : le déterminant. Le déterminant d'une matrice n'est défini que si la matrice est *carrée*.

*Exercice* 62– On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Si $a \neq 0$, montrer, à l'aide de la partie 4 que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
2) Si $a = 0$, montrer que A est inversible si et seulement si $bc \neq 0$.

L'exercice 62 montre qu'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si la quantité $ad - bc$ est non nulle. L'introduction du déterminant permet de généraliser la condition d'inversibilité $ad - bc \neq 0$ à des matrices d'ordre quelconque.

## 5.1) Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Le déterminant de A, noté $\det(A)$, est l'élément de $\mathbb{K}$ définit par « descente » de la façon suivante :

a) si $n = 1$ alors $A = (a_{11})$ et $\det(A) = a_{11}$ ;
b) si $n \geq 2$, alors $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31} - \cdots + (-1)^{n-1} a_{n1}\Delta_{n1}$$

où $\Delta_{i1}$ est le déterminant de la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en enlevant à A la ligne n° $i$ et la première colonne.

*Exemple* 63– On calcule

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\det\big((d)\big) - c\det\big((b)\big) = ad - bc.$$

*Exemple* 64– On calcule

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} &= 1\cdot\det\begin{pmatrix}5&6\\8&9\end{pmatrix} - 4\cdot\det\begin{pmatrix}2&3\\8&9\end{pmatrix} + 7\cdot\det\begin{pmatrix}2&3\\5&6\end{pmatrix}\\ &= (5\times 9 - 6\times 8) - 4(2\times 9 - 3\times 8) + 7(2\times 6 - 3\times 5)\\ &= 0.\end{aligned}$$

## 5.2) Propriétés

La proposition suivante est centrale dans le calcul des déterminants. Elle permet en particulier de calculer le déterminant de toute matrice en échelons.

**Proposition 65–** *Le déterminant de toute matrice triangulaire supérieure est le produit de ses éléments diagonaux :*

$$\det\begin{pmatrix}a_{11}&*&\dots&\dots&*\\0&a_{22}&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&*\\0&\dots&\dots&0&a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

*Démonstration.* On note A la matrice triangulaire supérieure. On a $\det(\mathrm{A}) = a_{11}\Delta_{11}$ car $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$. Ainsi,

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11}\det\begin{pmatrix}a_{22}&*&\dots&\dots&*\\0&a_{33}&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&*\\0&\dots&\dots&0&a_{nn}\end{pmatrix}$$

et le résultat s'obtient par réitération. □

*Exemple* 66– On calcule

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix} = 1\times 4\times 6 = 24.$$

*Exemple* 67– La matrice identité $\mathrm{I}_n$ a 1 pour déterminant.

On étudie ensuite le devenir du déterminant lorsqu'on applique des transformations élémentaires sur les lignes.

***Proposition 68–*** *Si on multiplie l'une des lignes d'une matrice par un élément de $\mathbb{K}$ alors le déterminant de cette matrice est multiplié par le même élément de $\mathbb{K}$.*

*Démonstration.* On considère l'hypothèse $\mathcal{P}(n)$ : « si on multiplie par un élément de $\mathbb{K}$ l'une des lignes d'une matrice d'ordre $n$ alors le déterminant de cette matrice est multiplié par le même élément de $\mathbb{K}$ ». L'hypothèse $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque le déterminant d'une matrice d'ordre 1 est son unique coefficient qui est aussi son unique ligne. Soit $n \geq 2$. On suppose vraie l'hypothèse $\mathcal{P}(n-1)$ et on considère une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ d'ordre $n$. On note $\widehat{\mathrm{A}} = (\widehat{a}_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice d'ordre $n$ obtenue en multipliant par $\lambda$ la ligne n° $\ell$ de A, on a donc

$$\widehat{a}_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \neq \ell \\ \lambda a_{i,j} & \text{si } i = \ell. \end{cases} \tag{2}$$

On a

$$\det(\mathrm{A}) = a_{1,1}\Delta_{1,1} - a_{2,1}\Delta_{2,1} + a_{3,1}\Delta_{3,1} - \cdots + (-1)^{n-1}a_{n,1}\Delta_{n,1}.$$

Pour tout $i$, on note $\widehat{\Delta}_{i,1}$ le déterminant de $\widehat{\mathrm{A}}$ privée de sa ligne n° $i$ et de sa colonne n° 1. On a aussi

$$\det(\widehat{\mathrm{A}}) = \widehat{a}_{1,1}\widehat{\Delta}_{1,1} - \widehat{a}_{2,1}\widehat{\Delta}_{2,1} + \widehat{a}_{3,1}\widehat{\Delta}_{3,1} - \cdots + (-1)^{n-1}\widehat{a}_{n,1}\widehat{\Delta}_{n,1}.$$

Utilisant (2) on déduit

$$\begin{aligned}\det(\widehat{\mathrm{A}}) = a_{1,1}\widehat{\Delta}_{1,1} + \cdots + (-1)^{\ell-2}a_{\ell-1,1}\widehat{\Delta}_{\ell-1,1} + (-1)^{\ell-1}\lambda a_{\ell,1}\widehat{\Delta}_{\ell,1} + (-1)^{\ell}a_{\ell+1,1}\widehat{\Delta}_{\ell+1,1} + \cdots \\ \cdots + (-1)^{n-1}a_{n,1}\widehat{\Delta}_{n,1}\end{aligned}$$

Soit $i \neq \ell$ alors $i < \ell$ ou $i > \ell$. Le déterminant $\widehat{\Delta}_{i,1}$ est donc le déterminant d'une des matrices d'ordre $n-1$ suivantes

$$\begin{pmatrix} a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\ell-1,2} & \cdots & a_{\ell-1,n} \\ \lambda a_{\ell,2} & \cdots & \lambda a_{\ell,n} \\ a_{\ell+1,2} & \cdots & a_{\ell+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\ell-1,2} & \cdots & a_{\ell-1,n} \\ \lambda a_{\ell,2} & \cdots & \lambda a_{\ell,n} \\ a_{\ell+1,2} & \cdots & a_{\ell+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, l'hypothèse $\mathcal{P}(n-1)$ implique $\widehat{\Delta}_{i,1} = \lambda\Delta_{i,1}$. De plus, le déterminant $\widehat{\Delta}_{\ell,1}$ est celui de $\widehat{\mathrm{A}}$ à qui on a enlevé sa ligne n° $\ell$ (et sa première colonne), c'est-à-dire la seule ligne qui distingue $\widehat{\mathrm{A}}$ de A ; on a donc $\widehat{\Delta}_{\ell,1} = \Delta_{\ell,1}$. Au final, on a $\det(\widehat{\mathrm{A}}) = \lambda \det \mathrm{A}$. □

*Exemple* 69– On a $\det\begin{pmatrix}4 & 8\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 4(-2) = -8.$

*Exemple* 70– On a $\det\begin{pmatrix}4 & 8\\ 12 & 16\end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 12 & 16\end{pmatrix} = 4\cdot 4\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = -32.$

On a en particulier l'important corollaire suivant.

**Corollaire 71–** *Le déterminant d'une matrice carrée ayant une ligne nulle est* 0.

*Démonstration.* Si A a une ligne nulle, en multipliant cette ligne par 0, on ne change pas A mais on multiplie le déterminant de A par 0. On a donc

$$\det(\mathrm{A}) = 0\det(\mathrm{A}) = 0.$$

□

On retiendra aussi le corollaire suivant.

**Corollaire 72–** *Si* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *alors* $\det(\lambda\mathrm{A}) = \lambda^n \det(\mathrm{A})$.

*Démonstration.* Multiplier A par $\lambda$ revient à multiplier chacune de ses lignes par $\lambda$. On applique une fois la proposition pour chaque ligne ce qui fournit $n$ multiplications du déterminant par $\lambda$. □

Nous étudions maintenant le devenir du déterminant par ajout d'une ligne.

**Proposition 73–** *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée dont on note* $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n$ *les lignes. Soit* $\mathrm{L}' \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ *une ligne. Alors*

$$\det\begin{pmatrix}\mathrm{L}_1\\ \vdots\\ \mathrm{L}_{i-1}\\ \mathrm{L}_i\\ \mathrm{L}_{i+1}\\ \vdots\\ \mathrm{L}_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\mathrm{L}_1\\ \vdots\\ \mathrm{L}_{i-1}\\ \mathrm{L}'\\ \mathrm{L}_{i+1}\\ \vdots\\ \mathrm{L}_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\mathrm{L}_1\\ \vdots\\ \mathrm{L}_{i-1}\\ \mathrm{L}_i + \mathrm{L}'\\ \mathrm{L}_{i+1}\\ \vdots\\ \mathrm{L}_n\end{pmatrix}.$$

La preuve se fait par récurrence sur l'ordre des matrices, de la même façon que pour la preuve de la proposition 68.

⚠ Il faut remarquer que dans l'énoncé précédent, on n'a changé qu'*une* ligne. Pour ajouter plusieurs lignes, il faut donc appliquer la proposition plusieurs fois. Par exemple, si on modifie deux lignes :

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{j-1} \\ L_j + L'_j \\ L_{j+1} \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i + L'_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{j-1} \\ L_j \\ L_{j+1} \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i + L'_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{j-1} \\ L'_j \\ L_{j+1} \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i + L'_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{j-1} \\ L_j \\ L_{j+1} \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{j-1} \\ L_j \\ L_{j+1} \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L'_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{j-1} \\ L'_j \\ L_{j+1} \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n. \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{j-1} \\ L'_j \\ L_{j+1} \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L'_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n. \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

*Exemple* 74– On calcule

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 18\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

*Exercice* 75– Montrer que le déterminant de l'exemple 74 est nul.

*Remarque* 76– Les propositions 68 et 73 peuvent se résumer de la façon suivante :

$$\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i + \lambda L_i' \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i' \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Il reste une opération élémentaire que nous n'avons pas étudiée : l'échange de lignes.

***Proposition 77–*** *Si on échange deux lignes d'une matrice carrée, le déterminant est multiplié par* $-1$.

*Démonstration.* Pour tout $k \geq 2$, on appelle $H(k)$ la propriété « si on échange deux lignes d'une matrice d'ordre $k$, le déterminant est multiplié par $-1$ ». Pour les matrices d'ordre 2, il suffit de remarquer que

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = -(cb - ad) = -\det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

pour conclure que $H(2)$ est vraie. Soit $n \geq 3$. On suppose que $H(n-1)$ est vraie. Soit alors $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice d'ordre $n$. On échange deux lignes consécutives, de numéros $i$ et $i+1$ pour obtenir une matrice $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Comme précédemment, pour tout numéro de ligne $\ell$ on note $\Delta_{\ell,1}$ le déterminant de la matrice obtenue en enlevant à A sa première colonne et sa ligne n° $\ell$ et $\widetilde{\Delta}_{\ell,1}$ le determinant de la matrice obtenue en enlevant à $\widetilde{A}$ sa première colonne et sa ligne n° $\ell$. L'hypothèse $H(n-1)$ implique que si $\ell \neq i$ et $\ell \neq i+1$ alors $\widetilde{\Delta}_{\ell,1} = -\Delta_{\ell,1}$ (la ligne enlevée n'est pas l'une de celles échangées). Pour la même raison, $a_{\ell,1} = \widetilde{a}_{\ell,1}$. Enfin $a_{i,1} = \widetilde{a}_{i+1,1}$, $a_{i+1,1} = \widetilde{a}_{i,1}$ et $\widetilde{\Delta}_{i,1} = \Delta_{i+1,1}$, $\widetilde{\Delta}_{i+1,1} = \Delta_{i,1}$. Reportant ces informations dans les définitions de $\det A$ et $\det \widetilde{A}$ on obtient $\det A = -\det \widetilde{A}$. Pour échanger deux lignes quelconques, il suffit d'échanger un nombre impair de fois deux lignes consécutives :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $L_i$ | $L_{i+1}$ | $L_{i+1}$ | | $L_{i+1}$ | $L_{i+1}$ | $L_{i+1}$ | | $L_{i+\ell}$ |
| | $L_{i+1}$ | $L_i$ | $L_{i+2}$ | $\dots$ | $L_{i+2}$ | $L_{i+2}$ | $L_{i+2}$ | $\dots$ | $L_{i+1}$ |
| | $L_{i+2}$ | $L_{i+2}$ | $L_i$ | | $L_{i+3}$ | $L_{i+3}$ | $L_{i+3}$ | | $L_{i+2}$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| | $L_{i+\ell-2}$ | $L_{i+\ell-2}$ | $L_{i+\ell-2}$ | | $L_{i+\ell-1}$ | $L_{i+\ell-1}$ | $L_{i+\ell}$ | | $L_{i+\ell-2}$ |
| | $L_{i+\ell-1}$ | $L_{i+\ell-1}$ | $L_{i+\ell-1}$ | $\dots$ | $L_i$ | $L_{i+\ell}$ | $L_{i+\ell-1}$ | $\dots$ | $L_{i+\ell-1}$ |
| | $L_{i+\ell}$ | $L_{i+\ell}$ | $L_{i+\ell}$ | | $L_{i+\ell}$ | $L_i$ | $L_i$ | | $L_i$ |
| échanges | | 1 | 2 | | $\ell-1$ | $\ell$ | $\ell+1$ | | $2\ell-1$ |

□

**Corollaire 78–** *Le déterminant d'une matrice carrée ayant deux lignes identiques est nul.*

*Démonstration.* Soit A une matrice carrée à deux lignes identiques. En échangeant ces deux lignes, on multiplie le déterminant par −1 mais la matrice est inchangée, son déterminant l'est donc aussi. Ainsi $-\det(A) = \det(A)$ puis $\det(A) = 0$. □

**Corollaire 79–** *Si à une ligne d'une matrice on ajoute le produit d'un élément de $\mathbb{K}$ par une autre ligne, le déterminant est inchangé.*

*Démonstration.* On utilise la remarque 76 avec $L'_i = L_j$ (où $i \neq j$). Le déterminant multiplié par $\lambda$ a deux lignes identiques (à savoir $L_j$), il est donc nul. □

*Exemple* 80–

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2\\ &= \det\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ &= 0.\end{aligned}$$

*Remarque* 81– Les propositions 68 et 77 et le corollaire 79 impliquent que si $\widetilde{A}$ est déduite de A par une succession d'opérations élémentaires, alors $\det\widetilde{A} = \lambda\det A$ avec $\lambda \neq 0$.

La table 1 résume les transformations des déterminants par les opérations élémentaires. Toute matrice peut être mise en échelons par une succession d'opérations élémentaires (théorème 46). On sait calculer le déterminant d'une matrice échelonnée (proposition 65). On sait donc calculer tous les déterminants par mise en échelons.

| Opérations élémentaires | déterminant |
|---|---|
| $L_i \leftrightarrow L_j$ $(i \neq j)$ | multiplié par −1 |
| $L_i \leftarrow \lambda L_i$ | multiplié par $\lambda$ |
| $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ | inchangé |

Table 1 – Transformations élémentaires et déterminant

*Exemple* 82– Cherchons le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix}2&1&4&3\\3&2&1&-2\\4&7&-2&3\\5&6&-3&4\end{pmatrix}.$$

Par l'opération élémentaire $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, on a

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 7 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det A.$$

Par l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, on a

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det A.$$

Par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on a

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 5 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det A.$$

Par l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_4$, on a

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 5 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 5 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -\det A.$$

Par les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 5 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = -\det(A).$$

L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_2$ conduit ensuite à

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\det A.$$

Par les opérations élémentaires $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 22 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\det A.$$

Enfin, l'opération élémentaire $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{9}{4}L_3$ donne

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 4 & 22\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{79}{2}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 4 & 22\\ 0 & 0 & 9 & 10\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\det A.$$

On a

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 4 & 22\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{79}{2}\end{pmatrix} = -158$$

donc $\det A = 316$.

Le déterminant se comporte bien vis-à-vis du produit, ce qu'exprime le théorème suivant qui sera démontré en annexe (voir § B.1).

***Théorème* 83–** *Si* A *et* B *sont deux matrices carrées de même ordre, alors*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

*Exemple* 84– Soit

$$A = \begin{pmatrix}65 & 46 & 23 & 4\\ 115 & 97 & 44 & 7\\ 92 & 75 & 58 & 9\\ 40 & 30 & 20 & 10\end{pmatrix}$$

On vérifie que $A = LU$ avec

$$L = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 8 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 10\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0 & 0\\ 9 & 8 & 0 & 0\\ 7 & 6 & 5 & 0\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Les matrices L et U étant triangulaires on calcule facilement $\det L = 400$ et $\det U = 400$. On en déduit $\det A = 160\,000$.

On peut alors caractériser l'inversibilité des matrices à l'aide du déterminant.

***Théorème* 85–** *Soit* A *une matrice carrée. Elle est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Lorsque* A *est inversible, on a*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

*Démonstration.* Grâce à la méthode de Gauss, on peut transformer A en la matrice en échelons $\widetilde{A}$ en n'utilisant que des opérations élémentaires sur les lignes. Le déterminant de A devient alors $\det(\widetilde{A}) = \lambda \det(A)$ avec $\lambda \neq 0$ (voir la remarque 81). La nullité de $\det(A)$ est donc équivalente à celle de $\det \widetilde{A}$. Supposons $\det(A) \neq 0$. Alors $\det(\widetilde{A}) \neq 0$. La matrice $\widetilde{A}$ n'a donc pas de ligne nulle et A est inversible. Réciproquement, supposons A inversible. Alors $AA^{-1} = I$ donc $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Cela implique $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. □

**Corollaire 86–** *Un système linéaire ayant autant d'équations que d'inconnues a une solution unique si et seulement si la matrice associée est de déterminant non nul.*

*Exemple* 87– On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 22 & -2 \\ -7 & -13 & 1 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_3$ est inversibles sont celles pour lesquelles $\det(A - \lambda I_3) \neq 0$. On calcule donc le déterminant

$$D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 12-\lambda & 22 & -2 \\ -7 & -13-\lambda & 1 \\ -4 & -8 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Par les opérations successives $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$, on a

$$D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -7 & -13-\lambda & 1 \\ -4 & -8 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & -13-\lambda & 1 \\ -4 & -8 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 7L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$ donnent alors

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & -13-\lambda & 1 \\ -4 & -8 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6-\lambda & 8 \\ 0 & -4 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ on obtient

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6-\lambda & 8 \\ 0 & -4 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 2+\lambda \\ 0 & -4 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

et donc

$$D(\lambda) = (1-\lambda)(2+\lambda)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6-\lambda \end{pmatrix}.$$

Enfin, l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ fournit

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 6-\lambda\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (\lambda-2).$$

On a donc $D(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+2)$ et la matrice $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{-2, 1, 2\}$.

Dans tout ce chapitre, nous avons effectué des opérations sur les lignes. Nous aurions pu faire des opérations sur les colonnes. Faire des opérations sur les colonnes d'une matrice, c'est

1) transposer la matrice
2) faire les opérations sur les lignes de cette transposée
3) transposer la matrice obtenue.

Nous admettons le résultat suivant qui sera démontré en annexe (voir § B.2).

***Théorème* 88–** *Une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant.*

Grâce à ce théorème et aux résultats démontrés sur les opérations élémentaires sur les lignes, on peut résumer dans la table 2, les transformations du déterminant par opérations élémentaires sur ces colonnes.

| Opérations élémentaires | déterminant |
|---|---|
| $C_i \leftrightarrow C_j$ $(i \neq j)$ | multiplié par $-1$ |
| $C_i \leftarrow \lambda C_i$ | multiplié par $\lambda$ |
| $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ | inchangé |

Table 2 – Transformations élémentaires sur les colonnes et déterminant

Le théorème 88 implique en particulier que le déterminant peut être calculé en développant relativement à la première ligne d'une matrice (c'est-à-dire relativement à la première colonne de sa transposée). Nous pouvons alors revenir sur le choix fait dans la définition de privilégier la première colonne. Nous aurions pu privilégier n'importe quelle ligne et même n'importe quelle colonne. Cela résulte simplement du fait qu'on peut ramener n'importe quelle ligne en première position à l'aide d'une succession d'échanges de lignes avec la ligne qui précède et qu'on peut ramener n'importe quelle colonne en première position à l'aide d'une succession d'échanges de colonne avec la colonne qui précède.

***Proposition 89–*** *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice carrée d'ordre* $n \geq 2$. *On note* $\Delta_{ij}$ *le déterminant de la matrice carrée d'ordre* $n-1$ *obtenue en enlevant à* A *sa ligne n°* $i$ *et sa colonne n°* $j$. *Alors,*

$$\det(A) = (-1)^{i+1}\left(a_{i1}\Delta_{i1} - a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{in}\Delta_{in}\right)$$

*et*

$$\det(A) = (-1)^{j+1}\left(a_{1j}\Delta_{1j} - a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nj}\Delta_{nj}\right)$$

*pour tout choix d'entiers* $i$ *et* $j$ *dans* $\{1,\ldots,n\}$.

*Remarque* 90– La première égalité s'appelle le développement du déterminant par rapport à la ligne n° $i$. La seconde égalité s'appelle le développement du déterminant par rapport à la colonne n° $j$.

*Remarque* 91– Pour retenir le signe qu'on doit affecter aux coefficients apparaissant dans le développement par rapport à une ligne ou une colonne, on peut utiliser le tableau de signes suivant. Si le déterminant à calculer est d'ordre $n$, on remplit une matrice carrée d'ordre $n$ en commençant par mettre + en haut à gauche puis en remplissant le tableau de gauche à droite et de haut à l'aide de la règle suivante :

1. Si deux coefficients se succèdent sur une même ligne, ils sont de signe opposé ;
2. si deux coefficients se succèdent sur une même colonne, ils sont de signe opposé ;

Dans le développement du déterminant, chaque coefficient $a_{ij}$ sera alors multiplié par $\pm 1$ selon le signe donné par la position $(i,j)$ du tableau de signes. On donne les tableaux correspondant aux matrices d'ordre 3, 4, 5 et 6.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

*Exemple* 92– En développant par rapport à la deuxième ligne, on a

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = -6.$$

# 6 Exercices

**1)** On considère les matrices à coefficients complexes

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1-i & -5 \\ 3 & 1-2i \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2+i & 1-i & 0 \\ -i & -5+i & \dfrac{7}{2-i} \end{pmatrix}, \mathrm{C} = \begin{pmatrix} -1+i & \dfrac{1}{3-i} \\ 3-i & -2+3i \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \dfrac{5}{7-i} \end{pmatrix}.$$

Effectuer tous les produits possibles de deux de ces matrices.

**2)** On définit les matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{B}^2 = \mathrm{C}^2 = -\mathrm{I}_4$, $\mathrm{BC} + \mathrm{CB} = \mathrm{A}$, $\mathrm{CA} + \mathrm{AC} = \mathrm{B}$ et $\mathrm{AB} + \mathrm{BA} = \mathrm{C}$.

b) On considère l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} + d\mathrm{I}_4 : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que cet ensemble est stable par addition et par produit et que tous ses éléments non nuls sont inversibles.

**3)** On considère une matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients complexes.

a) Calculer $\mathrm{A}^2 - (a+d)\mathrm{A} + (ad - bc)\mathrm{I}_2$.

b) En déduire que si $ad - bc \neq 0$, il existe une matrice B telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_2$.

c) On suppose $ad - bc = 0$. On a alors $\mathrm{A}^2 = (a+d)\mathrm{A}$. Montrer qu'il n'existe aucune matrice B telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_2$.

**4)** On note G l'ensemble

$$\mathrm{G} = \left\{ g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Montrer que $\mathrm{I}_2$ est un élément de G.

b) Montrer que pour tous réels $\theta$ et $\theta'$, la matrice $g(\theta + \theta')$ est un élément de G.

c) Montrer que tout élément de G est inversible.

d) Calculer $g(\theta)^n$ pour tout entier relatif $n$.

**5)** Calculer les puissances de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

**6)** Soit

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Touver N tel que $B = N - I_4$.

b) En déduire une expression de $B^n$ pour tout entier $n \geq 0$.

c) Exprimer l'inverse de B à l'aide de puissances de la matrice N. En déduire $B^{-1}$.

d) Donner une expression de $B^n$ pour tout entier $n < 0$.

**7)** Résoudre les systèmes suivants.

a)

$$\begin{cases} (i-1)x + y & -z = 1 \\ x + (i-1)y & +z = -1 \\ x - y & +(i-1)z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y & -z = a \\ -x + y & +2z = b \\ 2x + y & -3z = c \end{cases}$$

où $a$, $b$ et $c$ sont des paramètres réels.

b)

$$\begin{cases} x + 2y & -3z + 2t & = 2 \\ 2x + 5y & -8z + 6t & = 5 \\ 3x + 4y & -5z + 2t & = 4 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + 2y & +2z = a \\ 3x - 2y & -z = b \\ 2x - 5y & +3z = c \\ x + 4y & +6z = d \end{cases}$$

où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des paramètres réels.

c)

$$\begin{cases} x + y & +dz = a \\ x + dy & +z = b \\ dx + y & +z = c \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + ay & +a^2 z = 0 \\ x + by & +b^2 z = 0 \\ x + cy & +c^2 z = 0 \end{cases}$$

où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des paramètres réels.

**8)** Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}.$$

**9)** Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}.$$

**10)** Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(t) & \cos(2t) \\ \cos(t) & \cos(2t) & \cos(3t) \\ \cos(2t) & \cos(3t) & \cos(4t) \end{pmatrix}$$

n'est inversible pour aucune valeur de $t$.

**11)** On définit une matrice à coefficients complexes en posant

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1+i & 1-i \\ 1-i & -1+2i & 1-i \\ 1-i & -1+i & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant de $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3$.

b) Pour quelles valeurs complexes de $\lambda$ ce déterminant s'annule-t-il ?

c) Écrire $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3)$ sous la forme

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$$

et calculer $a_0\mathrm{I}_3 + a_1\mathrm{A} + a_2\mathrm{A}^2 + a_3\mathrm{A}^3$. Calculer l'inverse de A.

d) Pour toute valeur $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère le système

$$\begin{cases} x - (1-i)y & +(1-i)z = \lambda x \\ (1-i)x - (1-2i)y & +(1-i)z = \lambda y \\ (1-i)x - (1-i)y & +z = \lambda z. \end{cases}$$

i) Écrire ce système sous forme matricielle.

ii) Le résoudre.

iii) On suppose $\lambda$ tel que le système précédent a une infinité de solutions. Soit $(x, y, z)$ une solution, montrer qu'on peut exprimer les matrices $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à l'aide des matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) On définit une matrice à coefficients complexes en posant

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

ii) Calculer $D = P^{-1}AP$.

iii) Calculer $D^{2025}$.

iv) En déduire $A^{2025}$.

v) Donner une autre méthode de calcul de l'inverse de A.

**12)** On définit

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 16 & -20 \\ -30 & 41 & -50 \\ -18 & 24 & -29 \end{pmatrix}.$$

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de $A - \lambda I_3$.

b) Pour quelles valeurs de $\lambda$ ce déterminant s'annule-t-il ?

c) Écrire $\det(A - \lambda I_3)$ sous la forme

$$\det(A - \lambda I_3) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$$

et calculer $a_0 I_3 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3$. Calculer l'inverse de A.

d) Pour toute valeur $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le système

$$\begin{cases} -11x + 16y & -20z = \lambda x \\ -30x + 41y & -50z = \lambda y \\ -18x + 24y & -29z = \lambda z. \end{cases}$$

i) Résoudre ce système.

ii) On suppose $\lambda$ tel que le système précédent a une infinité de solutions. Soit $(x, y, z)$ une solution, montrer qu'on peut exprimer les matrices $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à l'aide des matrices $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

e) On définit

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

ii) Calculer $D = P^{-1}AP$.

iii) Calculer $D^{143}$.

iv) En déduire $A^{143}$.

v) Donner une autre méthode de calcul de l'inverse de A.

**13)** (**Une autre construction du corps des nombres complexes**) On a donné en annexe du premier chapitre une construction du corps des nombres complexes. L'exercice suivant propose une autre construction.

On considère l'ensemble

$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Montrer que $\mathfrak{C}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un corps.

b) On pose $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathcal{I}^2$.

c) On définit l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{C} & \to & \mathfrak{C} \\ & & z & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(z) & \mathfrak{Im}(z) \\ -\mathfrak{Im}(z) & \mathfrak{Re}(z) \end{pmatrix}. \end{array}$$

i) Montrer que si $f(z) = f(z')$ alors $z = z'$.

ii) Montrer que si $\mathcal{Z} \in \mathfrak{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{Z} = f(z)$.

iii) Montrer que $f(z + z') = f(z) + f(z')$.

iv) Montrer que $f(zz') = f(z)f(z')$.

v) Montrer que $f(1) = \mathrm{I}$.

vi) Si $z \neq 0$, que déduisez-vous des propriétés précédentes à propos de $f(1/z)$ ?

vii) Exprimer $f(\overline{z})$ en fonction de $f(z)$.

viii) Exprimer $\det(f(z))$ en fonction de $f(z)$.

# Annexes de compléments

Cette partie contient des compléments qui donnent les preuves des énoncés du cours non démontrés. Aucune notion de cette annexe n'est exigible par le programme.

## A Matrices élémentaires

L'objet de cette partie est d'introduire la notion de matrices élémentaires et d'utiliser celles-ci pour démontrer certains des résultats admis du cours.

### A.1) Définition et propriétés élementaires

*Définition* 93 (Matrices élémentaires)– *Si $n \geq 1$, on appelle matrice élémentaire toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ de l'une des formes suivantes.*

- *Matrice diagonale dont l'un des coefficients diagonaux est un élément quelconque $a$ de $\mathbb{K}$ tandis que tous les autres valent $1$. On note $\mathrm{D}_i(a)$ la matrice si $a$ se trouve en position $(i,i)$.*
- *Matrice dont tous les coefficients diagonaux valent $1$ et qui n'a qu'un coefficient non diagonal éventuellement différent de $0$. On note $\mathrm{T}_{ij}(\lambda)$ cette matrice si le coefficient non diagonal éventuellement différent de $0$ est $\lambda$ et si ce coefficient se trouve à l'intersection de la ligne n° $i$ et de la colonne n° $j$ ($i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}$).*

Les matrices $\mathrm{D}_i(a)$ s'appellent matrices de *dilatation*. Les matrices $\mathrm{T}_{ij}(\lambda)$ s'appellent matrices de *transvection*.

*Exemple* 94– Les matrices élémentaires de $\mathrm{M}_1(\mathbb{K})$ sont les matrices de la forme $\mathrm{D}_1(a) = (a)$ avec $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Les matrices élémentaires de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ sont les matrices de la forme

$$\mathrm{D}_1(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{D}_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \mathrm{T}_{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{T}_{2,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

*Exercice* 95– Quelles sont les matrices transposées de $\mathrm{D}_i(a)$ et $\mathrm{T}_{ij}(\lambda)$ ?

***Proposition 96–*** *La multiplication à gauche par les matrices élémentaires agit sur les lignes.*

- *Multiplier à gauche par $\mathrm{D}_i(a)$, c'est multiplier la ligne n° $i$ par $a$.*
- *Multiplier à gauche par $\mathrm{T}_{ij}(\lambda)$, c'est ajouter à la ligne n° $i$ le produit de la ligne n° $j$ par $\lambda$.*

*Exemple* 97–

$$\mathrm{D}_1(\alpha)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{T}_{21}(\lambda)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a + c & \lambda b + d \end{pmatrix}.$$

**Proposition 98–** *La multiplication à droite par les matrices élémentaires agit sur les colonnes.*

- ➦ *Multiplier à droite par* $\mathrm{D}_j(a)$, *c'est multiplier la colonne n° $j$ par $a$.*
- ➦ *Multiplier à droite par* $\mathrm{T}_{ij}(\lambda)$, *c'est ajouter le produit de la colonne n° $i$ par $\lambda$ à la colonne n° $j$.*

*Exemple* 99–

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathrm{D}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathrm{T}_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} a & \lambda a + b \\ c & \lambda c + d \end{pmatrix}.$$

*Exercice* 100– Se convaincre des propositions 96 et 98.

**Proposition 101–** *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\widetilde{\mathrm{A}}$ *la matrice déduite de* A *par échange des lignes $i$ et $j$ (avec $i \neq j$). Alors,*

$$\widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{D}_i(-1)\mathrm{T}_{ji}(1)\mathrm{T}_{ij}(-1)\mathrm{T}_{ji}(1)\mathrm{A}.$$

On note

$$\mathrm{S}_{ij} = \mathrm{D}_i(-1)\mathrm{T}_{ji}(1)\mathrm{T}_{ij}(-1)\mathrm{T}_{ji}(1).$$

*Démonstration de la proposition 101.* Notons $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \dots, \mathrm{L}_n$ les lignes de A. Quitte à échanger les noms des variables $i$ et $j$, on suppose $i < j$. Par applications successives de la proposition 96, on a

$$\mathrm{T}_{ji}(1)\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{L}_i \\ \vdots \\ \mathrm{L}_j + \mathrm{L}_i \\ \vdots \\ \mathrm{L}_n \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \mathrm{T}_{ij}(-1)\mathrm{T}_{ji}(1)\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_1 \\ \vdots \\ -\mathrm{L}_j \\ \vdots \\ \mathrm{L}_j + \mathrm{L}_i \\ \vdots \\ \mathrm{L}_n \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{T}_{ji}(1)\mathrm{T}_{ij}(-1)\mathrm{T}_{ji}(1)\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_1 \\ \vdots \\ -\mathrm{L}_j \\ \vdots \\ \mathrm{L}_i \\ \vdots \\ \mathrm{L}_n \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \mathrm{D}_i(-1)\mathrm{T}_{ji}(1)\mathrm{T}_{ij}(-1)\mathrm{T}_{ji}(1)\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{L}_j \\ \vdots \\ \mathrm{L}_i \\ \vdots \\ \mathrm{L}_n \end{pmatrix}.$$

□

Les propositions 96 et 98 impliquent l'inversibilité des matrices élémentaires (et donc de leurs produits). Plus précisément, vous montrerez le résultat suivant.

***Proposition* 102–** *Soit $i$ et $j$ deux entiers. Soit $a$ et $\lambda$ dans $\mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. Alors*

*1) La matrice de dilatation $\mathrm{D}_i(a)$ est inversible d'inverse $\mathrm{D}_i(1/a)$.*

*2) La matrice de transvection $\mathrm{T}_{ij}(\lambda)$ est inversible d'inverse $\mathrm{T}_{ij}(-\lambda)$.*

## A.2) Mise en échelons des matrices

Dans cette partie, on démontre maintenant le théorème 46 qui, compte-tenu des propositions 96 et 101, est équivalent au théorème 103 ci-dessous.

***Théorème* 103–** *Si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est non nulle alors il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telle que $\mathrm{PA}$ est en échelons.*

*Remarque* 104– En particulier, la matrice P est inversible.

Passons à la démonstration du théorème 103.
*Cas d'une matrice ligne* – Si $n = 1$, on écrit $\mathrm{A} = (a_1, \dots, a_p)$ et on pose $\mathrm{P} = \mathrm{D}_1(1/a_i)$ où $i$ est le plus petit indice tel que $a_i \neq 0$.
*Cas d'une matrice à deux lignes* – Montrons le résultat pour $n = 2$. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{2,p}(\mathbb{K})$, on écrit $a_1, \dots, a_p$ les coefficients de la première ligne de A et $b_1, \dots, b_p$ les coefficients de la seconde ligne de A.

Si la première ligne de A est nulle, appelons $i_1$ le plus petit indice $i$ pour lequel $b_i \neq 0$. En posant $\mathrm{S}_{12} = \mathrm{D}_1(-1)\mathrm{T}_{21}(1)\mathrm{T}_{12}(-1)\mathrm{T}_{21}(1)$, la proposition 101 implique que

$$\mathrm{S}_{12}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{i_1} & \cdots & \cdots & \cdots & b_p \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\mathrm{D}_1\left(\frac{1}{b_{i_1}}\right)\mathrm{S}_{12}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{i_1+1}/b_{i_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_p/b_{i_1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathrm{P} = \mathrm{D}_1\left(\frac{1}{b_{i_1}}\right)\mathrm{D}_1(-1)\mathrm{T}_{21}(1)\mathrm{T}_{12}(-1)\mathrm{T}_{21}(1)$. La matrice PA est en échelons.

Si la deuxième ligne de A est nulle, appelons $i_0$ le plus petit indice $i$ pour lequel $a_i \neq 0$. Alors,

$$\mathrm{D}_1\left(\frac{1}{a_{i_0}}\right)\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{i_0+1}/a_{i_0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_p/a_{i_0} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Posant $\mathrm{P} = \mathrm{D}_1\left(\frac{1}{a_{i_0}}\right)$, la matrice PA est donc en échelons.

Si aucune ligne de A n'est nulle, appelons $i_0$ le plus petit indice $i$ pour lequel $a_i \neq 0$ et $i_1$ le plus petit indice $i$ pour lequel $b_i \neq 0$.

*1^er cas :* $i_1 < i_0$ – En posant $S_{12} = D_1(-1)T_{21}(1)T_{12}(-1)T_{21}(1)$, la proposition 101 implique que

$$S_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{i_1} & \cdots & \cdots & \cdots & b_p \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{i_0} & \cdots & a_p \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$D_2\left(\frac{1}{a_{i_0}}\right)D_1\left(\frac{1}{b_{i_1}}\right)S_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{i_1+1}/b_{i_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_p/b_{i_1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{i_0+1}/a_{i_0} & \cdots & a_p/a_{i_0} \end{pmatrix}.$$

On pose $P = D_2\left(\frac{1}{a_{i_0}}\right)D_1\left(\frac{1}{b_{i_1}}\right)D_1(-1)T_{21}(1)T_{12}(-1)T_{21}(1)$. La matrice PA est en échelons.

*2^e cas :* $i_0 < i_1$ – Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'échanger les deux premières lignes. On pose donc $P = D_1\left(\frac{1}{a_{i_0}}\right)D_2\left(\frac{1}{b_{i_1}}\right)$. La matrice PA est en échelons.

*3^e cas :* $i_0 = i_1$ – On a

$$T_{21}\left(-\frac{b_{i_0}}{a_{i_0}}\right)A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{i_0} & a_{i_0+1} & \cdots & a_p \\ 0 & \cdots & 0 & b^*_{i_0+1} & \cdots & b^*_p \end{pmatrix}$$

où $b^*_i = b_i - b_{i_0}a_i/a_{i_0}$ pour tout $i$. Si les $b^*_i$ sont tous nuls, on pose $P = D_1\left(\frac{1}{a_{i_0}}\right)T_{21}\left(-\frac{b_{i_0}}{a_{i_0}}\right)$. Si l'un des coefficients $b^*_i$ est non nul, on note $i_2$ le plus petit indice $i$ pour lequel $b^*_i \neq 0$. On pose $P = D_2\left(\frac{1}{b^*_{i_2}}\right)D_1\left(\frac{1}{a_{i_0}}\right)T_{21}\left(-\frac{b_{i_0}}{a_{i_0}}\right)$. Dans les deux cas, la matrice PA est en échelons.

*Extension à un nombre quelconque de lignes* – Pour $n \geq 3$, on raisonne par récurrence sur le nombre de colonnes $p$. On note $H(p)$ la propriété « pour tout entier $n \geq 3$, pour toute matrice non nulle $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telles que PA est en échelons ».

Si $p = 1$, on écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Choisissons l'indice $i$ de l'un des coefficients non nuls de A. La proposition 96 implique alors

$$D_i\left(\frac{1}{a_i}\right)A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ 1 \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

puis

$$\mathrm{T}_{1i}(-a_1)\cdots\mathrm{T}_{(i-1)i}(-a_{i-1})\mathrm{T}_{(i+1)i}(-a_{i+1})\cdots\mathrm{T}_{ni}(-a_n)\mathrm{D}_i\left(\frac{1}{a_i}\right)\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

le 1 étant sur la ligne n° $i$. Il reste à repositionner le 1 sur la première ligne. La proposition 101 conduit à

$$\mathrm{S}_{1i}\mathrm{T}_{1i}(-a_1)\cdots\mathrm{T}_{(i-1)i}(-a_{i-1})\mathrm{T}_{(i+1)i}(-a_{i+1})\cdots\mathrm{T}_{ni}(-a_n)\mathrm{D}_i\left(\frac{1}{a_i}\right)\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

où $\mathrm{S}_{1i}$ est le produit de matrices élémentaires

$$\mathrm{S}_{1i}=\mathrm{D}_1(-1)\mathrm{T}_{i1}(1)\mathrm{T}_{1i}(-1)\mathrm{T}_{i1}(1).$$

On pose

$$\mathrm{P}=\mathrm{S}_{1i}\mathrm{T}_{1i}(-a_1)\cdots\mathrm{T}_{(i-1)i}(-a_{i-1})\mathrm{T}_{(i+1)i}(-a_{i+1})\cdots\mathrm{T}_{ni}(-a_n)\mathrm{D}_i\left(\frac{1}{a_i}\right).$$

La matrice PA est en échelons. La propriété H(1) est vraie.

Soit $p \geq 1$, on suppose vraie l'hypothèse $\mathrm{H}(p)$. Soit alors $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$. Appelons $\mathrm{C}_1$ la première colonne de A de sorte que $\mathrm{A} = (\mathrm{C}_1|\mathrm{B})$ avec $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

*1^er cas :* $\mathrm{C}_1 = 0$ – Comme $\mathrm{B} \neq 0$ et d'après $\mathrm{H}(p)$, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telle que PB est en échelons. On a alors $\mathrm{PA} = (0|\mathrm{PB})$ et PA est en échelons.

*2^e cas :* $\mathrm{C}_1 \neq 0$ – D'après le cas $p = 1$, il existe $\mathrm{P}' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telle que

$$\mathrm{P}'\mathrm{C}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

On introduit les matrices $\mathrm{Q} \in \mathrm{M}_{n-1,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{L} \in \mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ telles que

$$\mathrm{P}'\mathrm{A}=\left(\begin{array}{c|c}1 & \mathrm{L}\\ \hline 0 & \mathrm{Q}\end{array}\right).$$

*1^er sous-cas :* $\mathrm{Q} = 0$ – La matrice P'A est en échelons.

*2^e^ sous-cas :* $Q \neq 0$ – Soit par le cas des matrices à deux lignes (si $n = 3$), soit par l'hypothèse $H(p)$ (si $n > 3$), il existe $R \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telle que $RQ$ est en échelons. Si $R$ est produit des matrices élémentaires $E_1, \cdots, E_q$ alors on a le produit

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & E_1 \end{array}\right) \cdots \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & E_q \end{array}\right).$$

Chacune des matrices du membre de droite est élémentaire. On définit $P$ comme le produit de matrices élémentaires

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right) P'.$$

On a

$$PA = \left(\begin{array}{c|c} 1 & L \\ \hline 0 & RQ \end{array}\right)$$

et la matrice $PA$ est en échelons.

## A.3) Matrices élémentaires et inversibilité

Dans cette partie, on montre qu'on peut, dans le cas des matrices, oublier la distinction entre inversibilité à gauche et inversibilité à droite. On montre aussi que toute matrice inversible est produit de matrices élémentaires.

***Proposition* 105–** *Toute matrice carrée triangulaire supérieure dont la diagonale n'est constituée que de* 1 *est produit de matrices élémentaires et en particulier inversible.*

*Démonstration.* Soit $U = (u_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une telle matrice. On peut « construire » $U$ à partir de l'identité remplissant les lignes une à une de haut en bas. Plus précisément, la proposition 96 implique que

$$T_{1,2}(u_{1,2})T_{1,3}(u_{1,3}) \cdots T_{1,n-1}(u_{1,n-1})T_{1,n}(u_{1,n}) = \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(pour s'en convaincre, lire le produit des matrices de transvections de la droite vers la gauche). Par réitération, et en notant

$$\mathcal{T}_\ell = T_{\ell,\ell+1}(u_{\ell,\ell+1})T_{\ell,\ell+2}(u_{\ell,\ell+2}) \cdots T_{\ell,n-1}(u_{\ell,n-1})T_{\ell,n}(u_{\ell,n})$$

on obtient

$$U = \mathcal{T}_{n-1}\mathcal{T}_{n-2} \cdots \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1.$$

□

On peut maintenant démontrer le théorème 32 dont on rappelle l'énoncé.

***Théorème* 106–** *Si une matrice admet un inverse à gauche, alors elle admet un inverse à droite. Elle est donc inversible.*

*Démonstration.* Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose l'existence de $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I$. Puisque $BA \neq 0$, la matrice B n'est pas nulle et le théorème 103 fournit une matrice inversible P telle que la matrice carrée PB est échelonnée. Cette matrice n'a pas de ligne nulle sinon, son produit à droite par n'importe quelle autre matrice de même taille aurait aussi une ligne nulle alors que $PB(AP^{-1}) = PP^{-1} = I$ n'a pas de ligne nulle. La matrice PB est donc triangulaire supérieure avec une diagonale formée uniquement de 1. Elle est donc inversible par la proposition 105. On en déduit que $B = P^{-1}(PB)$ est inversible. On a alors

$$A = (B^{-1}B)A = B^{-1}(BA) = B^{-1}.$$

La matrice $B^{-1}$ est inversible donc A est inversible et admet un inverse à droite (celui de $B^{-1}$, c'est-à-dire B). □

Il est immédiat qu'un produit de matrices élémentaires est inversible. On montre maintenant que la réciproque est vraie.

***Proposition* 107–** *Toute matrice inversible est produit de matrices élémentaires.*

*Démonstration.* Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Elle est non nulle. Par le théorème 103, on peut trouver une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$, produits de matrices élémentaires, telle que $PA = E$ est en échelons. Cette matrice en échelons E est inversible, comme produit des deux matrices inversibles P et A. Elle n'admet donc pas de ligne nulle (dans le cas contraire, le produit à droite de E par n'importe quel matrice aurait aussi une ligne nulle mais $E \cdot E^{-1} = I$ n'a pas de ligne nulle). Elle est donc triangulaire supérieure avec uniquement des 1 sur la diagonale. Par la proposition 105, on peut l'écrire comme produit de matrices élémentaires. La matrice $A = P^{-1}E$ est alors produit de matrices élémentaires. En effet, la matrice $P^{-1}$ est produit d'inverses de matrices élémentaires, donc de matrices élémentaires d'après la proposition 102. □

## A.4) Systèmes et opérations élémentaires

***Théorème* 108–** *Soit* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. *On applique simultanément à* A *et* B *une succession d'opérations élémentaires pour obtenir* $\widetilde{A}$ *et* $\widetilde{B}$. *Alors les systèmes* $AX = B$ *et* $\widetilde{A}X = \widetilde{B}$ *ont même ensemble de solutions.*

*Démonstration.* On a $\widetilde{A} = PA$ et $\widetilde{B} = PB$ avec P un produit de matrices élémentaires. En particulier, la matrice P est inversible. Si X est solution de $AX = B$ alors $PAX = PB$ après multiplication par P. Réciproquement, si X est solution de $PAX = PB$ alors $AX = B$ après multiplication par $P^{-1}$. □

On justifie maintenant la remarque 56. Si A est carrée et a été transformée en une matrice en échelons $\widetilde{A}$ sans ligne nulle alors A est inversible [d]. Son inverse $A^{-1}$ est inversible donc produit de matrices élémentaires d'après la proposition 107. Appliquer à A les opérations élémentaires sur les lignes correspondant à ces matrices élémentaires revient à transformer A en $A^{-1}A = I$. Il existe donc une succession d'opérations élémentaires permettant de transformer A et I. Considérons une telle succession d'opérations élémentaires. Appliquer ces opérations revient à multiplier A à gauche par une matrice P, produit de matrices élémentaires, telle que $PA = I$. Si on applique les mêmes opérations à B, on transforme B en PB. Mais de $PA = I$, on tire $P = A^{-1}$. On a donc transformé B en $A^{-1}B$ qui est la solution du système d'après la proposition 37.

## A.5) Justification de la méthode d'inversion

On a énoncé dans la partie 4 une méthode permettant de déterminer si une matrice est inversible et, lorsqu'elle l'est, de calculer son inverse. Le but de cette annexe est de justifier cette méthode.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice en échelons $\widetilde{A}$, obtenue à partir de A par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes est de la forme $\widetilde{A} = PA$ où P est une matrice inversible (voir les propositions 96 et 101). En particulier A est inversible si et seulement si $\widetilde{A}$ l'est.

Lors de la mise en œuvre de la méthode d'inversion, on applique à A et à I les mêmes opérations élémentaires sur les lignes. En termes de matrices élémentaires, on transforme simultanément A en $\widetilde{A} = PA$ et I en $P = PI$. On transforme donc la matrice augmentée $(A|I)$ en $\left(\widetilde{A}|P\right)$.

Supposons d'abord que $\widetilde{A}$ a une ligne nulle. La matrice $\widetilde{A}$ n'est donc pas inversible. En effet, tout produit $\widetilde{A}B$ contient une ligne nulle, la même que $\widetilde{A}$, et donc aucun tel produit ne peut être égal à I. Il s'ensuit que A n'est pas inversible.

Supposons maintenant que $\widetilde{A}$ n'a pas de ligne nulle. Puisqu'elle est carrée échelonnée, elle est alors triangulaire supérieure et sa diagonale n'est composée que de 1. Elle est donc inversible (voir la proposition 105) et son inverse est produit de matrices élémentaires (voir la proposition 107). Puisque $\widetilde{A}^{-1}\widetilde{A} = I$, cela signifie qu'il existe une succession d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforment $\widetilde{A}$ en I. Appliquer cette succession d'opérations élémentaires à la matrice augmentée $\left(\widetilde{A}|P\right)$, la transforme en la matrice augmentée $\left(I|\widetilde{A}^{-1}P\right)$. Or $\widetilde{A} = PA$ donc $\widetilde{A}^{-1}P = A^{-1}$. On a finalement transformé la matrice augmentée $(A|I)$ en la matrice augmentée $\left(I|A^{-1}\right)$.

*d.* En effet la matrice $\widetilde{A}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. La proposition 105 implique donc qu'elle est inversible. Puisque $\widetilde{A} = PA$ avec P inversible, la matrice A est aussi inversible.

# B Déterminants

## B.1) Déterminant d'un produit

Nous montrons que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

1. Supposons que A n'est pas inversible. Il existe un produit Q de matrices élémentaires et une matrice en échelons $\widetilde{A}$ telle que $\widetilde{A} = QA$. La matrice Q est inversible, on note P son inverse. C'est encore un produit de matrices élémentaires. On a $A = P\widetilde{A}$. Puisque multiplier à gauche par un produit de matrices élémentaires revient à appliquer une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\det(A) = \lambda \det\left(\widetilde{A}\right)$. La matrice A n'est pas inversible donc la matrice en échelons $\widetilde{A}$ contient une ligne de 0. Il en résulte que $\det\left(\widetilde{A}\right) = 0$ puis que $\det(A) = 0$ et donc $\det(A)\det(B) = 0$. Puisque $AB = P\widetilde{A}B$, il existe aussi $\delta \neq 0$ tel que $\det(AB) = \delta \det\left(\widetilde{A}B\right)$. Mais, comme $\widetilde{A}$, la matrice $\widetilde{A}B$ contient une ligne de 0 donc est de déterminant nul. Ainsi, $\det(AB) = 0$ et on a $\det(A)\det(B) = \det(AB)$.
2. Supposons que A est inversible. Il existe des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_q$ telles que $A = E_1 \cdots E_q$ (voir la proposition 107). On a alors

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_q B).$$

Notons $\widehat{B} = E_2 \cdots E_q B$. Si $E_1$ est une matrice de dilatation $D_i(a)$, alors $E_1\widehat{B}$ se déduit de $\widehat{B}$ par multiplication de la ligne n° $i$ par $a$ (proposition 96). Il en ressort que $\det(E_1\widehat{B}) = a\det(\widehat{B})$ (proposition 68). Mais $a = \det(D_i(a))$ donc $\det(E_1\widehat{B}) = \det(E_1)\det(\widehat{B})$. Si $E_1$ est une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ alors $E_1\widehat{B}$ se déduit de $\widehat{B}$ par ajout à la ligne n° $i$ du produit par $\lambda$ de la ligne n° $j$ (proposition 96). Il en ressort que $\det(E_1\widehat{B}) = \det(\widehat{B})$ (corollaire 79). Mais $\det\left(T_{ij}(\lambda)\right) = 1$ donc

$$\det(AB) = \det(E_1)\det(E_2 \cdots E_q B)$$

quelque soit la matrice élémentaire $E_1$. Par réitération, on a

$$\det(AB) = \det(E_1) \cdots \det(E_q)\det(B)$$

pour toute matrice B. En appliquant cette égalité à $B = I$, on trouve en particulier

$$\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_q).$$

Finalement

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

## B.2) Déterminant et transposition

Nous montrons que A et ${}^tA$ ont même déterminant.

1) Si A n'est pas inversible alors ${}^t\mathrm{A}$ n'est pas inversible. En effet, si ${}^t\mathrm{A}$ était inversible, alors d'après la proposition 36, la matrice $\mathrm{A} = {}^t\left({}^t\mathrm{A}\right)$ serait inversible. Puisque A n'est pas inversible, on a $\det(\mathrm{A}) = 0$ et puisque ${}^t\mathrm{A}$ n'est pas inversible, on a $\det\left({}^t\mathrm{A}\right) = 0$.
2) Si A est inversible elle se décompose en $\mathrm{A} = \mathrm{E}_1 \cdots \mathrm{E}_q$ avec $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_q$ des matrices élémentaires. On a alors ${}^t\mathrm{A} = {}^t\mathrm{E}_q \cdots {}^t\mathrm{E}_1$ puis $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{E}_1) \cdots \det(\mathrm{E}_q)$ et $\det\left({}^t\mathrm{A}\right) = \det\left({}^t\mathrm{E}_q\right) \cdots \det\left({}^t\mathrm{E}_1\right)$. Il suffit donc de démontrer que le déterminant d'une matrice élémentaire est égal à celui de sa transposée. La transposée de la matrice de transvection $\mathrm{T}_{ij}(\lambda)$ est $\mathrm{T}_{ji}(\lambda)$ et les matrices de transvection sont toutes de déterminant 1 de sorte que le résultat est vrai pour les matrices de transvection. Les matrices de dilatation sont leur propre transposée de sorte que le résultat est vrai pour les matrices de dilatation.