Département de mathématiques et informatique
L1S1, module A ou B

Chapitre 3

Espaces vectoriels

Emmanuel Royer

emmanuel.royer@uca.fr

Table des matières

Avertissement préliminaire. Dans tout ce chapitre, on fixe $\mathbb{K}$ l'un des trois corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ceci signifie que vous pouvez lire le chapitre en remplaçant la lettre $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}$ puis le relire en remplaçant la lettre $\mathbb{K}$ par $\mathbb{C}$ et le relire une troisième fois en remplaçant la lettre $\mathbb{K}$ par $\mathbb{Q}$. On appelle *scalaires* les éléments de $\mathbb{K}$.

1 Définition des espaces vectoriels

1.1) Définition et représentation de $\mathbb{K}^n$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, un n-uplet [a] de $\mathbb{K}$ est la donnée *ordonnée* de scalaires x_1, x_2,..., x_n. On note $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un tel n-uplet. Les scalaires x_1, x_2,..., x_n sont appelées les coordonnées du n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. L'ensemble de n-uplets de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^n$.

On dit que les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont égaux si on a toutes les égalités

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n.$$

⚠ Si $n \neq m$, un n-uplet n'est jamais égal à un m-uplet.

Remarque 1– Un n-uplet peut donc être vu comme une matrice de $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

1.2) Opérations dans $\mathbb{K}^n$

Si $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{K}^n$, on appelle *somme* de u et v le n-uplet noté $u + v$ défini par

$$u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

⚠ Si $n \neq m$, on ne sait pas additionner un n-uplet avec un m-uplet.

Remarque 2– Noter que l'addition dans $\mathbb{K}^n$ est l'addition dans $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 3– Dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$(1, 2) + (7, 12) = (8, 14).$$

Dans $\mathbb{C}^5$, on a

$$(i - 1, 2, 3, 4, 5) + (-i + 1, -2, -3, -4, -5) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Si λ est un scalaire et $u = (x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet on appelle *produit externe* de λ par u le n-uplet noté λu et défini par

$$\lambda u = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

---

a. On dit aussi couple si $n = 2$, triplet si $n = 3$, quadruplet si $n = 4$, quintuplet si $n = 5$, sextuplet si $n = 6$.

Exemple 4– Dans $\mathbb{C}^3$, on a

$$(1+i)(10, i, -30) = (10+10i, -1+i, -30-30i).$$

Dans $\mathbb{R}^7$, on a

$$-\frac{12}{5}(2,3,-5,7,11,13,17) = \left(-\frac{24}{5}, -\frac{36}{5}, 12, -\frac{84}{5}, -\frac{132}{5}, -\frac{156}{5}, -\frac{204}{5}\right).$$

Remarque 5– Noter que le produit externe dans $\mathbb{K}^n$ est le produit externe dans $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

1.3) Opérations dans un ensemble quelconque

On vérifiera aisément que l'addition sur $\mathbb{K}^n$ est un cas particulier de la notion de loi de groupe commutatif définie ci-dessous.

1.3.1– Loi de groupe commutatif

Si E est un ensemble, on dit qu'il est muni d'une loi de groupe commutatif + (appelée addition) s'il existe une façon d'associer [b] à tous éléments u et v de E un troisième élément de E, noté $u+v$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) la loi est *associative* : pour tous éléments u, v et w de E on a

$$(u+v)+w = u+(v+w).$$

Autrement dit, commencer par calculer $r = u+v$ puis $r+w$ donne le même résultat que commencer par calculer $r' = v+w$ puis $u+r'$;

b) la loi est *commutative* : pour tous éléments u et v de E on a

$$u+v = v+u.$$

Autrement dit, étant donnés deux éléments de E, on obtient le même résultat en additionnant l'un à l'autre ou l'autre à l'un ;

c) la loi admet un *élément neutre* noté 0 : c'est un élément de E tel que, pour tout élément u de E on a

$$u+0 = u.$$

Autrement dit, additionner 0 est une action neutre qui ne modifie pas l'élément à qui on l'additionne ;

d) tout élément de E admet un *opposé* [c] pour la loi : pour tout élément u de E, il existe un élément v de E tel que

$$u+v = 0.$$

On note $-u$ l'élément v.

b. On dit une application de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans E.

c. On dit aussi *symétrique*.

Exemple 6– L'élément neutre de l'addition sur $\mathbb{K}^n$ est le n-uplet dont toutes les coordonnées sont nulles : $(0,\dots,0)$. L'opposé du n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ est $-(x_1,\dots,x_n) = (-x_1,\dots,-x_n)$. Notez que l'opposé $-(x_1,\dots,x_n)$ de $(x_1,\dots,x_n)$ est le produit du scalaire -1 par $(x_1,\dots,x_n)$: ainsi $-(x_1,\dots,x_n) = -1(x_1,\dots,x_n)$. Par exemple, l'opposé dans $\mathbb{K}^5$ de $(2,3,-5,-7,-11)$ est $(-2,-3,5,7,11)$.

Définition 7– *Un ensemble* E *muni d'une application* + *de* $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ *dans* E *vérifiant les propriétés a) à d) est appelé* groupe commutatif *(ou encore groupe* abelien*).*

Remarque 8– On note $(\mathrm{E},+)$ le groupe E lorsque l'on veut garder trace dans la notation de l'addition utilisée. Sauf précision du contraire, il est implicite dans le reste du cours que la loi de groupe est notée +.

Exercice 9– Comprendre pourquoi le produit sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas une loi de groupe commutatif.

Exercice 10– On considère un ensemble E muni d'une application qui a tous éléments u et v de E associe un élément $\mathscr{L}(u,v)$ de E. Écrire les propriétés qui doivent être satisfaites par $\mathscr{L}$ pour que E soit un groupe commutatif.

Remarque 11– On peut montrer que l'élément neutre d'un groupe commutatif est unique. De plus,le symétrique de tout élément est unique. Il existe des lois qui ont plusieurs éléments neutres. Par exemple, sur $\mathbb{R}$, on peut définir une loi en posant $x \boxdot y = x^2y^2$ pour tous réels x et y. Elle est commutative, non associative. Les éléments $(1,1)$ mais aussi $(1/2,4)$ sont des éléments neutres.

1.3.2– Produit externe

Soit E un groupe commutatif. On dit qu'il est muni de la loi externe $\cdot$ s'il existe une façon d'associer [d] à tout scalaire $\mathbb{K}$ et à tout élément u de E un élément de E, noté $\lambda \cdot u$ (et en fait bien souvent λu) vérifiant les propriétés suivantes :

i) le produit externe est *distributif* par rapport à l'addition de E : pour tout scalaire λ et tous éléments u et v de E, on a

$$\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

Autrement dit, il est équivalent de commencer par calculer $w = u+v$ puis $\lambda \cdot w$ ou de commencer par calculer $u' = \lambda \cdot u$, $v' = \lambda \cdot v$ puis $u'+v'$;

ii) le produit externe est *distributif* par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$: pour tous scalaires λ et μ et pour tout élément u de E , on a

$$(\lambda+\mu)\cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$$

Autrement dit, il est équivalent de commencer par calculer $\alpha = \lambda+\mu$ puis $\alpha \cdot u$ ou de commencer par calculer $u' = \lambda \cdot u$, $u'' = \mu \cdot u$ puis $u'+u''$;

d. On dit une application de $\mathbb{K}\times\mathrm{E}$ dans E.

iii) le produit externe est *associatif* avec le produit de $\mathbb{K}$: pour tous scalaires λ et μ et pour tout élément u de E , on a

$$(\lambda\mu)\cdot u = \lambda\cdot(\mu\cdot u).$$

Autrement dit, il est équivalent de commencer par calculer $\alpha = \lambda\mu \in \mathbb{K}$ puis $\alpha\cdot u$ ou de commencer par calculer $u' = \mu\cdot u \in \mathrm{E}$ puis $\lambda\cdot u'$;

iv) le scalaire 1 n'agit pas : pour tout élément u de E on a

$$1\cdot u = u.$$

Définition 12– *Un groupe commutatif* E *muni d'une application* $\cdot$ *de* $\mathbb{K}\times\mathrm{E}$ *dans* E *vérifiant les propriétés i) à iv) est appelé* espace vectoriel *sur* $\mathbb{K}$. *Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés* vecteurs *de cet espace. L'élément neutre de l'addition est appelé* vecteur nul *de* E.

Remarque 13– Au lieu de « espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ » on dit aussi parfois « $\mathbb{K}$-espace vectoriel ».

***Théorème* 14–** *L'ensemble* $\mathbb{K}^n$ *muni des addition et produit externe définis précédemment est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$.

Les règles de calculs énoncées en calcul matriciel donnent aussi le résultat suivant.

***Théorème* 15–** *L'ensemble* $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *des matrices de taille* $m\times n$ *à coefficients dans* $\mathbb{K}$, *muni de son addition et de son produit externe est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$.

Exercice 16– Montrer que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, mais aussi sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ mais aussi sur $\mathbb{Q}$. Comprendre en revanche pourquoi $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

1.4) Règles de calculs dans les espaces vectoriels

On fixe un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. On note λ et μ des scalaires puis u, v et w des vecteurs de E. Par convention [e], l'écriture $u-v$ désigne le vecteur $u+(-v)$, c'est-à-dire la somme de u et de l'opposé de v.

1) Si $u+v = u+w$ alors $v = w$. On le voit en ajoutant l'opposé de u à chacun des membres de l'égalité.
2) Distributivité par rapport à la soustraction de E : on a

$$\lambda\cdot(u-v) = \lambda\cdot u - (\lambda\cdot v).$$

En effet on a

$$\lambda\cdot(u-v)+\lambda\cdot v = \lambda\cdot(u-v+v) = \lambda\cdot u$$

d'où l'on tire $\lambda\cdot(u-v) = \lambda\cdot u - (\lambda\cdot v)$.

e. Notez que cette convention est compatible avec la soustraction de $\mathbb{R}$ que vous connaissez déjà.

3) Distributivité par rapport à la soustraction de $\mathbb{K}$: on a

$$(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - (\mu \cdot u).$$

Démontrez le en vous inspirant de la preuve de la distributivité par rapport à la soustraction de E.

4) Rôle du vecteur nul : on a

$$\lambda \cdot 0 = 0.$$

Dans cette égalité, les deux symboles 0 représentent le vecteur nul. Pour la montrer, on utilise $0 + 0 = 0$ (qui vient de la définition de l'élément neutre de E) puis la distributivité du produit externe sur l'addition :

$$\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0.$$

On ajoute l'opposé de $\lambda \cdot 0$ à chacun des termes extrêmes de ces égalités pour obtenir $0 = \lambda \cdot 0$.

5) Rôle du zéro scalaire : on a

$$0 \cdot u = 0.$$

Dans cette égalité le symbole 0 de gauche est le zéro scalaire, celui de droite est le vecteur nul. Démontrez l'égalité en calculant de deux façons $(0 + 0) \cdot u$ et en vous inspirant de la preuve du rôle du vecteur nul.

6) Produit nul : si $\lambda \cdot u = 0$, on a $\lambda = 0$ ou $u = 0$. En effet supposons $\lambda \cdot u = 0$. On a ou bien $\lambda = 0$ ou bien $\lambda \neq 0$. Si $\lambda \neq 0$, on peut considérer le scalaire $\frac{1}{\lambda}$ et calculer :

$$0 = \frac{1}{\lambda} \cdot 0 = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot u) = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right) \cdot u = 1 \cdot u = u.$$

7) Simplification par un vecteur : si $\lambda \cdot u = \mu \cdot u$ et si $u \neq 0$ alors $\lambda = \mu$.
⚠ Pensez toujours à vérifier $u \neq 0$ pour appliquer cette règle.
Démontrez le en utilisant la règle de produit nul appliquée à $(\lambda - \mu) \cdot u$.

8) Simplification par un scalaire : si $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v$ et si $\lambda \neq 0$ alors $u = v$.
⚠ Pensez toujours à vérifier $\lambda \neq 0$ pour appliquer cette règle.
Démontrez le en utilisant la règle de produit nul appliquée à $\lambda \cdot (u - v)$.

9) Règles de signes : on a [f]

$$(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$$

et

$$(-\lambda) \cdot (-u) = \lambda \cdot u.$$

L'égalité $(-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u)$ vient de

$$(-\lambda) \cdot u + \lambda \cdot u = (-\lambda + \lambda) \cdot u = 0 \cdot u = 0.$$

f. Test de lucidité : repasser en rouge les signes − symbolisant de l'opposé dans $\mathbb{K}$ et en vert ceux symbolisant de l'opposé dans E.

L'égalité $\lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$ vient de

$$\lambda \cdot (-u) + \lambda \cdot u = \lambda \cdot (-u + u) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Enfin, l'égalité $(-\lambda) \cdot (-u) = \lambda \cdot u$ résulte de $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u)$ appliquée à $-u$ au lieu de u.

Remarque 17– Si E est un espace vectoriel contenant au moins un vecteur u différent du vecteur nul, il contient une infinité de vecteurs. En effet, pour tout entier n, le vecteur $2^n u$ est dans E. Or, dès que $m \neq n$, on a $2^n u \neq 2^m u$ [g].

2 Sous-espaces vectoriels

2.1) Définition

Il est assez long de vérifier qu'un ensemble est un espace vectoriel. En pratique, on dispose d'une liste d'espaces vectoriels de référence (pour le moment notre liste est formée des espaces $\mathbb{K}^n$ et des espaces de matrices) et on obtient de nouveaux espaces vectoriels en considérant les *sous-espaces vectoriels* de ces espaces.

Définition 18– *Une partie* A *d'un espace vectoriel* E *sur* $\mathbb{K}$ *est dite* stable par addition *de* E *si pour tous éléments x et y de* A *on a $x + y \in$* A *(l'addition étant celle de* E*). Elle est dite* stable par produit externe *de* E *si pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout élément $x \in$* A*, on a $\lambda x \in$* A *(le produit externe étant celui de* E*).*

Définition 19– *Une partie* A *non vide d'un espace vectoriel* E*, stable par addition et produit externe de* E *est appelée* sous-espace vectoriel *de* E.

Le théorème suivant justifie la terminologie.

***Théorème* 20–** *Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel* E *sur* $\mathbb{K}$*, muni des opérations de* E*, est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$.

Démonstration. Soit A une partie de E non vide, stable par addition et par produit externe. Puisqu'elle est non vide, elle contient un élément x. Puisqu'elle est stable par produit externe elle contient aussi $0 = 0.x$. L'addition dans A est associative et commutative parce qu'elle l'est dans E. Elle admet un élément neutre pour l'addition, à savoir 0. Si $u \in$ A, la stabilité par produit externe implique $(-1)u \in$ A et donc A contient l'opposé $-u$ de u pour l'addition. Enfin le produit externe est distributif pour les additions dans $\mathbb{K}$ et dans E, il est associatif et 1 n'agit pas parce que ces propriétés sont vraies dans E. □

g. Remarquer que l'on utilise que le corps $\mathbb{K}$ est infini.

Remarque 21– Une partie d'un espace vectoriel n'est pas nécessairement un espace vectoriel. Considérons en effet l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x+1, x) \colon x \in \mathbb{R}\}$. C'est une partie du $\mathbb{R}$-esapce vectoriel $\mathbb{R}^2$. Pourtant $\mathcal{E}$ n'est pas un espace vectoriel : il n'est pas stable par addition.

Ce théorème simplifie beaucoup la démonstration qu'un ensemble V est un espace vectoriel. Dès lors qu'il est inclus dans un espace vectoriel E et que les opérations de V sont celles de E, il suffit de vérifier qu'il est non vide et que pour tous éléments x et y de V et tous scalaires λ et μ, on a $\lambda x + \mu y \in \mathrm{V}$.

Remarque 22– En pratique, pour montrer qu'une partie dont on veut montrer qu'elle est un sous-espace vectoriel de E est non vide, il suffit de vérifier qu'elle contient l'élément neutre pour l'addition de E. C'est par ailleurs nécessaire puisque tout espace vectoriel contient 0.

Exemple 23– Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathrm{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x+y+z=0\}.$$

Montrons que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: le vecteur nul $(0,0,0)$ est dans V puisque $0+0+0=0$. Soit $(x,y,z) \in \mathrm{V}$, $(x',y',z') \in \mathrm{V}$ et λ un réel. On a $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ et $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x+y+z) = 0$. L'ensemble V est donc stable par produit externe. On a aussi $(x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$ et

$$(x+x')+(y+y')+(z+z') = (x+y+z)+(x'+y'+z').$$

Comme $x+y+z=0$ et $x'+y'+z'=0$ on obtient

$$(x+x')+(y+y')+(z+z') = 0.$$

On en déduit $(x,y,z)+(x',y',z') \in \mathrm{V}$. L'ensemble V est donc stable par addition. Finalement, V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 24– Considérons le sous-ensemble de l'ensemble $\mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ défini par

$$\mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{C}) \colon a+d+e=0 \right\}.$$

Montrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{C})$.

i) La matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est dans G puisque $0+0+0=0$.

ii) Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathrm{G}$, $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \\ e' & f' \end{pmatrix} \in \mathrm{G}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \\ \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$ et $\lambda a + \lambda d + \lambda e = \lambda(a+d+e) = 0$. L'ensemble G est donc stable par produit externe.

iii) On a aussi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \\ e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \\ e+e' & f+f' \end{pmatrix}$ et $(a+a')+(d+d')+(e+e') = (a+d+e)+(a'+d'+e') = 0$. L'ensemble G est donc stable par addition.

Finalement, l'ensemble G est un sous-espace vectoriel de $M_{3,2}(\mathbb{C})$.

Exemple 25– Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et u un vecteur de E. On définit l'ensemble

$$\mathbb{K}u = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Cet ensemble contient $0 = 0u$. Si λu et $\lambda' u$ sont dans $\mathbb{K}u$ alors leur somme $(\lambda + \lambda')u$ l'est aussi. Enfin, si $\mu \in \mathbb{K}$, alors $\mu(\lambda u) = (\mu\lambda)u$ est dans $\mathbb{K}u$. On en déduit que $\mathbb{K}u$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 26– Si E est un espace vectoriel, les sous-ensembles $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble $\{0\}$ est le plus petit [h] sous-espace vectoriel de E tandis que E est le plus grand [i] .

Exercice 27– On suppose que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et que G est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel F. Montrer que G est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

La proposition suivante est une première étape vers la caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^p$ (*c.f.* § 4).

***Proposition* 28–** *L'ensemble des p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ dont les coordonnées sont solutions d'un système linéaire homogène à n équations et p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Démonstration. Notons $\mathcal{S}$ la partie de $\mathbb{K}^p$ constituée des solutions d'un tel système. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ alors

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p : A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ contient 0 puisque :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

h. Au sens de l'inclusion : tous les sous espaces vectoriels de E contiennent $\{0\}$.

i. Au sens de l'inclusion : tous les sous espaces vectoriels de E sont contenus dans E.

Il est stable par addition :

$$\text{si } A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = 0 \text{ et } A\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_p' \end{pmatrix} = 0 \text{ alors } A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_p' \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_p' \end{pmatrix} = 0.$$

Enfin il est stable par produit externe :

$$\text{si } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et si } A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = 0 \text{ alors } A\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\right) = \lambda A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = 0.$$

□

Exemple 29– L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ et } 2y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car c'est l'ensemble des triplets dont les coordonnées sont solutions du système linéaire homogène à coefficients réels

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0. \end{cases}$$

2.2) Intersection de sous-espaces vectoriels

On rappelle que si A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble E, on appelle *intersection* de A et B le sous-ensemble de E noté $A \cap B$ et défini par

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

***Théorème* 30–** *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration. Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E.

i) L'ensemble $A \cap B$ contient 0. En effet A et B sont des sous-espaces vectoriels de E donc ils contiennent tous deux 0.

ii) L'ensemble $A \cap B$ est stable par addition. En effet, considérons x et y dans $A \cap B$. Ils sont tous deux dans A qui est stable par addition donc leur somme $x + y$ est dans A. Ils sont tous deux dans B qui est stable par addition donc leur somme $x + y$ est aussi dans B. La somme $x + y$ est donc dans $A \cap B$.

iii) Enfin, l'ensemble $A \cap B$ est stable par produit externe. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in A \cap B$. Le vecteur x est dans A qui est stable par produit externe donc λx est dans A. Le vecteur x est aussi dans B qui est stable par produit externe donc λx est dans B. Le vecteur λx est donc dans $A \cap B$.

□

Exemple 31– Soit $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y + z = 0\}$. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (tous deux sont des ensembles de solutions d'un système linéaire homogène à une équation et trois inconnues). L'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ et } 2y + z = 0\}$$

est $F_1 \cap F_2$ donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 32– L'ensemble des p-uplets dont les coordonnées sont des solutions d'un système linéaire homogène à n équations et p inconnues est l'intersection des sous-espaces déterminés par chacune des équations du système.

2.3) Réunion et somme de sous-espaces vectoriels

On rappelle que si A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble E, on appelle *réunion* de A et B le sous-ensemble de E noté $A \cup B$ et défini par

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

⚠ La réunion de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E peut ne pas être un sous-espace vectoriel de E. Considérons par exemple les deux sous-espaces vectoriels A et B de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}.$$

On a $A \cup B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \text{ ou } x = 0\}$. Or $(0, 1, 2) \in A \cup B$ et $(1, 0, 2) \in A \cup B$ mais $(0, 1, 2) + (1, 0, 2) = (1, 1, 4) \notin A \cup B$. L'ensemble $A \cup B$ n'est donc pas stable par addition et n'est pas un un espace vectoriel.

On introduit alors la notion de somme d'espaces vectoriels.

Définition 33– *Soit* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E. *On appelle* somme *de* F *et* G *et on note* $F + G$ *l'ensemble*

$$F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\}.$$

Exemple 34– Considérons les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}.$$

Tout élément de F est de la forme $(0, 0, z)$ et tout élément de G est de la forme $(x, 0, 0)$ avec x et z réels. Les sommes d'un élément de F et d'un élément de G sont donc toutes de la forme $(x, 0, 0) + (0, 0, z) = (x, 0, z)$. Réciproquement, tout vecteur $(x, 0, z)$ s'écrit $(x, 0, z) = (x, 0, 0) + (0, 0, z)$. Le vecteur $(x, 0, 0)$ est dans F et le vecteur $(0, 0, z)$ est dans G. On a donc

$$F + G = \{(0, 0, z) + (x, 0, 0), x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}.$$

Théorème 35– *Si* F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E *alors* $F+G$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration. i) Le vecteur nul 0 est dans F, il est aussi dans G. De plus $0 = 0+0$. Donc l'ensemble $F+G$ contient 0.

ii) Soit $f+g$ et $f'+g'$ avec f, f' dans F et g, g' dans G deux vecteurs de $F+G$. Leur somme est $(f+g)+(f'+g') = (f+f')+(g+g')$. Puisque $f+f'$ est dans F et $g+g'$ est dans G, on en déduit que cette somme $(f+g)+(f'+g')$ est dans $F+G$. L'ensemble $F+G$ est stable par addition.

iii) Enfin, si λ est un scalaire alors $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$. Puisque λf est dans F et λg est dans G, on en déduit que $\lambda(f+g)$ est dans $F+G$. Cet ensemble est donc stable par produit externe.

□

Exercice 36– On se donne deux sous-espaces vectoriels F et G de l'espace vectoriel E. Montrer que F et G sont aussi des sous-espaces vectoriels de $F+G$.

Remarque 37– On se donne deux sous-espaces vectoriels F et G de l'espace vectoriel E. Le sous-espace vectoriel $F+G$ est le plus petit des sous-espaces vectoriels contenant $F \cup G$. Cela signifie que tout sous-espace vectoriel de E qui contient $F \cup G$ contient aussi $F+G$. Montrons le. Soit H un sous-espace vectoriel de E qui contient $F \cup G$: tout élément qui est dans $F \cup G$ est aussi dans H. Nous voulons montrer que tout élément qui est dans $F+G$ est aussi dans H. Soit donc $f+g$ un élément de $F+G$ où $f \in F$ et $g \in G$, nous voulons montrer que $f+g$ un élément de H. On a $f \in F$ donc $f \in F \cup G$ et donc $f \in H$. De même, $g \in G$ donc $g \in F \cup G$ et donc $g \in H$. Puisque H est un espace vectoriel, il est stable par addition donc $f+g \in H$.

2.4) Supplémentaires

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel contient au moins son vecteur nul. Le sous-espace $\{0\}$ est donc le plus petit sous-espace vectoriel [j] de E. Deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel sont dit en somme directe si leur intersection est la plus petite possible.

Définition 38– *Si* F_1 *et* F_2 *sont deux sous-espaces vectoriels de* E, *on dit que* F_1 *et* F_2 *sont en* somme directe *si* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

L'espace vectoriel E est l'un des ses sous-espaces vectoriels. C'est même le plus grand d'entre eux (tous sont des parties de E). Étant donnés deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E, en plus de demander que leur intersection soit minimum, on peut demander que leur somme soit maximale.

j. D'après la remarque 17, c'est même le seul qui n'ait qu'un nombre fini d'éléments.

Définition 39– *Si* F_1 *et* F_2 *sont deux sous-espaces vectoriels de* E, *on dit que* F_1 *est* supplémentaire *de* F_2 *dans* E *si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1) *leur somme est* E ;
2) *leur intersection est {0}.*

On note

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

Remarque 40– Si F_1 est *supplémentaire* de F_2 dans E alors, F_2 est aussi supplémentaire de F_1 dans E. On dit aussi que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E ou que E est somme directe de F_1 et F_2.

Exemple 41– Soit F_1 et F_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F_1 = \{(a, 2a, -a) \colon a \in \mathbb{R}\} = \{a(1,2,-1) \colon a \in \mathbb{R}\}$$
$$F_2 = \left\{(b+c, b-c, c) \colon (b,c) \in \mathbb{R}^2\right\} = \{b(1,1,0) + c(1,-1,1) \colon b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Montrons que l'intersection de F_1 et F_2 est réduite à $\{0\}$. Un vecteur u est un élément de F_1 si et seulement s'il existe un réel a tel que $u = (a, 2a, -a)$. Un vecteur u est dans F_2 si et seulement s'il existe des réels b et c tels que $u = (b+c, b-c, c)$. Les vecteurs de $F_1 \cap F_2$ sont donc les vecteurs u pour lesquels existent des réels a, b et c tels que $u = (a, 2a, -a) = (b+c, b-c, c)$. Cela conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} a = b + c \\ 2a = b - c \\ -a = c. \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} a - b - c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ -a \quad\;\; - c = 0. \end{cases}$$

La matrice associée à ce système, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, a pour déterminant $1 \neq 0$. La seule solution est donc $a = b = c = 0$. Ainsi $(a, 2a, -a) = 0$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Montrons ensuite $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$. Étant donné $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, on doit l'écrire comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2. On doit donc trouver a, b, c tels que $(\alpha, \beta, \gamma) = (a, 2a, -a) + (b+c, b-c, c)$. Cela conduit au système

$$\begin{cases} a + b + c = \alpha \\ 2a + b - c = \beta \\ -a \quad\;\; + c = \gamma \end{cases}$$

d'inconnues a, b, c. La matrice associée à ce système, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, a pour déterminant $1 \neq 0$. Il admet donc une solution (unique) et $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.

En résumé, l'intersection de F_1 et F_2 est $\{0\}$, leur somme est $\mathbb{R}^3$, donc $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$.

Remarque 42– L'exemple 41 montre qu'il est assez long de montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires puisqu'il faut résoudre deux systèmes. On verra dans la suite du cours (voir les exemples 104 et 117) que le calcul d'un seul déterminant est en fait suffisant.

Exercice 43– Montrer que les sous-espaces vectoriels

$$F_1 = \{(x, y, 0) \colon x, y \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \{(0, y, z) \colon y, z \in \mathbb{R}\}$$

de $\mathbb{R}^3$ ont pour intersection le sous-espace vectoriel

$$F_1 \cap F_2 = \{(0, y, 0) \colon y \in \mathbb{R}\}$$

et qu'ils ne sont donc pas en somme directe.

Exercice 44– Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G de l'exemple 34 ont $\{0\}$ pour intersection. En déduire qu'ils sont en somme directe. Montrer cependant qu'ils ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

***Proposition* 45–** *Si* F_1 *et* F_2 *sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de* E*, tout vecteur de* E *s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de* F_1 *et d'un vecteur de* F_2.

Démonstration. Si $u \in E$, on doit écrire $u = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$. C'est possible car $E = F_1 + F_2$. Il faut ensuite démontrer l'unicité de cette écriture. Si de plus $u = f_1' + f_2'$ avec $f_1' \in F_1$ et $f_2' \in F_2$ alors $f_1' - f_1 = f_2 - f_2'$. Le membre de gauche est dans F_1, celui de droite dans F_2 donc $f_1' - f_1 \in F_1 \cap F_2$. Mais $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ donc $f_1 - f_1' = 0$. On en déduit $f_1 = f_1'$ puis $f_2 = f_2'$. □

2.5) Sous-espaces vectoriels engendrés

Définition 46– *Un vecteur* u *de* E *est* combinaison linéaire *des vecteurs* $u_1, \ldots, u_p$ *de* E *s'il existe des scalaires* $x_1, \ldots, x_p$ *tels que*

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_p u_p.$$

Les scalaires $x_1, \ldots, x_p$ *s'appellent les* coefficients *de la combinaison linéaire.*

Exemple 47– Dans $\mathbb{R}^4$, posons

$$u_1 = (1, 2, 0, 1),\ u_2 = (2, 1, 3, -1),\ u_3 = (3, 3, 3, 0)$$

et

$$u = (5, 4, 6, -1).$$

Le vecteur u est combinaison linéaire de $\{u_1, u_2, u_3\}$ puisque

$$u = \frac{1}{2} u_1 + \frac{3}{2} u_2 + \frac{1}{2} u_3.$$

Remarquez que cette combinaison linéaire égale à u n'est pas la seule, par exemple

$$u = u_1 + 2u_2 = u_2 + u_3.$$

Exemple 48– Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de $M_2(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ puisque

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}.$$

Définition 49– *Si $v_1, \dots, v_p$ sont des vecteurs de* E*, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de* E*. On l'appelle sous-espace engendré par $v_1, \dots, v_p$ et on le note* $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

Montrons que $V = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ est effectivement un sous-espace vectoriel de E. Il contient 0 puisque

$$0 = \sum_{i=1}^{p} 0 v_i.$$

Si $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$ et $\lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_p v_p$ sont deux vecteurs de V alors

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p) + (\lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_p v_p) = (\lambda_1 + \lambda'_1) v_1 + \cdots + (\lambda_p + \lambda'_p) v_p$$

est aussi un vecteur de V. L'ensemble V est donc stable par addition. Enfin, si $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$ est un vecteur de V et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\lambda(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p) = (\lambda\lambda_1) v_1 + \cdots + (\lambda\lambda_p) v_p$$

est aussi un vecteur de V. L'ensemble V est donc stable par produit externe.

Remarque 50– Si parmi les vecteurs $v_1, \dots, v_p$, l'un d'eux au moins est nul, alors l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ contient au moins un vecteur non nul. C'est donc un ensemble infini.

Exemple 51– On considère les deux ensembles

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ et } 2y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y - z = 0\}.$$

Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (vérifiez le). Leur intersection est le sous-espace vectoriel formé des triplets réels (x,y,z) dont les coordonnées sont solutions du système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x - 3y - z = 0. \end{cases}$$

Ce système équivaut au système échelonné

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \quad y+\dfrac{1}{2}z=0 \end{cases}$$

d'unique inconnue non principale z. Les éléments de $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ sont donc les triplets (x,y,z) vérifiant $x=y=-z/2$. On peut réécrire ces triplets en

$$\left(-\frac{z}{2},-\frac{z}{2},z\right)=z\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right).$$

Ainsi

$$\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\left\{z\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right):\ z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right).$$

Exemple 52– Dans $\mathbb{R}^4$, soit $\mathrm{V}=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ avec $e_1=(0,1,1,1)$ et $e_2=(1,0,1,1)$. On a $(x,y,z,t)\in\mathrm{V}$ si et seulement s'il existe des réels λ et μ tels que $(x,y,z,t)=\lambda e_1+\mu e_2$. Or $\lambda e_1+\mu e_2=(\mu,\lambda,\lambda+\mu,\lambda+\mu)$ donc (x,y,z,t) appartient à V, si et seulement si le système

$$\begin{cases} \mu=x \\ \lambda=y \\ \lambda+\mu=z \\ \lambda+\mu=t \end{cases}$$

d'inconnues λ et μ a au moins une solution. Ce système est équivalent au système échelonné

$$\begin{cases} \mu=x \\ \lambda=y \\ 0=x+y-z \\ 0=x+y-t. \end{cases}$$

Il admet au moins une solution si et seulement si les équations non principales ont un second membre nul, donc si et seulement si $x+y-z=0$ et $x+y-t=0$. On en tire

$$\mathrm{V}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ x+y-z=0 \text{ et } x+y-t=0\right\}.$$

Exemple 53– Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u_1=(1,1,2)$, $u_2=(3,1,1)$, $v_1=(1,0,1)$ et $v_2=(5,1,3)$ puis $\mathrm{U}=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ et $\mathrm{V}=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$. Déterminons $\mathrm{U}\cap\mathrm{V}$. Les vecteurs de U sont les vecteurs qui s'écrivent xu_1+yu_2 avec x et y réels. Un tel vecteur est dans V si et seulement s'il existe des réels z et t tels qu'il s'écrive aussi zv_1+tv_2. Un vecteur xu_1+yu_2 de U est donc dans V si et seulement s'il existe des réels z et t tels que $xu_1+yu_2=zv_1+tv_2$, c'est-à-dire $(x+3y,x+y,2x+y)=(z+5t,t,z+3t)$. On cherche alors les conditions sur x et y pour lesquelles le système

$$\begin{cases} x+3y=z+5t \\ x+\ \ y=\qquad t \\ 2x+\ \ y=z+3t \end{cases}$$

d'inconnues z et t a au moins une solution. Après mise en échelons[k], ce système équivaut à

$$\begin{cases} z + 5t = x + 3y \\ \quad\ \ t = x + y \\ \quad\ \ 0 = 3x. \end{cases}$$

Il a au moins une solution si et seulement si l'équation non principale a un second membre nul, donc si et seulement si $x = 0$. Ainsi, les vecteurs de $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ sont ceux de la forme $0u_1 + yu_2$ avec $y \in \mathbb{R}$. On en déduit $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \mathrm{Vect}(u_2)$.

Remarque 54– Si $u_1, \ldots, u_n$ sont des vecteurs de E et si $1 \leq k \leq n$ alors

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n).$$

En effet, tout vecteur $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k$ de $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$ s'écrit

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k + 0u_{k+1} + \cdots + 0u_n$$

et est donc aussi un vecteur de $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Remarque 55– Si α est un scalaire non nul alors

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, \alpha u_k, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n).$$

En effet

$$\lambda u_1 + \cdots + \lambda(\alpha u_k) + \cdots + \lambda u_n = \lambda u_1 + \cdots + (\lambda\alpha) u_k + \cdots + \lambda u_n$$

d'où $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, \alpha u_k, \ldots, u_n) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n)$ et

$$\lambda u_1 + \cdots + \lambda u_k + \cdots + \lambda u_n = \lambda u_1 + \cdots + \frac{\lambda}{\alpha}(\alpha u_k) + \cdots + \lambda u_n$$

d'où $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, \alpha u_k, \ldots, u_n)$.

Exercice 56– Montrer que si une famille engendre un espace vectoriel, cette famille privée de ces éléments nuls engendre le même espace vectoriel. Autrement dit, montrer que

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n, 0) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n).$$

La somme des sous-espaces vectoriels engendrés est facile à décrire.

***Proposition* 57–** *Soit $u_1, \ldots, u_m$ et $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel* E. *Alors*

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_m) + \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n).$$

Exercice 58– Démontrer la proposition 57.

k. Par les opérations élémentaires $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

Si une famille engendre un sous-espace vectoriel, la famille obtenue en ajoutant un l'un des vecteurs une combinaisons linéaire des autres vecteurs engendre le même espace vectoriel. Autrement dit, on a la proposition suivante.

***Proposition* 59–** *Soit $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel* E. *Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors,*

$$\mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j u_j, \ldots, u_n\right) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$$

pour tout ensemble de scalaires $\{\alpha_j : 1 \leq j \leq n, j \neq i\}$.

Démonstration. On note

$$\mathcal{U} = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}^\sharp = \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j u_j, \ldots, u_n\right).$$

i) Soit $u \in \mathcal{U}^\sharp$. Il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_i \left(u_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j u_j\right) + \cdots + \lambda_n u_n.$$

On a donc

$$u = \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_i u_i + \ldots + \mu_n u_n$$

avec

$$\mu_j = \begin{cases} \lambda_j + \lambda_i \alpha_j & \text{si } j \neq i \\ \lambda_i & \text{si } j = i. \end{cases}$$

On en déduit que $u \in \mathcal{U}$. Ainsi $\mathcal{U}^\sharp \subset \mathcal{U}$.

ii) Soit $u \in \mathcal{U}$. Il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_i u_i + \cdots + \lambda_n u_n.$$

On écrit

$$\begin{aligned} &\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_i u_i + \cdots + \lambda_n u_n \\ &\qquad = (\lambda_1 - \lambda_i \alpha_1) u_1 + \cdots + \lambda_i \left(u_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j u_j\right) + \cdots + (\lambda_n - \lambda_i \alpha_n) u_n. \end{aligned}$$

On a donc

$$u = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_i \left(u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j u_j \right) + \cdots + \mu_n u_n$$

avec

$$\mu_j = \begin{cases} \lambda_j - \lambda_i \alpha_j & \text{si } j \neq i \\ \lambda_i & \text{si } j = i. \end{cases}$$

On en déduit que $u \in \mathcal{U}^\sharp$. Ainsi $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^\sharp$.

□

Exemple 60– Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3)$ et $u_3 = (3,4,5)$. On a $u_3 = 2u_1 + u_2$. Or,

$$\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3 - 2u_1 - u_2)$$

et

$$\text{Vect}(u_1, u_2, u_3 - 2u_1 - u_2) = \text{Vect}(u_1, u_2, 0) = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

Ainsi,

$$\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

Écrire un espace engendré avec le moins de vecteurs possibles est l'un des objetcifs de la partie suivante.

3 Bases des espaces vectoriels

3.1) Indépendance linéaire dans les espaces vectoriels

Définition 61– *Une famille de vecteurs de* E *est* liée *si l'un d'eux est combinaison linéaire des autres. Une famille de vecteurs de* E *est* libre *si elle n'est pas liée, autrement dit si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.*

Remarque 62– Pour dire qu'une famille de vecteurs est liée, on dit aussi que ses vecteurs sont *linéairement dépendants*. Pour dire qu'une famille de vecteurs est libre, on dit aussi que ses vecteurs sont *linéairement indépendants*.

Exemple 63– La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ de l'exemple 47 est liée. On a en effet $u_3 = u_1 + u_2$.

Si la définition 61 permet aisément de détecter qu'une famille est liée, elle n'est pas très pratique pour montrer qu'une famille est libre. On utilise alors le résultat suivant.

***Théorème* 64–** *1) Une famille est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de cette famille valant* 0 *est celle dont tous les coefficients sont nuls.*

2) Une famille est liée si et seulement s'il existe une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls qui vaut 0.

La théorème 64 énonce que la famille de vecteurs $\{u_1,\dots,u_n\}$ est libre si et seulement si l'équation

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$$

d'inconnues $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ n'a que $\lambda_1 = 0,\dots,\lambda_n = 0$ comme solution.

Démonstration du théorème 64. Si la famille $\{v_1,\dots,v_n\}$ est liée, il existe un indice i et des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n$$

et donc

$$0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} - v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n$$

ce qui exprime que 0 est combinaison linéaire de $\{v_1,\dots,v_n\}$. Les coefficients de cette combinaison linéaire ne sont pas tous nuls puisque le coefficient de v_i est -1. On en déduit que si la seule combinaison linéaire d'une famille valant 0 est la combinaison dont tous les coefficients sont nuls alors la famille n'est pas liée. Elle est donc libre.

Si la famille est libre, considérons une combinaison linéaire $\{v_1,\dots,v_n\}$ de 0 :

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

S'il existe un coefficient non nul, λ_i, alors

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n.$$

Le vecteur v_i est combinaison linéaire des autres : ceci contredit la liberté de la famille $\{v_1,\dots,v_n\}$. On en déduit que tous les coefficients sont nuls. □

Exemple 65– Dans $\mathbb{R}^4$, posons

$$u_1 = (1,2,0,1),\ u_2 = (2,1,3,-1),\ u_3 = (3,3,3,0).$$

Cherchons les réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que la combinaison linéaire $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ soit nulle. En explicitant la nullité de chacune des trois coordonnées, on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Ce système a pour solutions les triplets $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ vérifiant $\lambda_1=\lambda_2=-\lambda_3$, c'est-à-dire de la forme $\lambda_3(-1,-1,1)$ et ce pour tout choix de $\lambda_3\in\mathbb{R}$. Il existe donc une combinaison linéaire de $\{u_1,u_2,u_3\}$ à coefficients non tous nuls égale à 0 et cette famille est liée. Pour le choix $\lambda_3=-1$, par exemple, on obtient $u_1+u_2-u_3=0$. Il faut comparer avec l'exemple 63.

Exemple 66– Les matrices $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ de l'exemple 48 forment une famille libre. En effet, si $aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22}=0$ alors la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ est nulle donc $a=b=c=d=0$.

À titre d'exercice, on démontrera l'utile proposition suivante.

***Proposition* 67–** *1) Une famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée ;*

2) une famille de vecteurs contenant deux vecteurs égaux est liée ;

3) si une famille est libre, elle ne contient pas le vecteur nul ;

4) si une famille est libre, tous ses éléments sont deux à deux distincts.

Remarque 68– Si une famille $\{u_1,\ldots,u_n\}$ est libre alors que la famille $\{u_1,\ldots,u_n,v\}$ obtenue par ajout d'un vecteur v est liée, alors v est combinaison linéaire de $u_1,\ldots,u_n$. En effet, si $\{u_1,\ldots,u_n,v\}$ est liée, il existe des scalaires non tous nuls $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1}$ tels que

$$\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n+\lambda_{n+1}v=0.$$

On voudrait pouvoir en déduire que

$$v=-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}u_1-\ldots-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}u_n$$

qui implique bien que v est combinaison linéaire de $u_1,\ldots,u_n$. Pour cela, on a cependant besoin de savoir que λ_{n+1} est non nul. Si $\lambda_{n+1}=0$, alors

$$\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n=0.$$

La famille $\{u_1,\ldots,u_n\}$ étant libre, on en tire $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$. Ceci contredit le fait que les scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1}$ ne sont pas tous nuls. On a donc bien $\lambda_{n+1}\neq 0$.

3.2) Base canonique de $\mathbb{K}^n$

Pour chaque $i\in\{1,\ldots,n\}$ on définit le vecteur $\mathcal{E}_i$ de $\mathbb{K}^n$ comme étant celui dont la coordonnée n° i est 1 et toutes les autres sont nulles.

Exemple 69– Dans $\mathbb{R}^3$ on a

$$\mathcal{E}_1=(1,0,0),\quad \mathcal{E}_2=(0,1,0),\quad \mathcal{E}_3=(0,0,1).$$

Dans $\mathbb{C}^5$ on a

$$\mathcal{E}_1=(1,0,0,0,0),\quad \mathcal{E}_2=(0,1,0,0,0),\quad \mathcal{E}_3=(0,0,1,0,0),\quad \mathcal{E}_4=(0,0,0,1,0),\quad \mathcal{E}_5=(0,0,0,0,1).$$

Étant donné un vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$, l'utilisation des opérations de $\mathbb{K}^n$ conduit à

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1)$$

c'est-à-dire

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\mathcal{E}_1 + x_2\mathcal{E}_2 + \dots + x_n\mathcal{E}_n.$$

Le vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est donc combinaison linéaire des vecteurs $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$. Puisque n'importe quel vecteur de $\mathbb{K}^n$ a cette propriété, la famille de vecteurs $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n\}$ engendre $\mathbb{K}^n$, autrement dit $\mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n)$.. Enfin, tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ s'écrit *de façon unique* comme combinaison linéaire de $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$. En effet, si

$$x_1\mathcal{E}_1 + x_2\mathcal{E}_2 + \dots + x_n\mathcal{E}_n = y_1\mathcal{E}_1 + y_2\mathcal{E}_2 + \dots + y_n\mathcal{E}_n$$

alors

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

et donc

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n.$$

On dit que $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n\}$ est une *base* de $\mathbb{K}^n$.

Définition 70– La famille de vecteurs $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n\}$ *est appelée* base canonique *de* $\mathbb{K}^n$.

Exemple 71– Dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$(1, 2, 3) = \mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2 + 3\mathcal{E}_3.$$

Dans $\mathbb{C}^5$, on a

$$(1, -2, 3i, -6, 7-2i) = \mathcal{E}_1 - 2\mathcal{E}_2 + 3i\mathcal{E}_3 - 6\mathcal{E}_4 + (7-2i)\mathcal{E}_5.$$

3.3) Bases d'un espace vectoriel

On fixe un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Sauf mention contraire, E n'est pas $\{0\}$.

Définition 72– On dit qu'une famille de vecteurs $\mathcal{V}$ *de* E engendre E *si tout élément de* E *est combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de* $\mathcal{V}$. *On dit encore que* $\mathcal{V}$ *est une* famille génératrice *de* E.

Autrement dit, la famille $\mathcal{V}$ engendre E si, pour tout $v \in E$ on peut trouver des vecteurs $v_1, \dots, v_p$ dans $\mathcal{V}$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

Si la famille $\mathcal{V}$ est finie [l], cela revient à dire que $\mathrm{Vect}(\mathcal{V}) = E$ [m].

l. C'est-à-dire composée d'un nombre fini de vecteurs

m. Si $\mathcal{V}$ est infinie aussi à condition de définir $\mathrm{Vect}(\mathcal{V})$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{V}$.

Définition 73– *On dit qu'un espace vectoriel est de* type fini *s'il admet une famille génératrice finie.*

Exercice 74– Comprendre pourquoi le $\mathbb{R}$-espace vectoriel R est de type fini. Plus généralement, comprendre pourquoi le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de type fini.

En pratique, nous ne rencontrerons que des espaces vectoriels de *type fini* dans ce cours. Il existe cependant des espaces vectoriels qui ne sont pas de type fini (l'annexe E montre que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ n'est pas de type fini ; on rencontrera un autre espace vectoriel qui n'est pas de type fini dans la partie 5.2 ou encore dans l'annexe A du chapitre « Suites ».).

Définition 75– *On dit qu'une famille finie de vecteurs de* E *est une* base *de* E *si elle est à la fois libre et génératrice de* E.

Cette définition justifie le nom de *base* canonique donnée définition 70 pour $\mathbb{K}^n$.

Exemple 76– Les matrices $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ de l'exemple 48 forment une base de $M_2(\mathbb{R})$. La famille engendre $M_2(\mathbb{R})$ (on l'a vu dans l'exemple 48) et elle est libre (on l'a vu dans l'exemple 66).

Les exemples 48, 66 et 76 se généralisent aisément. En notant E_{ij} la matrice de $M_{mn}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui à l'intersection de la ligne n° i et de la colonne n° j qui vaut 1 [(n)], on voit que la famille des mn matrices E_{ij} (où i prend toutes le valeurs entre 1 et m et j prend toutes le valeurs entre 1 et n) est une base de $M_{mn}(\mathbb{K})$.

Théorème 77– *Soit* E *un espace vectoriel et* $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *une base de* E. *Tout vecteur de* E *s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de* $\mathcal{E}$. *Les coefficients de cette combinaison linéaire s'appellent les* coordonnées *du vecteur dans la base* $\mathcal{E}$.

Démonstration. Tout vecteur de v est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est une famille génératrice de E. Soit $v \in E$ et $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ deux ensembles de scalaires tels que

$$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n.$$

On a alors

$$(\lambda_1 - \mu_1)e_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)e_n = 0$$

et puisque la famille $\mathcal{E}$ est libre, on en déduit $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. L'écriture de v en combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{E}$ est donc unique. □

n. Avec les notions de l'annexe A du chapitre *Matrices*, c'est la matrice $T_{ij}(1) - I_n$ si $i \neq j$ et la matrice $D_i(2) - I_n$ si $i = j$.

Exemple 78– Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, -1, 7)$, $e_2 = (-5, 2, 3)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Montrons que cette famille est libre. Soit α, β et γ des réels tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. Alors

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta \quad = 0 \\ -\alpha + 2\beta \quad = 0 \\ 7\alpha + 3\beta + \gamma = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Par mise en échelon, ce système équivaut à

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta \quad = 0 \\ \qquad \beta \quad = 0 \\ \qquad\quad \gamma = 0. \end{cases}$$

On a donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre. Montrons ensuite que la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ engendre $\mathbb{R}^3$. Étant donné un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, il s'agit de trouver trois réels α, β et γ tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = (x, y, z)$. Cette équation (d'inconnues α, β et γ)) est équivalente au système :

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta \quad = x \\ -\alpha + 2\beta \quad = y \\ 7\alpha + 3\beta + \ \gamma = z. \end{cases} \tag{2}$$

Par mise en échelon, ce système équivaut à

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta \quad = x \\ \qquad \beta \quad = -\dfrac{1}{3}(x + y) \\ \qquad\quad \gamma = \dfrac{1}{3}(17x + 38y + 3z). \end{cases}$$

La solution est $(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{3}(-2x - 5y, -x - y, 17x + 38y + 3z)$. Le système (2) a au moins une solution. La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$. Puisqu'on a aussi montré qu'elle est libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 79– Le lecteur attentif aura remarqué que les systèmes (1) et (2) ne diffèrent que par leur second membre. Lorsque le nombre de vecteurs de la famille égale le nombre de coordonnées de chacun des vecteurs, le raisonnement suivant permet de déduire de la liberté de la famille le fait qu'elle engendre l'espace. Le système (1) s'écrit $A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

En montrant la liberté, on montre que ce système *carré* équivaut à un système en échelon sans ligne nul. La matrice A est donc inversible (voir § 4 du chapitre *Matrices*).

On en déduit que le système (2) a une solution (qui plus est unique) puis que la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base.

⚠ À part l'espace vectoriel $\{0\}$ qui n'admet que l'ensemble vide $\emptyset$ comme base, les espaces vectoriels qui admettent au moins une base [o] admettent une infinité de bases. En effet, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base, alors $\{\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\}$ est aussi une base pour tout choix de $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ce n'est pas le seul moyen de construire des bases comme le montre l'exemple 78.

3.4) Dimension

Dans cette partie, nous allons démontrer que tous les espaces vectoriels de type fini admettent une base et que toutes les bases d'un même espace vectoriel ont même nombre d'éléments. On appellera alors *dimension* ce nombre d'éléments. Le point de départ est le théorème fondamental ci-dessous. Il sera démontré en annexe B. On l'appelle *théorème de la base incomplète* et il énonce qu'une famille libre quelconque peut être complétée en une base en prenant des vecteurs dans une famille génératrice quelconque.

***Théorème* 80** (Théorème de la base incomplète)– *Soit* E *un espace vectoriel non réduit à* $\{0\}$. *Soit* $\{\ell_1, \dots, \ell_p\}$ *une famille libre de* E *et* $\{g_1, \dots, g_q\}$ *une famille génératrice de* E. *Alors il existe un entier* $n \geq p$ *et une base* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *de* E *telle que :*

1) *pour tout* $i \leq p$ *on a* $e_i = \ell_i$ *;*
2) *pour tout* $i > p$ *on a* $e_i \in \{g_1, \dots, g_q\}$.

Remarque 81– Dans l'énoncé précédent, le point 2) disparaît lorsque $n = p$.

***Corollaire* 82–** *Tout espace vectoriel de type fini contient une base.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel de type fini. Si $E = \{0\}$, l'ensemble vide $\emptyset$ est une base. Si E n'est pas réduit à $\{0\}$, il contient au moins un vecteur $\ell \neq 0$. La famille $\{\ell\}$ est libre. De plus E est de type fini, donc il contient une famille génératrice $\{g_1, \dots, g_q\}$. L'existence d'une base de E est alors une conséquence du théorème de la base incomplète. □

Remarque 83– Le théorème de la base incomplète s'appelle ainsi puisqu'il permet de compléter une famille libre d'un espace vectoriel en une base en lui ajoutant des vecteurs pris dans une famille génératrice.

Le théorème de la base incomplète affirme qu'une base peut-être obtenue en ajoutant des éléments à une famille libre. Cette base aura donc au moins autant d'éléments que la famille libre. On montre que les familles libres ont toujours un nombre d'éléments inférieur au nombre d'éléments des bases.

o. On verra au § 3.4 que c'est le cas de tous les espaces vectoriels de type fini.

***Proposition* 84–** *Soit* $\{e_1,\dots,e_n\}$ *une base de* E *et* $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$ *une famille libre de* E*. Alors* $p \leq n$*.*

Démonstration. On décompose les vecteurs de $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$ dans la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ et, pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$ on note $x_{1j}, x_{2j},\dots,x_{nj}$ les coordonnées de ℓ_j dans cette base. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\ell_1 &= x_{11}e_1 + x_{21}e_2 + \ldots + x_{n1}e_n \\
\ell_2 &= x_{12}e_1 + x_{22}e_2 + \ldots + x_{n2}e_n \\
\vdots \quad & \qquad\quad \vdots \\
\ell_p &= x_{1p}e_1 + x_{2p}e_2 + \ldots + x_{np}e_n.
\end{aligned} \tag{3}$$

Dire que $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$ est libre, c'est dire que la seule solution $\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ de

$$\lambda_1\ell_1 + \ldots + \lambda_p\ell_p = 0 \tag{4}$$

est $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. On reporte l'équation (3) dans (4). Cette équation (4) équivaut alors à

$$\mathrm{L}_1 e_1 + \cdots + \mathrm{L}_n e_n = 0 \tag{5}$$

avec

$$\begin{cases}
\mathrm{L}_1 = x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \cdots + x_{1p}\lambda_p \\
\mathrm{L}_2 = x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \cdots + x_{2p}\lambda_p \\
\quad\vdots \qquad \vdots \\
\mathrm{L}_n = x_{n1}\lambda_1 + x_{n2}\lambda_2 + \cdots + x_{np}\lambda_p.
\end{cases}$$

Puisque la famille $\{e_1,\dots,e_n\}$ est libre, l'équation (5) équivaut à $\mathrm{L}_1 = \cdots = \mathrm{L}_n = 0$ et donc au système

$$\begin{cases}
x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \cdots + x_{1p}\lambda_p = 0 \\
x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \cdots + x_{2p}\lambda_p = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
x_{n1}\lambda_1 + x_{n2}\lambda_2 + \cdots + x_{np}\lambda_p = 0.
\end{cases}$$

Supposons, par l'absurde, que $p > n$. Le système précédent a strictement moins d'équations (il en a n) que d'inconnues (ce sont les p scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_p$). Grâce au corollaire 55 du chapitre « Matrices », il admet donc une solution non nulle. Cela contredit le fait que la famille $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$ est libre. □

Remarque 85– Dans $\mathbb{K}^n$, on connaît une base à n éléments, sa base canonique. Les familles libres de $\mathbb{K}^n$ ont donc au plus n éléments.

On déduit de la proposition 84 un moyen immédiat de montrer qu'une famille « trop grande » n'est pas libre mais aussi le théorème fondamental suivant.

***Théorème* 86–** *Toutes les bases d'un espace vectoriel de type fini ont même nombre d'éléments.*

Démonstration. Si $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_p\}$ sont deux bases de l'espace vectoriel E, il s'agit de montrer que $n = p$. Puisqu'en particulier $\mathcal{E}$ est une famille libre et $\mathcal{F}$ une base de E, on a $n \leq p$ d'après la proposition 84. Mais $\mathcal{F}$ est une famille libre et $\mathcal{E}$ une base de E d'où $p \leq n$. Finalement $n = p$. □

Définition 87– *Étant donné un espace vectoriel de type fini* E*, le nombre d'éléments de ses bases s'appelle sa* dimension*. On note* $\dim \mathrm{E}$ *la dimension de* E.

Remarque 88– La notion de dimension d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ dépend de $\mathbb{K}$. Par exemple, $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si on le considère muni du produit externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (\lambda, z) & \mapsto & \lambda z \end{array}$$

mais c'est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ si on le considère muni du produit externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (\lambda, z) & \mapsto & \lambda z. \end{array}$$

Tout vecteur z du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ s'écrit $z = z \cdot 1$. La famille $\{1\}$ est donc une famille génératrice du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. De plus, elle est libre. C'est donc une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ qui est alors de dimension 1. Tout vecteur z du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ s'écrit $z = \mathfrak{Re}(z) \cdot 1 + \mathfrak{Im}(z) \cdot i$. La famille $\{1, i\}$ est donc une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. De plus, elle est libre sur $\mathbb{R}$. C'est donc une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ qui est alors de dimension 2. Si on veut préciser la dépendance en $\mathbb{K}$ on note $\dim_{\mathbb{K}}$ la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Exemple 89– Les calculs des paragraphes précédents montrent que

$$\dim \mathbb{K}^n = n \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K}) = mn.$$

Exemple 90– Soit $\mathrm{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ et } 2y + z = 0\right\}$. Le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad 2y + z = 0 \end{cases}$$

équivaut au système échelonné

$$\begin{cases} x + y + \phantom{\frac{1}{2}}z = 0 \\ \quad\; y + \frac{1}{2}z = 0. \end{cases}$$

Son ensemble de solutions est donc

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ x=-\frac{1}{2}z,\ y=-\frac{1}{2}z\right\}=\left\{\frac{z}{2}(-1,-1,2)\colon\ z\in\mathbb{R}\right\}.$$

L'ensemble F est donc l'espace engendré par $(-1,-1,2)$. Ce vecteur étant non nul, il forme une famille libre et donc une base de F. Ainsi, $\dim \mathrm{F} = 1$.

Exemple 91– Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\{e_1, e_2\}$ avec $e_1 = (1,2,3)$ et $e_2 = (0,-1,3)$. Vous montrerez que cette famille est libre. L'espace $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. Pour compléter $\{e_1, e_2\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$, il est donc nécessaire d'ajouter un seul vecteur e_3. Puisque $\mathbb{R}^3$ admet comme famille génératrice la base canonique $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$, l'un au moins des vecteurs $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$ convient pour e_3. Vérifions que le choix $e_3 = \mathcal{E}_3 = (0,0,1)$ convient. La famille $\{e_1, e_2, \mathcal{E}_3\}$ est libre. En effet, si $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma\mathcal{E}_3 = 0$ alors $\alpha = 0$ (nullité de la première coordonnée), $\beta = 0$ (nullité de la deuxième coordonnée) et enfin $\gamma = 0$ (nullité de la troisième coordonnée). La famille $\{e_1, e_2, \mathcal{E}_3\}$ engendre $\mathbb{R}^3$. En effet, soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on cherche des réels α, β et γ tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma\mathcal{E}_3 = (x,y,z)$. En résolvant le système

$$\begin{cases} \alpha = x \\ 2\alpha - \beta = y \\ 3\alpha + 3\beta + \gamma = z \end{cases}$$

on voit immédiatement que les choix $\alpha = x$, $\beta = 2x - y$ et $\gamma = -9x + 3y + z$ conviennent. Ainsi, $\{e_1, e_2, \mathcal{E}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 92– Dans $\mathbb{R}^4$, considérons la famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ avec

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,1,1) \\ e_2 &= (1,1,0,1) \\ e_3 &= (0,-1,1,0) \\ e_4 &= (2,1,1,2) \end{aligned}$$

et V l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et e_4. C'est donc l'ensemble des quadruplets (x,y,z,t) de $\mathbb{R}^4$ pour lesquels on peut trouver un quadruplet (a,b,c,d) tel que $(x,y,z,t) = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$. Cette équation équivaut au système

$$\begin{cases} a + b + 2d = x \\ b - c + d = y \\ a + c + d = z \\ a + b + 2d = t \end{cases}$$

lui même équivalent au système échelonné

$$\begin{cases} a + b + 2d = x \\ b - c + d = y \\ 0 = z - x + y \\ 0 = t - x. \end{cases}$$

Les équations non principales sont les deux dernières et le système a des solutions si et seulement si $t-x=0$ et $z-x+y=0$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= \{(x,y,x-y,x) \colon x,y\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x(1,0,1,1)+y(0,1,-1,0) \colon x,y\in\mathbb{R}\}\\ &= \mathrm{Vect}\{(1,0,1,1),(0,1,-1,0)\}. \end{aligned}$$

De plus, la famille $\{(1,0,1,1),(0,1,-1,0)\}$ est libre (vérifiez-le). Une base de V est donc $\{(1,0,1,1),(0,1,-1,0)\}$ et $\dim \mathrm{V}=2$.

Exemple 93– La dimension de l'espace des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes est donnée par le nombre d'inconnues non principales.

Dans la proposition suivante, on montre que la proposition 84 implique que les sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels de type fini sont aussi de type fini.

***Proposition* 94–** *Soit* E *un espace vectoriel et* F *un sous-espace vectoriel de* E*. Si* E *admet une base finie, alors* F *admet une base finie ayant moins d'éléments.*

Démonstration. Si F est réduit à $\{0\}$, son unique base est l'ensemble vide qui a 0 éléments. Supposons donc F non réduit à $\{0\}$. Soit $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E. Les familles libres de F sont des familles libres de E. Elles ont donc au plus n éléments. Soit p le plus grand entier pour lequel existe une famille libre de F à p éléments et $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$ une telle famille. On sait donc que $p\le n$. Considérons x un élément de F. Si x est l'un des vecteurs de $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$, il est alors combinaison linéaire d'éléments cette famille. Sinon, la famille $\{\ell_1,\dots,\ell_p,x\}$ de F n'est pas libre (elle a strictement plus de p éléments). Il existe donc une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls de cette famille donnant 0 d'où $0=\lambda_1\ell_1+\dots+\lambda_p\ell_p+\lambda_{p+1}x$. Le coefficient λ_{p+1} est non nul ; sinon on a une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls de la famille $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$ donnant 0, c'est impossible puisque cette famille est libre. Ainsi,

$$x=-\frac{\lambda_1}{\lambda_{p+1}}\ell_1-\dots-\frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}}\ell_p.$$

On en déduit que la famille libre $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$ engendre F. C'est donc une base de F à $p\le n$ éléments. □

Le résultat suivant généralise la remarque 79.

Corollaire 95– *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* $n\ge 1$*. Soit* $\mathcal{E}$ *une famille de* n *vecteurs de* E*. Alors :*

- *si* $\mathcal{E}$ *est libre, c'est une base de* E *;*
- *si* $\mathcal{E}$ *engendre* E*, c'est une base de* E*.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{E}$ est libre et montrons que c'est une base de E. Puisque E est de dimension n, il contient une base qui est une famille génératrice. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{E}$ en une base $\mathcal{B}$ de E. On a donc $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$. Mais $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ ayant n éléments, on a $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$ est une base de E. Supposons maintenant que $\mathcal{E}$ engendre E et montrons que c'est une base de E. On choisit un élément e_1 non nul de $\mathcal{E}$ (il en existe sinon $E = \{0\}$). Il forme une famille libre et peut donc être complété en une base $\mathcal{B}$ de E en prenant des éléments dans $\mathcal{E}$. On a alors $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$. Mais $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ ayant toutes deux n éléments on a $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$ est une base de E. □

Exemple 96– Dans $\mathbb{R}^4$, considérons la famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ avec

$$\begin{aligned} e_1 &= (0,1,1,1) \\ e_2 &= (1,0,1,1) \\ e_3 &= (1,1,0,1) \\ e_4 &= (1,1,1,0). \end{aligned}$$

C'est une famille à quatre éléments et $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Pour montrer que c'est une base, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4 = 0$. L'annulation des coordonnées conduit au système :

$$\begin{cases} \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

dont la seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. La famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est donc libre et c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

Le résultat suivant permet de voir la notion de dimension comme une notion de « taille » des espaces vectoriels.

Corollaire 97– *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension finie et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors* F *est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$.

Démonstration. C'est une reformulation de la proposition 94. □

Exemple 98– Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ sont de dimension au plus n. Les sous-espaces vectoriels de $M_{mn}(\mathbb{K})$ sont de dimension au plus mn.

Corollaire 99– *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension finie et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Si* $\dim F = \dim E$ *alors* $F = E$.

Démonstration. Notons n la dimension de F et considérons $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de F. C'est une famille libre de F. C'est donc aussi une famille libre de E. Puisque $\dim E = \dim F = n$, on en déduit que c'est une base de E. En particulier, c'est une famille génératrice de E. Soit $x \in \mathrm{E}$, il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que $x = x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n$. Puisque les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ sont dans F, le vecteur x est dans F. Ainsi, $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$. Par hypothèse $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ donc $\mathrm{F} = \mathrm{E}$. □

Exemple 100– Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathrm{V} = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$ avec $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (1,1,0)$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ il est donc de dimension au plus 3. Il n'est pas de dimension 3 : dans le cas contraire on aurait $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$ et tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ pourrait s'écrire $au_1 + bu_2 = (a+b, b, 0)$; ce n'est pas le cas du vecteur $(1,1,1)$. Il n'est pas de dimension 0, il serait dans ce cas l'espace $\{0\}$ mais $u_1 \neq 0$. Il n'est pas de dimension 1 : dans le cas contraire, la famille libre $\{u_1\}$ serait génératrice et il existerait $a \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 = au_1$, c'est-à-dire $(1,1,0) = (a,0,0)$; ce n'est pas le cas. On en déduit que V est de dimension 2. Or $\{u_1, u_2\}$ est une famille a deux éléments de V qui, par définition, engendre V. C'est donc une base de V.

On a démontré proposition 84 que les familles libres ne peuvent pas être trop grandes : leur nombre d'éléments est inférieur à la dimension de E. On montre maintenant que les familles génératrices ne peuvent pas être trop petites.

***Proposition* 101–** *Soit $\{g_1, \ldots, g_q\}$ une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension $n > 0$. Alors $q \geq n$.*

Démonstration. Puisque E est non réduit à $\{0\}$, l'un des éléments de $\{g_1, \ldots, g_q\}$ est non nul, appelons-le g_i. La famille à un élément $\{g_i\}$ est libre et on peut la compléter en une base à l'aide de vecteurs de la famille génératrice $\{g_1, \ldots, g_q\}$. Cette base est donc un sous-ensemble de $\{g_1, \ldots, g_q\}$. Elle a n éléments donc $n \leq q$. □

Remarque 102– Il résulte de cette partie que les bases sont les familles génératrices ayant le minimum d'éléments et les familles libres ayant le maximum d'éléments.

3.5) Dimension et somme

Le théorème suivant sera démontré en annexe.

***Théorème* 103–** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Soit $\{e_1, \ldots, e_p\}$ une base de F_1 et $\{e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}\}$ une base de F_2. Les sous-espaces F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $\{e_1, \ldots, e_{p+q}\}$ est une base de E.*

Exemple 104– On reprend l'exemple 41. Une base de F_1 est $\{(1,2,-1)\}$ et une base de F_2 est $\{(1,1,0),(1,-1,1)\}$. Or la famille $\{(1,2,-1),(1,1,0),(1,-1,1)\}$ est libre (vérifiez le) donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ (elle a $3 = \dim \mathbb{R}^3$ éléments). On en déduit $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 = \mathbb{R}^3$.

En particulier, on a le résultat de dimension suivant.

***Corollaire* 105–** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2$ alors*

$$\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}_1 + \dim \mathrm{F}_2$$

Démonstration. Compter les éléments des bases de F_1 et F_2 dans le théorème 103. □

On en déduit aussi le résultat d'existence suivant.

***Proposition* 106–** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n *et* F *un sous-espace vectoriel de dimension* p *de* E. *Alors*

1) le sous-espace F *admet un supplémentaire ;*

2) les supplémentaires de F *sont tous de dimension* $n-p$.

Démonstration. Soit $\{e_1,\dots,e_p\}$ une base de F. On la complète en une base de E par ajout de vecteurs qu'on note $e_{p+1},\dots,e_{p+q}$ grâce au théorème de la base incomplète. L'espace vectoriel engendré par $\{e_{p+1},\dots,e_{p+q}\}$ est un supplémentaire de F. La dimension de tous les supplémentaires est donnée par le corollaire 105. □

Exemple 107– Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x-y+z=0 \text{ et } x+2y-3z=0\}$. En résolvant le système

$$\begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

on montre que $V = \operatorname{Vect}\{(1,4,3)\}$. Le vecteur $(1,4,3)$ étant non nul, la famille $\{(1,4,3)\}$ est libre. Elle engendre V. Une base de V est donc $\{(1,4,3)\}$. Le théorème de la base incomplète énonce que l'on peut compléter $\{(1,4,3)\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$ par ajout de vecteurs de n'importe quelle base de $\mathbb{R}^3$, en particulier de la base canonique $\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3\}$. Puisque $\dim\mathbb{R}^3 = 3$, ce sont deux vecteurs qu'il faut ajouter. Montrons que la famille $\{(1,4,3),\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\}$ convient. Elle a trois vecteurs, il est donc suffisant de montrer qu'elle est libre. Si $a(1,4,3)+b\mathcal{E}_1+c\mathcal{E}_2 = 0$ alors

$$\begin{cases} a + b \qquad = 0 \\ 4a \qquad + c = 0 \\ 3a \qquad\quad\ = 0 \end{cases}$$

donc $a=b=c=0$ et la famille $\{(1,4,3),\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\}$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Un supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^3$ est donc

$$\operatorname{Vect}\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\} = \{(a,b,0) : \ a,b\in\mathbb{R}\}.$$

Exercice 108– On reprend les notations de l'exercice 107. Montrer que les espaces $\operatorname{Vect}\{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3\}$ et $\operatorname{Vect}\{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2\}$ sont aussi des supplémentaires de V dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 109– Soit

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : \ a,b\in\mathbb{R} \right\}.$$

On a

$$V = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

donc V est un sous-espace vectoriel engendré par I et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La famille $\{I, J\}$ est libre : en effet si $aI + bJ = 0$ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = 0$ et donc $a = b = 0$. Une base de V est donc $\{I, J\}$. Le théorème de la base incomplète énonce qu'on peut construire une base de $M_2(\mathbb{R})$ en ajoutant à $\{I, J\}$ des vecteurs de la base canonique $\{M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}\}$ de $M_2(\mathbb{R})$. Puisque $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, ce sont deux vecteurs qu'il faut ajouter. Montrons que $\{I, J, M_{11}, M_{12}\}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$. Elle a $4 = \dim M_2(\mathbb{R})$ vecteurs, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soit a, b, c, d tels que $aI + bJ + cM_{11} + dM_{12} = 0$. Alors $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b & a \end{pmatrix} = 0$ donc $a = b = c = d = 0$. On en déduit qu'un supplémentaire de V dans $M_2(\mathbb{R})$ est

$$\mathrm{Vect}\{M_{11}, M_{12}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 110– Avec les notations de l'exercice 109, déterminer deux autres supplémentaires de V dans $M_2(\mathbb{R})$.

Enfin, on peut calculer la dimension de toute somme.

***Proposition* 111–** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels de* E, *alors*

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim F_1 \cap F_2.$$

Démonstration. On considère un supplémentaire V dans F_2 du sous-espace $F_1 \cap F_2$: on a donc

$$F_2 = (F_1 \cap F_2) \oplus V. \tag{6}$$

Puisque $F_2 \subset F_1 + F_2$, l'ensemble V est aussi un sous-espace de $F_1 + F_2$ et en particulier

$$F_1 + V \subset F_1 + F_2. \tag{7}$$

Montrons que V est aussi un supplémentaire dans $F_1 + F_2$ de F_1, c'est-à-dire que

$$F_1 + F_2 = F_1 \oplus V. \tag{8}$$

Soit $x = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$. De (6) on déduit que $f_2 = h + v$ avec $h \in F_1 \cap F_2$ et $v \in V$. Ainsi $x = (f_1 + h) + v$ avec $f_1 + h \in F_1$ et $v \in V$. On a donc

$$F_1 + F_2 \subset F_1 + V. \tag{9}$$

De (7) et (9), on déduit $F_1 + F_2 = F_1 + V$. Considérons ensuite $x \in F_1 \cap V$. Puisque V est un sous-ensemble de F_2 alors $x \in F_2$ et donc x est à la fois dans $F_1 \cap F_2$ et V. D'après (6) on en déduit $x = 0$ et donc $F_1 \cap V = \{0\}$. De (6) on déduit alors $\dim F_2 = \dim(F_1 \cap F_2) + \dim V$ et de (8) on déduit $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim V$. On a donc $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$. □

3.6) Changements de bases

Un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ admet une infinité de bases. Nous allons caractériser les familles qui sont des bases et passer des coordonnées d'un vecteur dans une base à ses coordonnées dans une autre base grâce à la *matrice de passage*.

Définition 112– *Soit $\mathcal{E}$ une base d'un espace de dimension n et $\mathcal{E}'$ une famille à n vecteurs de cet espace. La matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{E}'$ dans la base $\mathcal{E}$ s'appelle la* matrice de passage *de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$. On la note* $\mathrm{P}(\mathcal{E},\mathcal{E}')$.

En particulier, on a

$$\mathrm{P}(\mathcal{E},\mathcal{E}) = \mathrm{I}.$$

Exemple 113– La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ de l'exemple 78 est

$$\mathrm{P}\left(\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3\},\{e_1,e_2,e_3\}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 114– *Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel* E *de dimension finie et $\mathcal{E}$ une famille de* E *ayant autant de vecteurs que $\mathcal{B}$. Cette famille est une base de* E *si et seulement si la matrice de passage* $\mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E})$ *de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{E}$ est inversible. Dans ce cas, l'inverse de* $\mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E})$ *est la matrice de passage* $\mathrm{P}(\mathcal{E},\mathcal{B})$ *de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$.*

Remarque 115– La condition $\mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E})$ est inversible équivaut à la condition

$$\det \mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E}) \neq 0.$$

Démonstration du théorème 114. Puisque $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ ont même nombre d'éléments, la famille $\mathcal{E}$ est une base de E si et seulement si c'est une famille libre. Notons $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0. \tag{10}$$

Si $\mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E}) = \left(p_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, alors

$$\begin{aligned} e_1 &= p_{11}b_1 + p_{21}b_2 + \cdots + p_{n1}b_n \\ e_2 &= p_{12}b_1 + p_{22}b_2 + \cdots + p_{n2}b_n \\ &\vdots \\ e_n &= p_{1n}b_1 + p_{2n}b_2 + \cdots + p_{nn}b_n. \end{aligned} \tag{11}$$

Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, la coordonnée n° i de $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\lambda_1 p_{i1} + \lambda_2 p_{i2} + \cdots + \lambda_n p_{in}$ de sorte que (10) équivaut au système

$$\begin{cases} \lambda_1 p_{11} + \lambda_2 p_{12} + \cdots + \lambda_n p_{1n} = 0 \\ \lambda_1 p_{21} + \lambda_2 p_{22} + \cdots + \lambda_n p_{2n} = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \lambda_1 p_{n1} + \lambda_2 p_{n2} + \cdots + \lambda_n p_{nn} = 0. \end{cases}$$

Ce système est

$$\mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E})\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0. \tag{12}$$

La famille $\mathcal{E}$ est libre si et seulement si ce système admet $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ comme unique solution. Mais, d'après le théorème 61 du chapitre *Matrices*, le système carré (12) a une solution unique si et seulement si $\mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E})$ est inversible. Ceci achève la démonstration de la première partie du théorème.

Supposons maintenant $\mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E})$ inversible. Alors $\mathcal{E}$ est une base et on peut exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{E}$. Notant $\mathrm{P}(\mathcal{E},\mathcal{B}) = \left(q_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$, on a

$$\begin{aligned} b_1 &= q_{11}e_1 + q_{21}e_2 + \cdots + q_{n1}e_n \\ b_2 &= q_{12}e_1 + q_{22}e_2 + \cdots + q_{n2}e_n \\ &\vdots \\ b_n &= q_{1n}e_1 + q_{2n}e_2 + \cdots + q_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Reportons ces expressions dans l'expression de e_1 des équations (11). On obtient

$$\begin{aligned} e_1 = &(p_{11}q_{11} + p_{21}q_{12} + \cdots + p_{n1}q_{1n})e_1 \\ &+ (p_{11}q_{21} + p_{21}q_{22} + \cdots + p_{n1}q_{2n})e_2 \\ &\qquad\vdots \\ &+ (p_{11}q_{n1} + p_{21}q_{n2} + \cdots + p_{n1}q_{nn})e_n \end{aligned} \tag{13}$$

Puisque $\mathcal{E}$ est une base, donc une famille libre, ceci conduit au système

$$\begin{cases} q_{11}p_{11} + q_{12}p_{21} + \cdots + q_{1n}p_{n1} = 1 \\ q_{21}p_{11} + q_{22}p_{21} + \cdots + q_{2n}p_{n1} = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ q_{n1}p_{11} + q_{n2}p_{21} + \cdots + q_{nn}p_{n1} = 0. \end{cases}$$

Ce système exprime que la première colonne du produit $\mathrm{P}(\mathcal{E},\mathcal{B})\mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E})$ est la première colonne de la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. De la même façon, en reportant les expressions (13) dans l'expression de e_i des équations (11), on obtient le système

$$\begin{cases} q_{11}p_{1i} + q_{12}p_{2i} + \cdots + q_{1n}p_{ni} = 0 \\ q_{21}p_{1i} + q_{22}p_{2i} + \cdots + q_{2n}p_{ni} = 0 \\ \vdots \\ q_{i1}p_{1i} + q_{i2}p_{2i} + \cdots + q_{in}p_{ni} = 1 \\ \vdots \\ q_{n1}p_{1i} + q_{n2}p_{2i} + \cdots + q_{nn}p_{ni} = 0 \end{cases}$$

(la seule équation ayant un second membre non nul étant la n° i) qui exprime que la colonne n° i du produit $\mathrm{P}(\mathcal{E},\mathcal{B})\mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E})$ est la colonne n° i de la matrice identité. On trouve donc $\mathrm{P}(\mathcal{E},\mathcal{B})\mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E}) = \mathrm{I}$ puis $\mathrm{P}(\mathcal{E},\mathcal{B}) = \mathrm{P}(\mathcal{B},\mathcal{E})^{-1}$. □

Exemple 116– On poursuit l'exemple 113. La matrice $\mathrm{P}(\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3\},\{e_1,e_2,e_3\})$ est de déterminant $-3 \neq 0$. Elle est donc inversible ce qui (re)démontre que la famille $\{e_1,e_2,e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 117– On reprend l'exemple 41. On rappelle que $\mathrm{F}_1 = \mathrm{Vect}\{(1,2,-1)\}$ et $\mathrm{F}_2 = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(1,-1,1)\}$. La matrice de passage de la base canonique à la famille $\mathcal{F} = \{(1,2,-1),(1,1,0),(1,-1,1)\}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice est non nul (calculez-le) d'où l'on déduit que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En particulier, elle est libre. On en déduit que les familles $\{(1,2,-1)\}$ et $\{(1,1,0),(1,-1,1)\}$ sont libres et sont donc des bases, respectivement de F_1 et F_2. Ainsi, on a $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 = \mathbb{R}^3$ puisque la réunion d'une base de F_1 et d'une base de F_2 est une base de $\mathbb{R}^3$.

***Corollaire* 118–** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension n. Soit $u_1,\ldots,u_n$ une famille de n vecteurs de* E *puis* $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_q)$ *et* $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(u_{q+1},\ldots,u_n)$*. Les espaces* F *et* G *sont supplémentaires dans* E *si et seulement si la matrice de passage d'une base quelconque de* E *à la famille* $\{u_1,\ldots,u_n\}$ *a un déterminant non nul.*

Exercice 119– Démontrer le corollaire 118 en généralisant l'exemple 117.

Soit $x \in \mathrm{E}$ et $\mathcal{B} = \{b_1,\ldots,b_n\}$, $\mathcal{B}' = \{b'_1,\ldots,b'_n\}$ deux bases de E. Le vecteur x a des coordonnées dans $\mathcal{B}$ données par

$$x = x_1 b_1 + \cdots x_n b_n$$

et dans $\mathcal{B}'$ données par

$$x = x'_1 b'_1 + \cdots x'_n b'_n.$$

Connaissant les coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ d'un vecteur dans une base, nous donnons un moyen de calculer ses coordonnées $(x'_1,\ldots,x'_n)$ dans une autre base.

***Théorème* 120–** *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie* E. *Soit x un vecteur de* E. *On note $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne formé des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $X' \in M_{n1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne formée des coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$. Alors*

$$X = P(\mathcal{B},\mathcal{B}')X'$$

ou encore

$$X' = P(\mathcal{B},\mathcal{B}')^{-1}X.$$

Démonstration. On note $\mathcal{B} = \{b_1,\dots,b_n\}$, $\mathcal{B}' = \{b'_1,\dots,b'_n\}$ et $P(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \left(p_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$. On a alors

$$x = x'_1b'_1 + x'_2b'_2 + \cdots + x'_nb'_n = x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots + x_nb_n.$$

Or,

$$\begin{aligned}
b'_1 &= p_{11}b_1 + p_{21}b_2 + \cdots + p_{n1}b_n\\
b'_2 &= p_{12}b_1 + p_{22}b_2 + \cdots + p_{n2}b_n\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots\\
b'_n &= p_{1n}b_1 + p_{2n}b_2 + \cdots + p_{nn}b_n
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
x = x'_1\left(p_{11}b_1 + p_{21}b_2 + \cdots + p_{n1}b_n\right) + x'_2\left(p_{12}b_1 + p_{22}b_2 + \cdots + p_{n2}b_n\right) + \cdots\\
+ x'_n\left(p_{1n}b_1 + p_{2n}b_2 + \cdots + p_{nn}b_n\right)
\end{aligned}$$

qu'on peut réécrire

$$\begin{aligned}
x = \left(p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \cdots + p_{1n}x'_n\right)b_1 + \left(p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \cdots + p_{2n}x'_n\right)b_2 + \cdots\\
+ \left(p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \cdots + p_{nn}x'_n\right)b_n.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
x_1 &= p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \cdots + p_{1n}x'_n\\
x_2 &= p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \cdots + p_{2n}x'_n\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots\\
x_n &= p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \cdots + p_{nn}x'_n
\end{aligned}$$

ce qui se réécrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = P(\mathcal{B},\mathcal{B}')\begin{pmatrix} x'_1\\ x'_2\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}.$$

□

Exemple 121– On poursuit l'exemple 113. Soit $x = (1,2,3)$. Alors, les coordonnées de x dans $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ sont $(1,2,3)$, on a donc

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de $P(\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}, \{e_1, e_2, e_3\})$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -17 & -38 & -3 \end{pmatrix}$$

(vérifiez-le). Ainsi,

$$X' = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -17 & -38 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de x dans $\{e_1, e_2, e_3\}$ sont donc $(-4, -1, 34)$ ce qui signifie que $x = -4e_1 - e_2 + 34e_3$.

Exemple 122– Dans $M_2(\mathbb{R})$ on considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$I = E_{11} + E_{22}, J = E_{12} - E_{21}, K = E_{12} + E_{21}, \text{ et } L = E_{11} - E_{22}.$$

La matrice de passage de $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ à $\{I, J, K, L\}$ est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule $\det P = -4 \neq 0$ donc $\{I, J, K, L\}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$. Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$, ses coordonnées dans $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ sont (a, b, c, d) donc ses coordonnées dans $\{I, J, K, L\}$ sont $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ avec

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et on trouve

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d \\ b-c \\ b+c \\ a-d \end{pmatrix}$$

(écrivez les détails de calcul omis). Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2}\mathrm{I} + \frac{b-c}{2}\mathrm{J} + \frac{b+c}{2}\mathrm{K} + \frac{a-d}{2}\mathrm{L}.$$

3.7) Systèmes et changement de base

On va maintenant montrer comment changer de bases dans l'écriture des systèmes d'équations linéaires.

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Y} \in \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Si

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

on appelle y le vecteur dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $y_1, y_2, \ldots, y_n$. On note alors $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ les coordonnées de y dans $\mathcal{B}'$ puis

$$\mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

De même, si

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

on appelle x le vecteur dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On note alors $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$ puis

$$\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

On note $\mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Alors $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{PY}'$. On a donc $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$ si et seulement si $\mathrm{APX}' = \mathrm{PY}'$ et cette égalité est vraie si et seulement si $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{APX}' = \mathrm{Y}'$. Il en résulte que, X est solution du système AX = Y si et seulement si X′ est solution du système A′X′ = Y′ avec

$$A' = P(\mathcal{B},\mathcal{B}')^{-1}\,A\,P(\mathcal{B},\mathcal{B}').$$

Exemple 123– Considérons le système

$$\begin{cases} 2x + 6y - 3z = 1 \\ 8y - 3z = 7 \\ 18y - 7z = -2. \end{cases} \tag{14}$$

Il s'écrit AX = Y avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 0 & 8 & -3 \\ 0 & 18 & -7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Considérons ensuite la famille $\{u, v, w\}$ avec $u = (1,1,2)$, $v = (0,1,2)$ et $w = (1,1,3)$. La matrice de passage de la base canonique vers cette famille est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible d'inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(exercice : vérifiez le). Le système AX = Y a donc même ensemble de solutions que le système A′X′ = Y′ avec

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad Y' = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Ce système A′X′ = Y′ a pour solution

$$X' = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Or X = PX′ donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17/2 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix}$$

et les solutions du système (14) sont

$$\begin{cases} x = \dfrac{49}{2} \\ y = \dfrac{55}{2} \\ z = 71. \end{cases}$$

Remarque 124– Il existe des méthodes systématiques pour trouver les vecteurs u, v et w de l'exemple précédent. L'étude de ces méthodes est l'objet de la *théorie de la diagonalisation*.

4 Caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

On a vu que l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ dont la dimension est donnée par le nombre d'inconnues non principales. Nous allons montrer la réciproque, c'est-à-dire que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n inconnues.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Choisissons W un sous-espace supplémentaire : $\mathrm{V} \oplus \mathrm{W} = \mathbb{K}^n$. On munit V d'une base $\{e_1, \dots, e_p\}$ et W d'une base $\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ de sorte que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On considère la matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont les p premières colonnes sont nulles, les colonnes suivantes ayant leurs coefficients tous nuls à l'exception du coefficient sur la diagonale qui vaut 1. On a donc

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j > p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{K}^n$, on note $t_1, \dots, t_n$ ses coordonnées dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$. On a

$$\mathrm{A} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \\ t_{p+1} \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t_{p+1} \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Si $x \in \mathrm{V}$ alors $t_{p+1} = \cdots = t_n = 0$ et donc

$$\mathrm{A} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = 0. \tag{15}$$

Réciproquement, si (15) est satisfaite, alors $t_{p+1} = \cdots = t_n = 0$ et donc x appartient à V. On a donc

$$\mathrm{V} = \left\{ x = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \in \mathbb{K}^n : \mathrm{A} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base canonique. Alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathrm{V} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \mathrm{AP}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

et donc V est l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n inconnues.

***Théorème* 125–** *Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ sont les ensembles des solutions de systèmes d'équations linéaires homogènes à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n inconnues. La dimension est alors donnée par le nombre d'inconnues non principales du système.*

Remarque 126– On appelle hyperplan de $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des solutions $x_1, \ldots, x_n$ d'une équation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ avec $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{K}$ non tous nuls. Nous venons de démontrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est intersection d'hyperplans de $\mathbb{K}^n$.

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont donc

a) l'espace $\mathbb{R}^2$;
b) les espaces décrits par une équation décrivant une droite du plan passant par l'origine ;
c) l'espace $\{0\}$.

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont

a) l'espace $\mathbb{R}^3$;
b) les espaces décrits par l'équation d'un plan de l'espace passant par l'origine ;
c) les espaces décrits par le système d'équations d'une droite de l'espace passant par l'origine ;
d) l'espace $\{0\}$.

Exemple 127– L'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + z - t = 0 \text{ et } x + y + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car c'est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène

$$\begin{cases} 2x \phantom{{}+y} + z - t = 0 \\ x + y \phantom{{}+z} + t = 0 \end{cases}$$

Par les opérations $L_1 \leftrightarrow L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_2 \leftarrow -1/2L_1$, on montre que ce système équivaut au système

$$\begin{cases} x + y \quad\quad\quad + \quad t &= 0 \\ \quad\; y \quad -\dfrac{1}{2}z + \dfrac{3}{2}t &= 0 \end{cases}$$

Les inconnues non principales sont donc z et t et $\dim F = 2$. Le sous-espace F est l'intersection de l'hyperplan d'équation $2x + z - t = 0$ avec l'hyperplan d'équation $x + y + t = 0$.

5 Équations différentielles et algèbre linéaire

L'objectif de cette partie est de décrire l'ensemble des solutions d'équations différentielles à coefficients constants à l'aide des outils d'algèbre linéaire.

5.1) Équations différentielles d'ordre 1

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Deux éléments f et g de $\mathcal{D}$ sont dits égaux si $f(x) = g(x)$ pour tout réel x. On définit sur $\mathcal{D}$ une addition notée + par

$$f + g \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x). \end{array}$$

On définit aussi un produit externe : si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\lambda f \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x). \end{array}$$

***Proposition* 128–** *L'ensemble $\mathcal{D}$ muni de l'addition et du produit externe définis ci-dessus est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. L'addition de $\mathcal{D}$ vérifie les proporiétés suivantes.

a) Associativité. Soit f, g et h trois éléments de $\mathcal{D}$. La fonction $(f + g) + h$ est la fonction qui à tout réel x associe le réel

$$((f + g) + h)(x).$$

Par définition de l'addition de $\mathcal{D}$, on a

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x).$$

En utilisant de nouveau la définition de l'addition de $\mathcal{D}$, on a

$$((f + g) + h)(x) = (f(x) + g(x)) + h(x).$$

La multiplication sur $\mathbb{R}$ est associative donc

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x)).$$

En utilisant de nouveau deux fois la définition de l'addition dans $\mathcal{D}$, on a

$$f(x)+(g(x)+h(x))=(f+(g+h))(x).$$

On a donc

$$((f+g)+h)(x)=(f+(g+h))(x)$$

pour tout réel x. Cela implique

$$((f+g)+h)=(f+(g+h)).$$

b) Existence d'un élément neutre pour l'addition. Notons 0 la fonction constante nulle

$$\begin{array}{rccc} 0 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0. \end{array}$$

C'est une fonction dérivable donc un élément de $\mathcal{D}$. Pour tout réel x, on a

$$(f+0)(x)=f(x)+0(x)=f(x)+0=f(x)$$

d'où $f+0=f$. La fonction 0 est donc l'élément neutre de l'addition de $\mathcal{D}$.

c) Existence d'un symétrique pour tout élément de $\mathcal{D}$. Soit f un élément de $\mathcal{D}$. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccc} -f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -f(x). \end{array}$$

C'est un élément de $\mathcal{D}$. Pour tout réel x, on a

$$(f+(-f))(x)=f(x)+(-f)(x)=f(x)-f(x)=0=0(x).$$

Ainsi $f+(-f)=0$ et la fonction $-f$ est le symétrique de la fonction f.

d) Commutativité. Soit f et g deux éléments de $\mathcal{D}$. Pour tout réel x, on a

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x).$$

Ainsi $f+g=g+f$.

Le produit externe de $\mathcal{D}$ vérifie les proporiétés suivantes.

i) Distributivité par rapport à l'addition de $\mathcal{D}$. Soit λ un réel et f et g deux fonctions de $\mathcal{D}$. Pour tout réel x, on a, par définition du produit externe

$$(\lambda.(f+g))(x)=\lambda(f+g)(x).$$

Par définition de l'addition de $\mathcal{D}$ on a ensuite

$$\lambda(f+g)(x)=\lambda(f(x)+g(x)).$$

Le produit réel est distributif sur l'addition réelle donc

$$\lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x)+\lambda g(x).$$

La définition du produit externe implique

$$\lambda f(x)+\lambda g(x) = (\lambda\cdot f)(x)+(\lambda\cdot g)(x).$$

Enfin, la définition de l'addition de $\mathcal{D}$ donne

$$(\lambda\cdot f)(x)+(\lambda\cdot g)(x) = (\lambda\cdot f+\lambda\cdot g)(x).$$

On en déduit

$$(\lambda.(f+g))(x) = (\lambda\cdot f+\lambda\cdot g)(x)$$

pour tout réel x et donc

$$\lambda.(f+g) = \lambda\cdot f+\lambda\cdot g.$$

ii) Distributivité par rapport à l'addition de $\mathbb{R}$. Soit λ et μ deux réels et f une fonction de $\mathcal{D}$. Pour tout réel x, on a

$$((\lambda+\mu)\cdot f)(x) = (\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x)+\mu f(x) = (\lambda\cdot f)(x)+(\mu\cdot g)(x) = (\lambda\cdot f+\mu\cdot g)(x)$$

et donc $(\lambda+\mu)\cdot f = \lambda\cdot f+\mu\cdot g$.

iii) Associativité avec le produit réel. Soit λ et μ deux réels et f une fonction de $\mathcal{D}$. Pour tout réel x, on a

$$((\lambda\mu)\cdot f)(x) = (\lambda\mu)f(x) = \lambda(\mu f(x)) = \lambda(\mu\cdot f)(x) = (\lambda\cdot(\mu\cdot f))(x).$$

et donc $(\lambda\mu)\cdot f = \lambda\cdot(\mu\cdot f)$.

iv) Action du réel 1. Soit f un élément de $\mathcal{D}$. Pour tout réel x, on a

$$(1\cdot f)(x) = 1\times f(x) = f(x)$$

et donc $1\cdot f = f$.

□

On peut alors décrire l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1.

***Théorème* 129–** *Soit a un nombre réel. L'ensemble des applications f vérifiant $f' = af$ est sous-espace vectoriel de dimension* 1 *de $\mathcal{D}$ engendré par l'application $x\mapsto\exp(ax)$.*

Remarque 130– Le théorème 129 énonce que les solutions de $f' = af$ sont les fonctions données par $f(x) = ke^{ax}$ pour tout réel x, où k est une constante réelle.

Le reste de cette partie est consacré à la démonstration du théorème 129. On note $\mathcal{D}_a$ le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ formé des applications f vérifiant $f' = af$.

La fonction constante nulle a pour dérivée elle même, elle est donc une solution de $f' = af$. L'ensemble $\mathcal{D}_a$ est donc une partie non vide de $\mathcal{D}$. Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{D}_a$, on a $f' = af$ et $g' = ag$. Il en résulte que $f' + g' = af + ag$ ce qu'on réécrit $(f+g)' = a(f+g)$. La fonction $f+g$ est donc dans $\mathcal{D}_a$. Ainsi, $\mathcal{D}_a$ est stable par addition. Enfin, si f est une fonction de $\mathcal{D}_a$ et λ un réel, alors $\lambda f' = \lambda a f$ ce qu'on réécrit $(\lambda f)' = a(\lambda f)$. L'ensemble $\mathcal{D}_a$ est donc stable par produit externe. On déduit de ces remarques que l'ensemble $\mathcal{D}_a$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$.

Notons e_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{cccc} e_a & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{ax}. \end{array}$$

Cette fonction est dérivable et ne s'annule pas. Pour tout réel x, on a $e_a'(x) = ae^{ax} = ae_a(x)$. La fonction e_a vérifie donc $e_a' = ae_a$. C'est donc un vecteur non nul de $\mathcal{D}_a$. En particulier l'espace $\mathcal{D}_a$ est au moins de dimension 1.

Considérons maintenant f, une fonction de $\mathcal{D}_a$. Elle vérifie $f' = af$. La dérivée de la fonction

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{f}{e_a} & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{e^{ax}} \end{array}$$

vérifie

$$\left(\frac{f}{e_a}\right)' = \frac{f'e_a - fe_a'}{e_a^2} = \frac{(af)e_a - f(ae_a)}{e_a^2} = \frac{a(fe_a - fe_a)}{e_a^2} = 0.$$

C'est une fonction de dérivée constante nulle sur $\mathbb{R}$, donc une fonction constante. Il exsite donc un réel k tel que $f = ke_a$. Il en ressort que $\mathcal{D}_a \subset \mathbb{R}e_a$. L'espace $\mathcal{D}_a$ étant de dimension au moins 1 alors que $\mathbb{R}e_a$ est de dimension 1 on a alors $\mathcal{D}_a = \mathbb{R}e_a$. Ceci achève la démonstration du théorème 129.

Remarque 131– Si $f = ke_a$, alors $f(0) = ke^{a\times 0} = k$ et donc, $f(x) = f(0)e^{ax}$ pour tout réel x. Si α est un réel, il y a donc une unique solution à l'équation différentielle linéaire d'ordre un $f' = af$ vérifiant $f(0) = \alpha$. Cette solution est la fonction f définie par $f(x) = \alpha e^{ax}$ pour tout réel x.

5.2) Équations différentielles d'ordre 2

On note $\mathcal{D}^{(2)}$ le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ des fonctions de dérivée dérivable.

***Proposition* 132–** *L'ensemble $\mathcal{D}^{(2)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$.*

Démonstration. La fonction constante nulle est deux fois dérivable, elle est donc dans $\mathcal{D}^{(2)}$. La somme de fonctions deux fois dérivables est deux fois dérivable. Le produit d'un réel par une fonction deux fois dérivable est une fonction deux fois dérivable. La partie $\mathcal{D}^{(2)}$ de $\mathcal{D}$ est non vide, stable par addition et par produit externe. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$. □

L'espace $\mathcal{D}^{(2)}$, et donc l'espace $\mathcal{D}$, ne sont pas de type fini. Nous rappelons la propriété de la fonction exponentielle vue en *Mathématiques pour tous* :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{kx} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k>0 \\ -\infty & \text{si } k<0. \end{cases}$$

Supposons donc $\mathcal{D}^{(2)}$ de type fini. Il admet alors une famille génératrice finie. Appelons D le nombre des éléments de cette famille. Toutes les familles libres de $\mathcal{D}^{(2)}$ ont alors au plus D éléments. On aboutit à une contradiction en construisant une famille libre de $\mathcal{D}^{(2)}$ à $\mathrm{D}+1$ éléments. Pour tout réel r, on considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} e_r & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{rx}. \end{array}$$

Chacune des fonctions e_k est dans $\mathcal{D}^{(2)}$ et on va montrer que la famille

$$\mathcal{L} = \{e_1, e_2, \dots, e_{\mathrm{D}+1}\}$$

est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mathrm{D}+1}$ des réels tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{\mathrm{D}+1} e_{\mathrm{D}+1} = 0.$$

Cela signifie que, pour tout réel x, on a

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \dots + \lambda_{\mathrm{D}+1} e^{(\mathrm{D}+1)x} = 0.$$

En divisant par $e^{(\mathrm{D}+1)x}$, on trouve

$$\lambda_1 e^{-\mathrm{D}x} + \lambda_2 e^{(-\mathrm{D}+1)x} + \dots + \lambda_{\mathrm{D}} e^{-x} + \lambda_{\mathrm{D}+1} = 0$$

pour tout réel x. Le membre de gauche tend, lorsque x tend vers $+\infty$, vers $\lambda_{\mathrm{D}+1}$. le membre de droite tend vers 0. On en déduit $\lambda_{\mathrm{D}+1} = 0$. Ainsi a-t-on

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{\mathrm{D}} e_{\mathrm{D}} = 0.$$

On réitère le procédé précédent pour montrer $\lambda_{\mathrm{D}} = 0$ puis par réitérations successives $\lambda_{\mathrm{D}-1} = \lambda_{\mathrm{D}-2} = \dots = \lambda_1 = 0$. Il en résulte que $\mathcal{L}$ est libre ce qui est la contradiction recherchée. On peut alors décrire l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2.

***Théorème* 133–** *Soit p et q deux nombres réels. L'ensemble des applications f solutions de l'équation $f'' + pf' + qf = 0$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{D}$. On note r_1 et r_2 les solutions de l'équation $x^2 + px + q = 0$.*

a) Si $p^2 - 4q > 0$, cet espace est engendré par $x \mapsto \exp(r_1 x)$ et $x \mapsto \exp(r_2 x)$.

b) Si $p^2 - 4q = 0$, cet espace est engendré par $x \mapsto \exp(r_1 x)$ et $x \mapsto x\exp(r_1 x)$.

c) Si $p^2 - 4q < 0$, il existe des réels α et β tels que $r_1 = \overline{r_2} = \alpha + i\beta$; alors cet espace est engendré par $x \mapsto \exp(\alpha x)\cos(\beta x)$ et $x \mapsto \exp(\alpha x)\sin(\beta x)$.

Remarque 134– Le théorème 133 énonce que les solutions de $f'' + pf' + qf = 0$ sont les fonctions données pour tout réel x par

a) $f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ si $p^2 - 4q > 0$;

b) $f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu x e^{r_2 x}$ si $p^2 - 4q = 0$;

c) $f(x) = (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$ si $p^2 - 4q < 0$

ou λ et μ sont des constantes réelles.

Le reste de cette partie est consacré à la démonstration du théorème 133. On note $\mathcal{D}_{p,q}$ le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ formé des applications f vérifiant $f'' + pf' + qf = 0$. On note r_1 et r_2 les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$.

L'ensemble $\mathcal{D}_{p,q}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$. Montrez-le en vous inspirant de la preuve du fait que $\mathcal{D}_a$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$.

On suppose $p^2 - 4q > 0$. Les nombres r_1 et r_2 sont des nombres réels distincts. La famille $\{e_{r_1}, e_{r_2}\}$ est libre. Montrez-le en vous inspirant de la preuve du fait que $\mathcal{D}$ n'est pas une famille de type fini. Les fonctions e_{r_1} et e_{r_2} sont aussi des éléments de $\mathcal{D}_{p,q}$. Si $r \in \{r_1, r_2\}$, on a en effet $e_r' = re_r$ et $e_r'' = r^2 e_r$ donc

$$e_r'' + pe_r' + e_r = (r^2 + pr + q)e_r = 0.$$

Ainsi, $\{e_{r_1}, e_{r_2}\}$ est une famille libre de $\mathcal{D}_{p,q}$.

On suppose $p^2 - 4q = 0$. On a alors $r_1 = r_2$ et r_1 est un réel. On note g la fonction

$$g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{r_1 x}. \end{array}$$

On va montrer que la famille $\{e_{r_1}, g\}$ est libre. Soit λ et μ des réels tels que $\lambda e_{r_1} + \mu g = 0$. Alors, pour tout réel x on a

$$\lambda e^{r_1 x} + \mu x e^{r_1 x} = 0$$

et donc

$$(\lambda + \mu x)e^{r_1 x} = 0.$$

En divisant par $e^{r_1 x}$, on obtient $\lambda + \mu x = 0$ pour tout réel x. Le choix de $x = 0$ fournit $\lambda = 0$. Le choix de $x = 1$ fournit ensuite $\mu = 0$. La famille $\{e_{r_1}, g\}$ est libre. Montrons ensuite que les fonctions e_{r_1} et g sont des éléments de $\mathcal{D}_{p,q}$. Pour e_{r_1}, la preuve est la même que pour le cas $p^2 - 4q > 0$. On calcule ensuite

$$g'(x) = (1 + r_1 x)e^{r_1 x} \quad \text{et} \quad g''(x) = (2 + r_1 x) r_1 e^{r_1 x}.$$

On a donc

$$g''(x) + pg'(x) + qg(x) = [(r_1^2 + pr_1 + q)x + 2r_1 + p]e^{r_1 x} = (2r_1 + p)e^{r_1 x}$$

pour tout réel x. Le réel $-p$ est la somme des racines r_1 et r_2, mais $r_1 = r_2$ donc $2r_1 + p = 0$ puis

$$g'' + pg' + qg = 0.$$

La famille $\{e_{r_1}, g\}$ est donc une famille libre de $\mathcal{D}_{p,q}$.

On suppose $p^2 - 4q < 0$. Les racines r_1 et r_2 sont alors complexes mais pas réelles. Ainsi, $\beta = \operatorname{Im}(r_1) \neq 0$. De plus, si r_1 est racine, alors $\overline{r_1}$ l'est aussi [p]. Ainsi, $r_2 = \overline{r_1}$. On a donc $\operatorname{Im}(r_2) = -\beta$. On définit les fonctions

$$g_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\beta x)e^{\alpha x} \end{array} \quad \text{et} \quad g_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(\beta x)e^{\alpha x} \end{array} \tag{16}$$

On commence par montrer que la famille $\{g_1, g_2\}$ est libre. Soit λ et μ deux réels tels que $\lambda g_1 + \mu g_2 = 0$. Pour tout réel x, on a

$$[\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)]e^{\alpha x} = 0.$$

En divisant par $e^{\alpha x}$, on obtient

$$\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x) = 0$$

pour tout réel x. Le choix $x = 0$ conduit à $\lambda = 0$. Le choix $x = \dfrac{\pi}{2\beta}$ conduit ensuite à $\mu = 0$. La famille $\{g_1, g_2\}$ est donc libre. Montrons maintenant que g_1 et g_2 sont des éléments de $\mathcal{D}_{p,q}$. On calcule

$$g_1'(x) = [\alpha\cos(\beta x) - \beta\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$$

et

$$g_1''(x) = -[2\alpha\beta\sin(\beta x) + (\beta^2 - \alpha^2)\cos(\beta x)]e^{\alpha x}.$$

On en déduit

$$g_1''(x) + pg_1'(x) + qg_1(x) = -[\beta(p + 2\alpha)\sin(\beta x) + (\beta^2 - \alpha^2 - q - p\alpha)\cos(\beta x)]e^{\alpha x}.$$

Comme $r_1 = \alpha + i\beta$, on a $(\alpha + i\beta)^2 + p(\alpha + i\beta) + q = 0$. La partie réelle de cette égalité conduit à

$$\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q = 0$$

et la partie imaginaire à

$$(2\alpha + p)\beta = 0.$$

On en déduit

$$g_1''(x) + pg_1'(x) + qg_1(x) = 0$$

pour tout réel x et donc $g_1 \in \mathcal{D}_{p,q}$. De la même façon, on a

$$g_2''(x) + pg_2'(x) + qg_2(x) = [\beta(p + 2\alpha)\cos(\beta x) - (\beta^2 - \alpha^2 - q - p\alpha)\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$$

pour tout réel x et donc $g_2'' + pg_2' + qg_2 = 0$. Ainsi $g_2 \in \mathcal{D}_{p,q}$. On a montré que $\{g_1, g_2\}$ est une famille libre de $\mathcal{D}_{p,q}$.

Quelque soit le signe de $p^2 - 4q$, on a donc construit une famille libre à deux éléments de $\mathcal{D}_{p,q}$. On va maintenant montrer que ces familles engendrent $\mathcal{D}_{p,q}$.

---

p. Puisque $r_1^2 + pr_1 + q = 0$ alors $\overline{r_1^2 + pr_1 + q} = 0$ et comme p et q sont réels on a $\overline{r_1^2 + pr_1 + q} = \overline{r_1}^2 + p\overline{r_1} + q$.

On suppose $p^2 - 4q > 0$. On considère une fonction f de $\mathcal{D}_{p,q}$. Soit alors $F = fe_{-r_1}$. On a donc $F(x) = f(x)e^{-r_1 x}$ pour tout x réel. On calcule

$$F' = (f' - r_1 f)e_{-r_1} \quad \text{et} \quad F'' = (f'' - 2r_1 f' + r_1^2 f)e_{-r_1}.$$

On en déduit

$$F'' + (r_1 - r_2)F' = [f'' - (r_1 + r_2)f' + r_1 r_2 f]e_{-r_1} = [f'' + pf' + qf]e_{-r_1} = 0.$$

Ainsi, $F' \in \mathcal{D}_{r_2 - r_1}$. Il existe donc un réel λ tel que $F'(x) = \lambda e^{(r_2 - r_1)x}$ pour tout réel x. On en déduit l'existence d'un réel μ tel que $F(x) = \dfrac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} + \mu$ pour tout réel x. Puisque $f(x) = F(x)e^{r_1 x}$ on en tire

$$f(x) = \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{r_2 x} + \mu e^{r_1 x}$$

pour tout réel x. Ainsi, f est combinaison linéaire de e_{r_1} et e_{r_2} et la famille $\{e_{r_1}, e_{r_1}\}$ engendre $\mathcal{D}_{p,q}$. Cette famille est libre donc c'est une base de $\mathcal{D}_{p,q}$ qui est alors de dimension 2.

On suppose $p^2 - 4q = 0$. On considère une fonction f de $\mathcal{D}_{p,q}$. Comme précédemment, on considère $F = fe_{-r_1}$ et on montre que $F' \in \mathcal{D}_{r_2 - r_1} = \mathcal{D}_0$. On en déduit que F' est constante. Il existe donc deux constantes réelles λ et μ telles que $F(x) = \lambda x + \mu$ pour tout réel x. Puisque $f(x) = F(x)e^{r_1 x}$ on en tire

$$f(x) = \lambda x e^{r_1 x} + \mu e^{r_1 x}$$

pour tout x et donc que f est combinaison linéaire de e_{r_1} et g. La famille $\{e_{r_1}, g\}$ engendre donc $\mathcal{D}_{p,q}$. Cette famille est libre donc c'est une base de $\mathcal{D}_{p,q}$ qui est alors de dimension 2.

Lorsque $p^2 - 4q < 0$, la preuve ressemble beaucoup à celle du cas $p^2 - 4q > 0$ à condition d'utiliser la dérivation des fonctions à valeurs complexes. Puisqu'il faut introduire cette dérivation, c'est un peu long et la preuve est reportée en annexe F.

5.3) Exemples de systèmes d'équations différentielles

Les résultats précédent permettent d'utiliser les matrices pour résoudre des sytèmes linéaires homogènes d'équations différentielles à coefficients constants. Comme ceci essentiellement de la théorie de la diagonalisation qui sera étudiée plus tard, nous donnons des exemples.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Si y_1 et y_2 sont deux éléments de $\mathcal{D}$, on note

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$$

pour tout réel t. Si a, b, c et d sont des réels, et si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note alors

$$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} ay_1(t) + by_2(t) \\ cy_1(t) + dy_2(t) \end{pmatrix}.$$

On a alors, puisque a, b, c et d sont des constantes $\mathrm{A}\mathrm{Y}'(t) = (\mathrm{A}\mathrm{Y})'(t)$. Noter en effet que le membre de gauche de cette égalité est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1'(t) + by_2'(t) \\ cy_1'(t) + dy_2'(t) \end{pmatrix}$$

alors que le membre de droite est

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right]'(t) = \begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ cy_1 + dy_2 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} ay_1'(t) + by_2'(t) \\ cy_1'(t) + dy_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Soit a, b, c et d des réels. On veut résoudre le système

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases} \tag{17}$$

Cela signifie que l'on cherche les éléments y_1 et y_2 de $\mathcal{D}$ vérifiant (17). Le système équivaut à

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{AY} \text{ avec } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Supposons que l'on sache trouver une matrice inversible P à coefficients réels et une matrice diagonale D telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Le système peut alors se réécrire

$$(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y})' = \mathrm{D}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}).$$

On fait le changement de variable $\mathrm{Z} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}$. Si $\mathrm{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{cases} z_1' = d_1 z_1 \\ z_2' = d_2 z_2. \end{cases}$$

Il existe donc des réels K et L tels que $z_1(t) = \mathrm{K}e^{d_1 t}$ et $z_2(t) = \mathrm{L}e^{d_2 t}$ pour tout réel t. Écrivons alors $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$ de sorte que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1}z_1 + p_{1,2}z_2 \\ p_{2,1}z_1 + p_{2,2}z_2 \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$\begin{cases} y_1(t) = p_{1,1}\mathrm{K}e^{d_1 t} + p_{1,2}\mathrm{L}e^{d_2 t} \\ y_2(t) = p_{2,1}\mathrm{K}e^{d_1 t} + p_{2,2}\mathrm{L}e^{d_2 t} \end{cases}$$

pour tout réel t. Les réels K et L sont alors solutions du système initial

$$\begin{cases} p_{1,1}\mathrm{K} + p_{1,2}\mathrm{L} = y_1(0) \\ p_{2,1}\mathrm{K} + p_{2,2}\mathrm{L} = y_2(0). \end{cases}$$

(Il a une solution unique puisque P est inversible).

Exemple 135– Considérons le système

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{13}{9}y_1 + \dfrac{14}{45}y_2 \\ y_2' = -\dfrac{28}{9}y_1 - \dfrac{26}{45}y_2 \end{cases}$$

avec les conditions initiales $y_1(0) = 1$ et $y_2(0) = -1$. Ce système est donc $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{9} & \dfrac{14}{45} \\ -\dfrac{28}{9} & -\dfrac{26}{45} \end{pmatrix}$. Si $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, on calcule

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

On a donc $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Le système est $Y' = PDP^{-1}Y$, ce qui équivaut à $(P^{-1}Y)' = D(P^{-1}Y)$. On pose $Z = P^{-1}Y$. Notre sytème est $Z' = DZ$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} z_1' = \dfrac{1}{5}z_1 \\ z_2' = \dfrac{2}{3}z_2 \end{cases}$$

Il existe donc deux constantes K et L telles que

$$\begin{cases} z_1(t) = Ke^{t/5} \\ z_2(t) = Le^{2t/3} \end{cases}$$

pour tout réel t. Puisque $Y = PZ$, on trouve

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ke^{t/5} \\ Le^{2t/3} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_1(t) = -Ke^{t/5} + 2Le^{2t/3} \\ y_2(t) = 4Ke^{t/5} - 5Le^{2t/3} \end{cases}$$

pour tout réel t. En évaluant en $t = 0$, on obtient

$$\begin{cases} 1 = -K + 2L \\ -1 = 4K - 5L \end{cases}$$

et donc $K = 1$ et $L = 1$. Finalement, la solution du système est donnée par

$$\begin{cases} y_1(t) = -e^{t/5} + 2e^{2t/3} \\ y_2(t) = 4e^{t/5} - 5e^{2t/3} \end{cases}$$

pour tout réel t.

6 Exercices

1)

a) Calculer $(1,-7,5)+2(2,-1,3)$.

b) Calculer $\frac{1}{3}(8,2,-5,7)+\frac{3}{7}(1,-1,6,5)$.

2)

a) Trouver les réels x, y et z vérifiant $(x,3,z)+2(x,y,0)=(1,-7,2)$.

b) Trouver les réels x, y et z vérifiant $(x,y,z)+2(y,z,x)=(z,-x,-3y)$.

3) Soit a, b et c des réels.

a) Trouver les réels λ et μ vérifiant l'équation$\lambda(4,0,2)+\mu(-1,3,7)=(a,b,c)$.

b) Trouver les réels λ, μ et ν vérifiant l'équation$\lambda(1,3,5)+\mu(2,4,6)+\nu(-1,2,-3)=2(a,b,c)$.

4) On note $\mathrm{H}=\{z\in\mathbb{C}:\ \mathfrak{Im}\, z>0\}$. Pour tous z et z' de H on définit

$$z\odot z'=[\mathrm{Re}(z)+\mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Re}(z')]+i\,\mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(z').$$

Soit z, z' et z'' dans H.

a) Montrer que $z\odot z'\in\mathrm{H}$.

b) Montrer que $(z\odot z')\odot z''=z\odot(z'\odot z'')$.

c) Montrer que $z\odot i=i\odot z=z$.

d) Montrer qu'il existe $w\in\mathrm{H}$ tel que $z\odot w=i$. Que vaut $w\odot z$?

e) A-t-on toujours $z\odot z'=z'\odot z$?

f) Identifier les propriétés des questions précédentes.

5) On note $\mathrm{H}=\{z\in\mathbb{C}:\ \mathfrak{Im}\, z>0\}$. Pour tous z et z' de H on définit

$$z\boxplus z'=[\mathrm{Re}(z)+\mathfrak{Re}(z')]+i\,\mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(z').$$

Pour tout λ réel et z dans H, on définit

$$\lambda\boxdot z=\lambda\mathfrak{Re}(z)+i\,\mathfrak{Im}(z)^{\lambda}.$$

(On rappelle que si y est un réel strictement positif et si λ est un réel alors $y^{\lambda}=e^{\lambda\ln(x)}$.) Montrer que H munit de l'addition $\boxplus$ et du produit externe $\boxdot$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

6) Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels ?

a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+3y-z=0\}$.

b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 3x+y=7z\}$.

c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ -x+2y-z=31\}$.

d) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2=1\}$.

e) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2=0\}$.

f) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix}1&-5&0\\-1&2&0\\7&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\right\}$

g) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix}1&-5&0\\-1&2&0\\7&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}\right\}$

h) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix}1&-5&0\\-1&2&0\\7&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\}$

i) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix}1&-5&0\\-1&2&0\\7&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}y\\z\\x\end{pmatrix}\right\}$

7) On considère les ensembles

$$\mathrm{V}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\colon \begin{cases}x-y+5z-t=0\\-x+y+2z+2t=0\end{cases}\right\}\text{ et }\mathrm{W}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\colon \begin{cases}x-y+z=0\\z-t=0\end{cases}\right\}$$

a) Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

b) Calculer $\mathrm{V}\cap\mathrm{W}$.

c) Calculer $\mathrm{V}+\mathrm{W}$.

8) Soit $u=(1,-5,7,6), v=(2,3,-2,-1)$ et $w=(1,-1,0,-1)$. On considère les ensembles

$$\mathrm{V}=\mathrm{Vect}\{u,v\}\text{ et }\mathrm{W}=\mathrm{Vect}\{v,w\}$$

a) Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

b) Calculer $\mathrm{V}\cap\mathrm{W}$.

c) Calculer $\mathrm{V}+\mathrm{W}$.

9) Soit $u=(1,-5,7,6), v=(2,3,-2,-1)$. On considère les ensembles

$$\mathrm{V}=\mathrm{Vect}\{u,v\}\text{ et }\mathrm{W}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\colon \begin{cases}3x-2z-t=0\\2x-3y-t=0\end{cases}\right\}$$

Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et que $\mathrm{V}\oplus\mathrm{W}=\mathbb{R}^4$.

10) Montrer que le vecteurs $(2,3,-1)$ et $(1,-1,-2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$) que les vecteurs $(3,7,0)$ et $(8,7,-7)$.

11) Décrire comme ensemble de solutions d'un système linéaire homogène le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré

a) par les vecteurs $(2,3,5)$ et $(-1,4,3)$.

b) par les vecteurs $(2,3,5)$, $(-1,4,3)$ et $(-1,15,14)$.

c) par les vecteurs $(2,3,5)$, $(-1,4,3)$ et $(-1,12,14)$.

12)

a) Pour quelles valeurs du paramètre a la famille $\{(1,3,5),(-1,2,1),(a,1,a^2)\}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

b) Pour quelles valeurs du réel λ la famille $\{(4-\lambda,8,5),(1,3-\lambda,1),(-4,-10,-5-\lambda)\}$ est-elle liée ? Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

13) Soit $u=(1,-2,3,-1), v=(2,1,-2,-1)$. On considère les ensembles

$$\mathrm{V}=\mathrm{Vect}\{u,v\} \text{ et } \mathrm{W}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 :\ \begin{cases} x-2z-t=0 \\ 2x-y-t=0\end{cases}\right\}$$

a) Donner une base et la dimension de V.

b) Donner une base et la dimension de W.

c) Donner une base et la dimension de $\mathrm{V}\cap\mathrm{W}$.

d) Donner une base et la dimension de $\mathrm{V}+\mathrm{W}$.

14) Soit $u=(1,-1,2,3), v=(3,-1,2,1)$ et $w=(-9,1,-2,5)$. On considère les ensembles

$$\mathrm{V}=\mathrm{Vect}\{u,v,w\} \text{ et } \mathrm{W}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 :\ x+2y+z-t=0\right\}$$

a) Donner une base et la dimension de V.

b) Donner une base et la dimension de W.

c) Donner une base et la dimension de $\mathrm{V}\cap\mathrm{W}$.

d) Donner une base et la dimension de $\mathrm{V}+\mathrm{W}$.

15) On considère les vecteurs

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,-1,0,-1) \\ u_2 &= (2,2,1,0) \\ u_3 &= (3,-3,0,-1) \\ u_4 &= (2,1,1,0). \end{aligned}$$

a) Montrer que $\{u1,u2,u3,u4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Soit n un entier. On définit la matrice

$$\begin{pmatrix} -11 & -6 & 36 & -6 \\ 3 & -2 & 0 & 6 \\ -3 & -3 & 13 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

les ensembles

$$\mathrm{E}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 :\ \mathrm{A}\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right\},\quad \mathrm{F}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 :\ \mathrm{A}\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right\}$$

et

$$G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\}.$$

i) Montrer que ces espaces sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Calculer la dimension et donner une base pour chacun de ces sous-espaces.

ii) Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de E, un vecteur de F et un vecteur de G.

16) Compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ la famille $\{(1,-3,5)(1,-5,4)\}$ (si cela est possible).

17) Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille $\{(2,-4,5,3),(1,1,1,1),(3,-3,6,0)\}$ (si cela est possible).

18) Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille $\{(2,-4,5,3),(1,1,1,1),(-1,11,-7,-3)\}$ (si cela est possible).

19) Dans $\mathbb{R}^3$, construire un supplémentaire du sous-espace vectoriel engendré par $(2,-7,3)$.

20) Dans $\mathbb{R}^4$, construire un supplémentaire du sous-espace vectoriel engendré les vecteurs $(1,-1,2,-2)$, $(3,2,-2,1)$ et $(3,7,-10,8)$.

21) On considère les vecteurs $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,-1)$.

a) Montrer que ces vecteurs forment une base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage de la base canonique à cette base.

b) Quelles sont les coordonnées dans la base canonique d'un vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ sont $(1,-1,3)$?

c) Écrire les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{F}$.

d) Quelles sont les coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ d'un vecteur dont les coordonnées dans la base canonique sont $(1,-1,3)$?

22) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\det(A - \lambda I) = -\lambda^2(4-\lambda)$.

b) Pour quelles valeurs de λ la matrice $A - \lambda I$ n'est-elle pas inversible ?

c) On définit les ensembles

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}, \quad F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

d) Montrer que E est de dimension 2, et construire deux vecteurs u et v formant une base de E.

e) Montrer que F est de dimension 1, et construire un vecteur w engendrant F.

f) Montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Construire la matrice P de passage de la base canonique à cette base.

g) Calculer $P^{-1}AP$.

h) Résoudre le système d'équations différentielles linéaires homogènes :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 3y(t) + 6z(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 3y(t) - 6z(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) - 2z(t). \end{cases}$$

23) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonction de R dans $\mathbb{R}$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

a) Le but de cette question est de trouver les fonctions X dans $\mathcal{D}$ vérifiant

$$X'(t) = X(t) + e^t \tag{18}$$

pour tout réel t et $X(0) = 1$.

i) La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, d'inverse dérivable sur $\mathbb{R}$, toute fonction X de $\mathcal{D}$ peut s'écrire de façon unique $X(t) = X_0(t)e^t$ pour tout réel t, où X_0 est une fonction de $\mathcal{D}$. Quelle équation portant sur X_0 est équivalente à l'équation (18) ?

ii) En déduire que X est solution de (18) avec $X(0) = 1$ si et seulement si $X(t) = (t + 1)e^t$ pour tout réel t.

b) Déduire de la question précédente l'ensemble des éléments X et Y de $\mathcal{D}$ vérifiant

$$\begin{cases} X'(t) = X(t) + Y(t) \\ Y'(t) = Y(t) \end{cases}$$

pour tout réel t et $X(0) = Y(0) = 1$.

c) Le but de cette question est de trouver toutes les fonctions x et y de $\mathcal{D}$ telles que

$$\begin{aligned} x'(t) &= 7x(t) + 4y(t) \\ y'(t) &= -9x(t) - 5y(t) \end{aligned} \tag{19}$$

pour tous réels t avec $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$.

i) Trouver une matrice A d'ordre 2 telle que (19) équivaut à

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'(t) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t)$$

pour tous réels t.

ii) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $T = P^{-1}AP$.

iii) Pour toutes fonctions x et y de $\mathcal{D}$, on définit les fonctions X et Y de $\mathcal{D}$ en posant

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

pour tous réels t. Montrer que x et y sont solutions de (19) si et seulement si X et Y sont solutions de (18).

iv) Résoudre (19).

24) Soit

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & a \\ -b & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Montrer que V est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire que V est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Donner une base $\mathcal{B}$ de V.

c) Donner un supplémentaire de V dans $M_2(\mathbb{R})$ et une base $\mathcal{B}'$ de ce supplémentaire.

d) Construire la matrice de passage de la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ à la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$. Cette matrice est-elle inversible ?

25) On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 0 & a+b-c \\ 0 & 2a-b+c & 0 \\ a+b-c & 0 & a-b \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

b) Quelle est la dimension de E ?

c) Construire un supplémentaire de E dans $M_3(\mathbb{R})$.

Annexes de compléments

A Annexe : comment réduire une famille génératrice en une base

Dans l'exemple 92 nous avons vu comment construire une base en enlevant des vecteurs à une famille génératrice. Cet exemple se généralise sans problème. Nous indiquons maintenant une autre méthode.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par $v_1,\ldots,v_p$. On cherche une base de V. La méthode est basée sur les remarques suivantes :

1) si on échange deux vecteurs, la famille obtenue engendre toujours V ;
2) si on multiplie l'un des vecteurs $v_1,\ldots,v_p$ par un scalaire non nul, la famille obtenue engendre toujours V ;
3) si à l'un des vecteurs, on ajoute un autre vecteur multiplié par un scalaire, la famille obtenue engendre toujours V.

Construisons alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à $v_1,\ldots,v_p$. C'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées, dans la base canonique, des vecteurs $v_1,\ldots,v_p$. En faisant les opérations élémentaires suivantes *sur le colonnes* [(q)] :

1) échange de deux colonnes ;
2) multiplication d'une colonne par un scalaire non nul ;
3) ajout à une colonne d'une autre colonne multipliée par un scalaire

on peut obtenir une matrice dont la transposée est une matrice échelon, c'est-à-dire une matrice vérifiant

1) chaque colonne est nulle ou bien son premier coefficient non nul est 1 ;
2) si une colonne est nulle, toutes les colonnes suivantes sont nulles ;
3) si une colonne à son premier coefficient non nul sur la ligne n° i alors le premier coefficient non nul de la colonne suivante est sur une ligne n° $k > i$.

Les colonnes non nulles de la matrices obtenues constituent une famille génératrice de V et on vérifie facilement que c'est une famille libre. C'est donc une base de E.

Exemple 136– Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les cinq vecteurs $e_1 = (1,-1,0,1)$, $e_2 = (2,1,4,5)$, $e_3 = (1,2,-4,-2)$, $e_4 = (2,3,4,5)$ et $e_5 = (1,1,0,1)$. La matrice de passage de la base canonique à la famille $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

q. Test de lucidité : relier chacune de ces opérations à l'une des trois remarques de la liste précédente.

Par les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, $C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1$ et $C_5 \leftarrow C_5 - C_1$ on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par $C_2 \leftrightarrow C_5$ on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par $C_2 \leftarrow \frac{1}{2}C_2$ on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par les opérations $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 - 5C_2$ et $C_5 \leftarrow C_5 - 3C_2$ on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, les opérations $C_4 \leftarrow C_4 + C_3$ et $C_5 \leftarrow C_5 + C_3$ donnent la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on multiplie C_3 par $-1/4$ pour terminer avec

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, une base de V est la famille $\{(1,-1,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,3/4)\}$ et V est de dimension 3.

B Annexe : preuve du théorème de la base incomplète

Notre but est de démontrer le théorème 80 dont on rappelle l'énoncé.

***Théorème* 137** (Théorème de la base incomplète)**–** *Soit* E *un espace vectoriel non nul, soit* $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$ *une famille libre de* E *et* $\{g_1,\dots,g_q\}$ *une famille génératrice de* E*. Alors il existe une base* $\{e_1,\dots,e_n\}$ *de* E *telle que :*

1) pour tout $i \leq p$ *on a* $e_i = \ell_i$ *;*

2) pour tout $i > p$ *on a* $e_i \in \{g_1,\dots,g_q\}$*.*

Pour ce faire, on commence par démontrer une proposition intermédiaire.

***Proposition* 138–** *Si* $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$ *est une famille libre de* E *et si* u *est un vecteur de* E *alors,* u *est combinaison linéaire de* $\ell_1,\dots,\ell_p$ *si et seulement si la famille* $\{\ell_1,\dots,\ell_p,u\}$ *est liée.*

Démonstration. Si u est combinaison linéaire de $\ell_1,\dots,\ell_p$ alors la famille $\{\ell_1,\dots,\ell_p,u\}$ est liée d'après la définition 61. Réciproquement, supposons la famille $\{\ell_1,\dots,\ell_p,u\}$ liée. Alors, d'après le théorème 64, il existe des coefficients $\lambda_1,\dots,\lambda_{p+1}$ tels que

$$\lambda_1\ell_1 + \dots + \lambda_p\ell_p + \lambda_{p+1}u = 0$$

et l'un de ces coefficients au moins n'est pas nul. Si $\lambda_{p+1} = 0$, alors l'un des coefficients $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ est non nul, et on obtient une combinaison linéaire de $\ell_1,\dots,\ell_p$ nulle avec l'un des coefficients non nul : ceci contredit la liberté de la famille $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$. On a donc $\lambda_{p+1} \neq 0$ puis

$$u = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{p+1}}\ell_1 - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}}\ell_p$$

est une combinaison linéaire de $\ell_1,\dots,\ell_p$. □

Démonstration du théorème de la base incomplète. On distingue deux cas. Dans le premier cas, la famille libre et déjà génératrice, dans le second cas, il faut effectivement la compléter.

1) On suppose dans un premier cas que tous les vecteurs de $\{g_1,\dots,g_q\}$ sont combinaison linéaire de vecteurs de la famille $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$. Si u est un vecteur quelconque de E, il est combinaison linéaire de $\{g_1,\dots,g_q\}$ et donc de $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$. Autrement dit la famille $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$ est génératrice de E. Puisqu'elle est aussi libre, c'est une base de E et $n = p$.

2) On suppose qu'il existe un vecteur g_j de $\{g_1,\dots,g_q\}$ qui n'est pas combinaison linéaire de $\{\ell_1,\dots,\ell_p\}$. D'après la proposition précédente, la famille $\{\ell_1,\dots,\ell_p,g_j\}$ est donc libre. Soit alors n le plus grand entier, nécessairement compris entre $p+1$ et $p+q$, tel qu'il existe une famille libre $\{e_1,\dots,e_n\}$ vérifiant :

   i) pour tout $i \leq p$ on a $e_i = \ell_i$;

   ii) pour tout $i > p$ on a $e_i \in \{g_1,\dots,g_q\}$.

   Nous montrons que $\{e_1,\dots,e_n\}$ est une base de E. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle est génératrice puisque par construction elle est libre. Par définition de n, en ajoutant n'importe quel vecteur de $\{g_1,\dots,g_q\}$ à $\{e_1,\dots,e_n\}$, on obtient une famille liée. Autrement dit, tout vecteur de $\{g_1,\ldots,g_q\}$ est combinaison linéaire de $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Puisque tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\{g_1,\ldots,g_q\}$, tout vecteur de E est aussi combinaison linéaire de $\{e_1,\ldots,e_n\}$. On en déduit que $\{e_1,\ldots,e_n\}$ engendre E.

□

C Annexe : bases et supplémentaires

Le but de cette annexe est de démontrer le théorème 103 dont on rappelle l'énoncé.

***Théorème* 139–** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Soit* $\{e_1,\ldots,e_p\}$ *une base de* F_1 *et* $\{e_{p+1},\ldots,e_{p+q}\}$ *une base de* F_2. *Les sous-espaces* F_1 *et* F_2 *sont supplémentaires si et seulement si* $\{e_1,\ldots,e_{p+q}\}$ *est une base de* E.

Démonstration. Supposons F_1 et F_2 supplémentaires. Nous devons montrer que la famille $\{e_1,\ldots,e_{p+q}\}$ est une base de E. Si $u \in E$, il existe f_1 dans F_1 et f_2 dans F_2 tels que $u = f_1 + f_2$. Le vecteur f_1 est combinaison linéaire de $\{e_1,\ldots,e_p\}$, Le vecteur f_2 est combinaison linéaire de $\{e_{p+1},\ldots,e_{p+q}\}$ donc u est combinaison linéaire de la famille $\{e_1,\ldots,e_{p+q}\}$ qui engendre ainsi E. Considérons maintenant la combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_{p+q} e_{p+q} = 0.$$

C'est une décomposition de 0 en somme d'un élément de F_1, à savoir $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$ et d'un élément de F_2 à savoir $\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_{p+q} e_{p+q}$. Une autre décomposition est $0 = 0 + 0$ et par unicité, on a $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p = 0$ et $\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_{p+q} e_{p+q} = 0$. La famille $\{e_1,\ldots,e_p\}$ est libre donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, la famille $\{e_{p+1},\ldots,e_{p+q}\}$ est libre donc $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_{p+q} = 0$. On en déduit que la famille $\{e_1,\ldots,e_{p+q}\}$ est libre. C'est donc une base de E.

Supposons que $\{e_1,\ldots,e_{p+q}\}$ est une base de E. Nous devons montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires. Soit u un vecteur de E. Il existe des scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+q}$ tels que

$$u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_{p+q} e_{p+q}.$$

En posant $f_1 = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$ et $f_2 = \lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_{p+q} e_{p+q}$ on a $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$ et $u = f_1 + f_2$. On en déduit que $E = F_1 + F_2$. Soit ensuite f un vecteur de $F_1 \cap F_2$. Puisque f est dans F_1, il existe des scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ tels que

$$f = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p.$$

Puisque f est dans F_2, il existe des scalaires $\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_{p+q}$ tels que

$$f = \lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_{p+q} e_{p+q}.$$

Ainsi,

$$0 = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p - \lambda_{p+1} e_{p+1} - \ldots - \lambda_{p+q} e_{p+q}$$

et puisque la famille $\{e_1,\ldots,e_{p+q}\}$ est libre, les coefficients $\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+q}$ sont tous nuls. On a donc $f = 0$ puis $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Finalement, F_1 et F_2 sont supplémentaires. □

D Annexe : construction de $\mathbb{C}$ (suite)

Dans l'exercice 13 du chapitre *Matrices*, on a donné une construction matricielle du corps des nombres complexes. On poursuit sous forme d'exercice.

1. Montrer que les matrices
$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
forme une base de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Exprimer $\mathrm{J}^2, \mathrm{KJ}, \mathrm{LJ}, \mathrm{JK}, \mathrm{JL}$ dans la base $\{\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{L}\}$ et montrer que, pour toute matrice Z de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, la relation $\mathrm{JZ} = \mathrm{ZJ}$ équivaut à $\mathrm{Z} \in \mathrm{Vect}\{\mathrm{I}, \mathrm{J}\}$.
3. Soit $a\mathrm{I} + b\mathrm{J}$ et $c\mathrm{I} + d\mathrm{J}$ deux éléments de $\mathrm{Vect}\{\mathrm{I}, \mathrm{J}\}$. Calculer leur produit et exprimer le résultat en fonction de I et J.
4. Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}\{\mathrm{I}, \mathrm{J}\}$ est un corps. Décrire ses éléments.

E Annexe : un espace vectoriel qui n'est pas de type fini

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 1. C'est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Nous montrons dans cette annexe que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ n'est pas de type fini. Pour cela, nous avons besoin de notions d'arithmétique de base qui ont été vues au collège et seront revues dans le cours *Logique et arithmétique*. Nous avons aussi besoin des fonctions logarithme et exponentielle vue dans le cours de *Mathématiques pour tous*.

Supposons, par l'absurde, que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ admet une famille génératrice à D éléments. Toutes les familles libres ont alors au plus D éléments. Pour exhiber une contradiction, on considère la suite
$$2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_{\mathrm{D}+1}$$
des $\mathrm{D}+1$ premiers nombres premiers. On montre dans la suite que la famille
$$\mathcal{L} = \{\ln(p_1), \ln(p_2), \ldots, \ln(p_{\mathrm{D}+1})\}$$
est libre. C'est une contradiction puisque cette famille a $\mathrm{D}+1$ éléments (la fonction ln est strictement croissante donc si $x \neq y$ alors $\ln x \neq \ln y$).

Considérons une combinaison linéaire nulle à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de $\mathcal{L}$. On a alors une égalité
$$r_1 \ln(p_1) + r_2 \ln(p_2) + \cdots + r_{\mathrm{D}+1} \ln(p_{\mathrm{D}+1}) = 0 \tag{20}$$
avec $r_1, r_2, \ldots, r_{\mathrm{D}+1}$ des nombres rationnels. Chacun des rationnels r_i a un numérateur n_i entier relatif et un dénominateur d_i entier naturel (qu'on prend égal à 1 si $r_i = 0$). En mutlipliant l'égalité (20) par le produit des dénominateurs, on obtient l'égalité
$$m_1 \ln(p_1) + m_2 \ln(p_2) + \cdots + m_{\mathrm{D}+1} \ln(p_{\mathrm{D}+1}) = 0$$

où les coefficients m_i sont des entiers relatifs satisfaisant à la propriété

$$m_i = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad r_i = 0 \tag{21}$$

(la raison étant qu'on passe de r_i à m_i par multiplication par un entier non nul). Prenant l'exponentielle de (21), on obtient

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_{\mathrm{D}+1}^{m_{\mathrm{D}+1}} = 1.$$

Les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{D}+1}$ sont distincts deux à deux. Il résulte alors de l'arithmétique élémentaire [r] que chacun des entiers relatifs m_i est nul. Ainsi, chacun des rationnels r_i est nul et la famille $\mathcal{L}$ est libre.

F Annexe : fin de la démonstration du théorème 133

Soit p et q deux nombres réels tels que $p^2 - 4q < 0$. On note r_1 et r_2 les solutions de l'équation $x^2 + px + q = 0$. Il existe des réels α et β tels que $r_1 = \overline{r_2} = \alpha + i\beta$. L'objectif de cette annexe est de démontrer que l'espace vectoriel $\mathcal{D}_{p,q}$ des applications f solutions de l'équation $f'' + pf' + qf = 0$ est le sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{D}$ engendré par $x \mapsto \exp(\alpha x)\cos(\beta x)$ et $x \mapsto \exp(\alpha x)\sin(\beta x)$. On définit les fonctions

$$g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\beta x)e^{\alpha x} \end{array} \quad \text{et} \quad g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(\beta x)e^{\alpha x} \end{array}$$

On a montré dans la partie 5.2 que la famille $\{g_1, g_2\}$ est libre. Il résultera donc de notre preuve que $\mathcal{D}_{p,q}$ est de dimension 2 et que $\{g_1, g_2\}$ en est une base.

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\Phi_1(x) = \mathfrak{Re}\,\Phi(x)$ et $\Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\Phi_2(x) = \mathfrak{Im}\,\Phi(x)$. On dit que Φ est dérivable si les fonctions Φ_1 et Φ_2. On définit alors la dérivée de Φ par $\Phi' = \Phi_1' + i\Phi_2'$. On dit que Φ est deux fois dérivable si Φ' est dérivable. Enfin, si $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ avec α et β réels, on définit l'application $e_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $e_z(x) = \exp(\alpha x)e^{i\beta x}$.

La fonction e_z est dérivable de dérivée la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $x \mapsto ze_z(x)$. En effet, pour tout réel x, on a $e_z(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\sin(\beta x)$. Les fonctions $\mathrm{E}_1 : x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $\mathrm{E}_2 : x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ sont dérivables. La fonction e_z est donc dérivable est $e_z'(x) = \mathrm{E}_1'(x) + i\mathrm{E}_2'(x)$. On a

$$\mathrm{E}_1'(x) = [\alpha\cos(\beta x) - \beta\sin(\beta x)]e^{\alpha x} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_2'(x) = [\alpha\sin(\beta x) + \beta\cos(\beta x)]e^{\alpha x}.$$

pour tout réel x. On en tire

$$\begin{aligned} e_z'(x) &= [\alpha\cos(\beta x) - \beta\sin(\beta x) + i\,(\alpha\sin(\beta x) + \beta\cos(\beta x))]e^{\alpha x} \\ &= (\alpha + i\beta)[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)]e^{\alpha x} \\ &= ze_z(x). \end{aligned}$$

r. Plus précisément du théorème de Gauss : si un entier a non nul divise le produit des entiers b et c et si a est premier avec b alors a divise c.

Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\mathcal{E}_z$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dérivables qui vérifient $f' = e_z$. Ce sont donc les fonctions f vérifiant

$$\begin{aligned}(\mathfrak{Re} f)'(x) &= \mathrm{E}_1(x)\\ (\mathfrak{Im} f)'(x) &= \mathrm{E}_2(x)\end{aligned}$$

pour tout réel x. On va déterminer cet ensemble. Si $z = 0$, c'est l'ensemble des fonctions qui vérifient $f' = 1$. On a donc $\mathfrak{Re}(f)'(x) = 1$ et $\mathfrak{Im}(f)'(x) = 0$. On en déduit $\mathfrak{Re}(f)(x) = x + \lambda$ et $\mathfrak{Im}(f)'(x) = \mu$ avec λ et μ réels. La fonction f est donc de la forme $f(x) = x + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$. Réciproquement, si $f(x) = x + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$, alors $\mathfrak{Re}(f)(x) = x + \mathfrak{Re}\gamma$ et $\mathfrak{Im}(f)(x) = \mathfrak{Im}\gamma$ de sorte que $\mathfrak{Re}(f)'(x) = 1$ et $\mathfrak{Im}(f)'(x) = 0$ puis $f'(x) = 1$. L'ensemble $\mathcal{E}_0$ est donc l'ensemble des fonctions pour lesquelles existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = x + \gamma$ pour tout réel x. Si $z \neq 0$, on considère $f \in \mathcal{E}_z$ et on contruit la fonction intermédiaire $v(x) = f(x) - \frac{1}{z}e_z(x)$. La fonction v est dérivable et sa dérivée est définie par $v'(x) = f'(x) - e_z(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $v' = 0$. Les fonctions réelles $\mathfrak{Re}(v)$ et $\mathfrak{Im}(v)$ sont donc deux constantes réelles et la fonction v est une constante complexe. Il existe donc $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = \frac{1}{z}e_z(x) + \gamma$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si $f(x) = \frac{1}{z}e_z(x) + \gamma$ pour tout réel x alors $f'(x) = e_z(x)$ pour tout réel x et $f \in \mathcal{E}_z$. Si $z \neq 0$, l'ensemble $\mathcal{E}_z$ est donc l'ensemble des fonctions pour lesquelle existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = \frac{1}{z}e_z(x) + \gamma$ pour tout réel x.

Soit k un réel. On étudie maintenant l'ensemble $\mathcal{D}_{ik}$ des fonctions $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ solution de l'équation $\Phi' + ik\Phi = 0$. Soit $\Phi \in \mathcal{D}_{ik}$. On considère l'application intermédiaire Ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout réel x par $\Psi(x) = \Phi(x)e^{ikx}$. On calcule

$$\begin{aligned}(\mathfrak{Re}\Psi)(x) &= (\mathfrak{Re}\Phi)(x)\cos(kx) - (\mathfrak{Im}\Phi)(x)\sin(kx)\\ (\mathfrak{Im}\Psi)(x) &= (\mathfrak{Im}\Phi)(x)\cos(kx) + (\mathfrak{Re}\Phi)(x)\sin(kx)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{Re}\Psi)'(x) =\\ &\qquad -k(\mathfrak{Re}\Phi)(x)\sin(kx) + (\mathfrak{Re}\Phi)'(x)\cos(kx) - k(\mathfrak{Im}\Phi)(x)\cos(kx) - (\mathfrak{Im}\Phi)'(x)\sin(kx)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{Im}\Psi)'(x) =\\ &\qquad -k(\mathfrak{Im}\Phi)(x)\sin(kx) + (\mathfrak{Im}\Phi)'(x)\cos(kx) + k(\mathfrak{Re}\Phi)(x)\cos(kx) + (\mathfrak{Re}\Phi)'(x)\sin(kx)\end{aligned}$$

pour tout réel x. En réordonnant les termes, on a alors

$$\begin{aligned}\Psi'(x) = (\mathfrak{Re}\Psi)'(x) + i(\mathfrak{Im}\Psi)'(x) &= [(\mathfrak{Re}\Phi)'(x) + i(\mathfrak{Im}\Phi)'(x)][\cos(kx) + i\sin(kx)]\\ &\quad + ik[(\mathfrak{Re}\Phi)(x) + i(\mathfrak{Im}\Phi)(x)][\cos(kx) + i\sin(kx)]\end{aligned}$$

et donc

$$\Psi'(x) = \Phi'(x)e^{ikx} + ik\Phi(x)e^{ikx} = [\Phi'(x) + ik\Phi(x)]e^{ikx} = 0$$

pour tout réel x. Comme précédemment, on en déduit l'existence de $\gamma \in \mathbb{C}$ telle que $\Psi(x) = \gamma$ et donc $\Phi(x) = \gamma e^{-ikx}$ pour tout réel x. Réciproquement, s'il existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\Phi(x) = \gamma e^{-ikx}$ alors $\Phi'(x) = -ik\Phi(x)$ et donc $\Phi \in \mathcal{D}_{ik}$. L'ensmble $\mathcal{D}_{ik}$ est donc l'ensemble des fonctions $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pour lesquelles existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\Phi(x) = \gamma e^{-ikx}$ pour tout réel x. C'est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction e_{-ik}.

Exercice 140– On généralise le calcul précédent. Soit u et v deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que la fonction produit uv, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, est dérivable de dérivée $u'v + uv'$.

Considérons enfin une fonction f de $\mathcal{D}_{p,q}$ avec $p^2 - 4q < 0$. On rappelle que cela implique $f'' + pf' + qf = 0$. On rappelle aussi que $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les deux complexes conjugués racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$. On considère alors la fonction à valeurs complexes $\mathrm{F} = f e_{-r_1}$. En s'inspirant du calcul de la dérivée de Ψ, on calcule

$$\mathrm{F}' = (f' - r_1 f)e_{-r_1}$$

et

$$\mathrm{F}'' = (f'' - 2r_1 f' + r_1^2 f)e_{-r_1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{F}'' + (r_1 - r_2)\mathrm{F}' &= [f'' - (r_1 + r_2)f' - r_1 r_2 f]e_{-r_1}\\ &= (f'' + pf' + qf)e_{-r_1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Puisque $r_1 - r_2 = 2i\beta$, on en déduit $\mathrm{F}' \in \mathcal{D}_{2i\beta}$. Il existe donc $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{F}' = \gamma e_{-2i\beta}$. On en tire $\dfrac{\mathrm{F}}{\gamma} \in \mathcal{E}_{-2i\beta}$. Il existe donc $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\dfrac{\mathrm{F}}{\gamma} = \dfrac{1}{-2i\beta} e_{-2i\beta} + \delta$ d'où l'on tire l'existence de deux complexes λ et μ tels que $\mathrm{F} = \mu e_{-2i\beta} + \lambda$. On a alors

$$f = \mu e_{r_1 - 2i\beta} + \lambda e_{r_1} = \mu e_{r_2} + \lambda e_{r_1}.$$

Réciproquement, si f est de cette forme elle vérifie bien l'équation $f'' + pf' + qf = 0$, mais pour être dans $\mathcal{D}_{p,q}$ elle doit être à valeur dans $\mathbb{R}$. Il faut donc chercher pour quels complexes λ et μ, on a

$$\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \in \mathbb{R}$$

pour tout réel x. On a

$$\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} = (\lambda e^{i\beta x} + \mu e^{-i\beta x})e^{\alpha x}$$

on cherche donc les conditions sur λ et μ pour que

$$\lambda e^{i\beta x} + \mu e^{-i\beta x} \in \mathbb{R} \tag{22}$$

pour tout réel x. On calcule

$$\mathfrak{Im}\left(\lambda e^{i\beta x} + \mu e^{-i\beta x}\right) = (\mathfrak{Im}\,\lambda)\cos(\beta x) + (\mathfrak{Re}\,\lambda)\sin(\beta x) + (\mathfrak{Im}\,\mu)\cos(\beta x) - (\mathfrak{Re}\,\mu)\sin(\beta x)$$

de sorte que la condition (22) devient

$$\mathfrak{Im}\left(\lambda e^{i\beta x} + \mu e^{-i\beta x}\right) = \mathfrak{Im}(\lambda+\mu)\cos(\beta x) + \mathfrak{Re}(\lambda-\mu)\sin(\beta x) = 0.$$

En choisissant successivement $x = 0$ puis $x = \dfrac{\pi}{2\beta}$ on trouve $\mathfrak{Im}\,\mu = -\mathfrak{Im}\,\lambda$ et $\mathfrak{Re}\,\mu = \mathfrak{Re}\,\lambda$ d'ou $\mu = \overline{\mu}$. On a donc $f \in \mathcal{D}_{p,q}$ si et seulement si f est de la forme

$$f(x) = [\lambda e^{i\beta x} + \overline{\lambda e^{i\beta x}}]e^{\alpha x} = [2\mathfrak{Re}(\lambda)\cos(\beta x) - 2\mathfrak{Im}(\lambda)\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$$

pour tout réel x. On en déduit que $f \in \mathcal{D}_{p,q}$ si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que

$$f(x) = a\cos(\beta x)e^{\alpha x} + b\sin(\beta x)e^{\alpha x}$$

pour tout réel x. Les fonctions g_1 et g_2 définies en (16) engendrent donc $\mathcal{D}_{p,q}$.