Département de mathématiques et informatique
L1S1, module A ou B

Chapitre 1

Nombres

Emmanuel Royer

emmanuel.royer@uca.fr

➔ Remarque importante.

Ce cours n’est *pas* indépendant du cours de Mathématiques pour tous.

Table des matières

1 Entiers, rationnels et réels

1.1) Rappels généraux

L'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

puis $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

et $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}.$$

Enfin, $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. Tout réel peut s'écrire à l'aide d'un entier relatif et d'une infinité de chiffres décimaux.

Tous ces ensembles sont munis d'une addition, d'une multiplication et d'un *ordre total*, notion que nous allons étudier par la suite. La soustraction est définie dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{N}$: le résultat de la soustraction $2-3$ n'est pas dans $\mathbb{N}$ alors que 2 et 3 sont dans $\mathbb{N}$. La division (par un nombre nécessairement non nul) est définie dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$ (et *a fortiori* pas dans $\mathbb{N}$) : le résultat de la division de -2 par -7 n'est pas dans $\mathbb{Z}$ alors que -2 et -7 sont dans $\mathbb{Z}$.

Un principe fondamental dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ est le *principe de récurrence*.

***Principe de récurrence* 1–** *Soit $\mathcal{P}(n)$ un énoncé dépendant d'un paramètre entier relatif n. S'il existe n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ est vrai et si, pour tout $n \geq n_0$ la supposition que l'énoncé $\mathcal{P}(n)$ est vrai implique que l'énoncé $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai alors, l'énoncé $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.*

Remarque 1– Il faut bien comprendre la phrase « la supposition que l'énoncé $\mathcal{P}(n)$ est vrai implique que l'énoncé $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai ». Elle ne dit pas qu'on suppose $\mathcal{P}(n)$ vrai pour tout n. Elle dit qu'on suppose vraie l'implication « si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ». Ayez en tête le fait que l'implication « si vous travaillez bien vous aurez de bon résultats » est vraie mais qu'elle ne dit pas que vous travaillerez bien.

Exemple 2– Montrons par récurrence que

$$\underbrace{1+2+\cdots+n}_{\substack{\text{somme de tous les}\\ \text{entiers de 1 à } n}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

pour tout $n \geq 1$. On note $\mathcal{P}(n)$ l'énoncé à démontrer. L'énoncé $\mathcal{P}(1)$ est vrai car la somme de tous les entiers de 1 à 1 est 1 et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Soit alors $n \geq 1$. Supposons vrai l'énoncé $\mathcal{P}(n)$ et calculons la somme de tous les entiers de 1 à $n+1$. On a

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+(n+1) &= (1+\cdots+n)+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \quad \text{car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons montré que si l'énoncé $\mathcal{P}(n)$ est vrai, alors l'énoncé $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai. Nous avons de plus montré que l'énoncé $\mathcal{P}(1)$ est vrai. Le principe de récurrence permet de conclure que l'énoncé $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geq 1$.

Remarque 3– De façon moins ambiguë, on note

$$\sum_{j=1}^{n} j$$

la somme $1+2+\cdots+n$. Le symbole

$$\sum_{j=1}^{n} f(j)$$

désigne le résultat obtenu en considérant successivement les entiers de 1 à n, en calculant pour chaque tel entier j la valeur $f(j)$ et en ajoutant le résultat à la somme précédemment calculée :

$$\sum_{j=1}^{n} f(j) = f(1)+f(2)+\cdots+f(n).$$

Exercice 4– Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.2) Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des corps

On fixe $\mathbb{K}$ l'un des deux ensembles $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Ceci signifie que vous pouvez lire la suite en remplaçant la lettre $\mathbb{K}$ par $\mathbb{Q}$ puis relire en remplaçant la lettre $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}$.

Soit a, b et c trois éléments de $\mathbb{K}$. L'addition a les propriétés suivantes.

1) L'addition de $\mathbb{K}$ est une opération interne : $a+b \in \mathbb{K}$.
2) L'addition est *associative* :

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

3) L'addition admet 0 pour *élément neutre* :

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

4) Tout élément de $\mathbb{K}$ admet un *symétrique* [a] pour l'addition : étant donné $a \in \mathbb{K}$, il existe $s \in \mathbb{K}$ tel que $a + s = s + a = 0$. Il suffit en effet de choisir $s = -a$.

5) L'addition est *commutative* :

$$a + b = b + a.$$

La multiplication a les propriétés suivantes.

1) La multiplication de $\mathbb{K}$ est une opération interne : $ab \in \mathbb{K}$.

2) La multiplication est *associative* :

$$(ab)c = a(bc).$$

3) La multiplication admet 1 pour *élément neutre* :

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

4) La multiplication est *commutative* :

$$ab = ba.$$

5) Tout élément *non nul* de $\mathbb{K}$ admet un *symétrique* [b] pour la multiplication : étant donné $a \in \mathbb{K}$ tel que $a \neq 0$, il existe $s \in \mathbb{K}$ tel que $as = sa = 1$. Il suffit en effet de choisir $s = 1/a$.

6) La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition :

$$(a + b)c = ac + bc$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

Ces propriétés munissent $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ d'une structure de *corps* (on dit aussi parfois corps commutatif).

Remarque 5– L'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^*$ ou $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ ou encore $\mathbb{K} - \{0\}$. L'ensemble des éléments positifs de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^+$, l'ensemble des éléments strictement positifs de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{+*}$. L'ensemble des éléments négatifs de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^-$, l'ensemble des éléments strictement négatifs de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{-*}$.

Exercice 6– Comprendre pourquoi ni $\mathbb{N}$ ni $\mathbb{Z}$ ne sont des corps.

---

a. Dans ce cas, on dit aussi *opposé* au lieu de symétrique.
b. Dans ce cas, on dit aussi *inverse* au lieu de symétrique.

1.3) Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Si a et b sont deux nombres réels, on dit que a est supérieur ou égal à b et on note $a \geq b$ si $a - b$ est positif ou nul. On a alors les propriétés suivantes.

1) *Réflexivité* : pour tout réel a, $a \geq a$.
2) *Antisymétrie* : pour tous réels a et b, si $a \geq b$ et $b \geq a$ alors $a = b$.
3) *Transitivité* : pour tous réels a, b et c, si $a \geq b$ et $b \geq c$ alors $a \geq c$.

Ces trois propriétés traduisent le fait que la relation « être supérieur ou égal à » est une *relation d'ordre*. D'autre part, étant donnés deux réels, l'un est nécessairement supérieur ou égal à l'autre : pour tous réels a et b, on a $a \geq b$ ou $b \geq a$[c]. On dit alors que la relation « être supérieur ou égal à » est une *relation d'ordre total*.

Exercice 7– Dans $\mathbb{N}$ on définit la relation « être divisible » de la façon suivante : si a et b sont deux entiers, a est divisible par b s'il existe un entier k tel que $a = bk$. Montrer que cette relation est une relation d'ordre mais qu'elle n'est pas totale.

On dit que a est inférieur ou égal à b (on note $a \leq b$) si b est supérieur ou égal à a. Enfin, a est strictement supérieur à b (on note $a > b$) si a est supérieur ou égal à b mais n'est pas égal à b et a est strictement inférieur à b si b est strictement supérieur à a (on note $a < b$).

Exercice 8– Montrer que la relation « être strictement supérieur à » n'est pas une relation d'ordre.

Rappelons les règles de calculs avec les inégalités.

***Proposition* 9–** *Soit a, b, c, a', b' des nombres réels.*

1) *Addition d'un réel : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.*
2) *Addition d'une inégalité : si $a \leq b$ et $a' \leq b'$ alors $a + a' \leq b + b'$.*
3) *Multiplication par un réel* positif *: si $a \leq b$ et si $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$.*
4) *Multiplication par un réel* négatif *: si $a \leq b$ et si $c \leq 0$ alors $bc \leq ac$.*
5) *Inversion d'une inégalité de nombres positifs : si $a \leq b$ et si $a > 0$ alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.*
6) *Inversion d'une inégalité de nombres négatifs : si $a \leq b$ et si $b < 0$ alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.*

Exercice 10– Si x est positif ou nul, on rappelle que $\sqrt{x}$ est l'unique réel positif ou nul dont le carré est x. En utilisant l'égalité $b - a = \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)$ montrer que si $0 \leq a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

---

c. Noter qu'on peut avoir les deux en même temps. Le *ou* en mathématique n'est pas exclusif.

La notion de *valeur absolue* permet de ne travailler qu'avec des nombres positifs ou nuls. Si a et b sont des nombres réels on définit le maximum $\max(a,b)$ et le minimum $\min(a,b)$ de a et b par

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{sinon} \end{cases} \qquad \min(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{sinon} \end{cases}.$$

Définition 11– *Si a est un nombre réel alors*

$$|a| = \max(a,-a) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Exercice 12– Montrez $\sqrt{a^2} = |a|$.

***Proposition* 13** (Propriétés de la valeur absolue)– *Soit x et y deux nombres réels.*

- $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
- $|-x| = |x|$.
- $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- *Inégalité triangulaire :* $|x+y| \leq |x| + |y|$.
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

Démonstration. 1) Si $|x| = 0$ alors $\max(x,-x) = 0$ donc $x = 0$ ou $-x = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. Réciproquement, si $x = 0$ alors $-x = 0$ donc $\max(x,-x) = 0$.

2) C'est un cas particulier de $|xy| = |x| \cdot |y|$ avec $y = -1$. Nous démontrons cette égalité ci-dessous.

3) a) Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $xy \geq 0$ donc $|xy| = xy$. Mais dans ce cas $|x| = x$ et $|y| = y$ donc $xy = |x| \cdot |y|$.
   b) Si $x \geq 0$ et $y < 0$ alors $xy \leq 0$ donc $|xy| = -xy$. Mais dans ce cas $|x| = x$ et $|y| = -y$ donc $-xy = |x| \cdot |y|$.
   c) Si $x < 0$ et $y \geq 0$ alors $xy \leq 0$ donc $|xy| = -xy$. Mais dans ce cas $|x| = -x$ et $|y| = y$ donc $-xy = |x| \cdot |y|$.
   d) Si $x < 0$ et $y < 0$ alors $xy \geq 0$ donc $|xy| = xy$. Mais dans ce cas $|x| = -x$ et $|y| = -y$ donc $xy = |x| \cdot |y|$.

4) Si $x \geq 0$ on a $x = |x|$ et si $x \leq 0$ on a $x = -|x|$. Donc $-|x| \leq x \leq |x|$ pour tout x. De même $-|y| \leq y \leq |y|$. On en déduit $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Si $x + y \geq 0$ on en déduit

$$|x+y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

Si $x + y < 0$ alors $|x+y| = -(x+y)$; or $x + y \geq -(|x| + |y|)$ donc $-(x+y) \leq |x| + |y|$ et donc $|x+y| \leq |x| + |y|$.

5) Puisque $(x-y)^2 \geq 0$ on a $|x-y|^2 = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Or $-xy \geq -|xy|$ donc $|x-y|^2 \geq x^2 - 2|xy| + y^2$ c'est-à-dire $|x-y|^2 \geq (|x| - |y|)^2$. En prenant la racine carrée de cette inégalité, on obtient le résultat énoncé.

□

Exercice 14– Monter que $|x| \leq a$ si et seulement si $-a \leq x \leq a$.

Enfin, on introduit la partie entière d'un réel comme étant le plus grand entier inférieur ou égal à ce réel.

Définition 15– *Si $x \in \mathbb{R}$, on appelle* partie entière *de x et on note $\lfloor x \rfloor$ (ou $\mathrm{E}(x)$) l'unique entier inférieur ou égal à x tel que l'entier $\lfloor x \rfloor + 1$ est strictement supérieur à x. On a donc*

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exemple 16– On a $\lfloor -1,2 \rfloor = -2$ et $\lfloor 1,2 \rfloor = 1$.

1.4) Trigonométrie

1.4.1– Les fonctions sinus et cosinus

Munissons le plan d'un repère orthonormale direct $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. On appelle quadrants les quatre régions déterminées par les conditions suivantes sur les signes des coordonnées x et y des points s'y trouvant :

— premier quadrant : $x \geq 0$, $y \geq 0$;
— deuxième quadrant : $x \leq 0$, $y \geq 0$;
— troisième quadrant : $x \leq 0$, $y \leq 0$;
— quatrième quadrant : $x \geq 0$, $y \leq 0$.

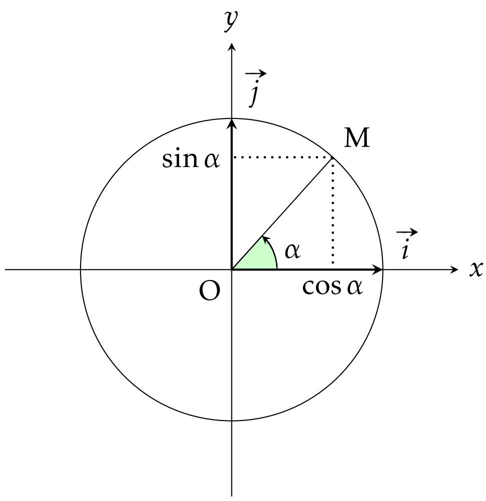


FIGURE 1 – Fonctions cos et sin

On place un point M sur le cercle trigonométrique. La demi-droite Ox et la demi-droite d'origine O passant par M déterminent un angle orienté de mesure [d] α. Rappelons au passage qu'un angle orienté a plusieurs mesures et que si α et α' sont deux mesures d'un même angle alors, il existe un entier relatif k tel que $\alpha' = \alpha + 2k\pi$. De plus, tout réel est la mesure d'un angle entre la demi-droite Ox et une demi-droite d'origine O. Dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, le point M a des coordonnées, toutes deux appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. On note $\cos\alpha$ l'abscisse de M et $\sin\alpha$ son ordonnée. Le théorème de Pythagore dans la triangle déterminé par O, M et la projection orthogonale de M sur la droite Ox donne

$$\boxed{\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1}.$$

Conformément à une habitude ancienne, on notera très souvent $\sin^2\alpha$ au lieu de $\sin(\alpha)^2$ et $\cos^2\alpha$ au lieu de $\cos(\alpha)^2$.

d. Nous exprimerons toujours les mesures des angles en radian. On rappelle que 180°=π rad.

Puisque α et $\alpha + 2k\pi$ sont deux mesure d'un même angle pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\boxed{\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

1.4.2– Valeurs en des angles de références du premier quadrant

Il est nécessaire de connaître les valeurs de cosinus et sinus données dans le tableau 1. La démonstration de ces valeurs est donnée en annexe B.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

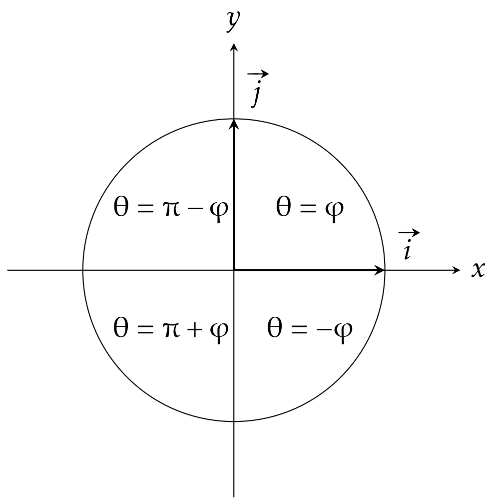
Table 1 – Angles de références du premier quadrant

1.4.3– Valeurs en des angles des autres quadrants

Pour calculer les valeurs des cosinus et sinus dans les trois autres quadrants, on utilise le tableau 2 qu'il est donc nécessaire de connaître. La démonstration de ces formules est donnée en annexe B. On peut retenir la méthode suivante pour savoir quelle formule appliquer. À titre d'exercice, on utilisera cette méthode pour justifier les valeurs données dans les tableaux 3, 4 et 5.

Pour calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

1) Si θ n'est pas compris entre 0 et 2π lui retirer le multiple nécessaire de 2π pour obtenir un angle de mesure dans $[0,2\pi[$ de même cosinus et sinus que θ.
2) Si $\theta\in[0,2\pi[$:
   a) si $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, utiliser la table 1 ;
   b) si $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, calculer φ tel que $\theta=\pi-\varphi$, calculer $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ à l'aide de la table 1 puis $\cos\theta=-\cos\varphi$ et $\sin\theta=\sin\varphi$;
   c) si $\theta\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$, calculer φ tel que $\theta=\pi+\varphi$, calculer $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ à l'aide de la table 1 puis $\cos\theta=-\cos\varphi$ et $\sin\theta=-\sin\varphi$;
   d) si $\theta\in\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$, calculer φ tel que $\theta=-\varphi$, calculer $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ à l'aide de la table 1 puis $\cos\theta=\cos\varphi$ et $\sin\theta=-\sin\varphi$.



β	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$
$\cos(\beta)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\sin(\beta)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$

Table 2 – Calcul des angles dans les autres quadrants

α	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos(\alpha)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

Table 3 – Angles de références du deuxième quadrant

α	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\cos(\alpha)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Table 4 – Angles de références du troisième quadrant

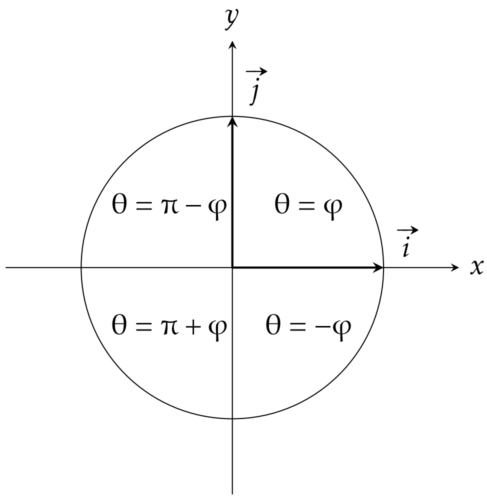
α	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(\alpha)$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$

Table 5 – Angles de références du quatrième quadrant

Pour trouver un angle dont une mesure θ a pour cosinus C et pour sinus S (il faut bien sûr $C^2 + S^2 = 1$), on peut appliquer la méthode ci-dessous.

Pour trouver θ tel que $\cos\theta = C$ et $\sin\theta = S$: on commence par trouver φ tel que $\cos\varphi = |C|$ et $\sin\varphi = |S|$ à l'aide de la table 1 puis

1) si $C \geq 0$ et $S \geq 0$, alors $\theta = \varphi$;
2) si $C \leq 0$ et $S \geq 0$, alors $\theta = \pi - \varphi$;
3) si $C \leq 0$ et $S \leq 0$, alors $\theta = \pi + \varphi$;
4) si $C \geq 0$ et $S \leq 0$, alors $\theta = -\varphi$.



1.4.4– Fomules d'addition

Les formules d'additions permettent d'évaluer les cosinus et sinus d'une somme d'angles. Une preuve est donnée en annexe B.

***Théorème* 17–** *Si a et b sont réels alors*

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

et

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

Exercice 18– Déduire du théorème 17 des formules pour

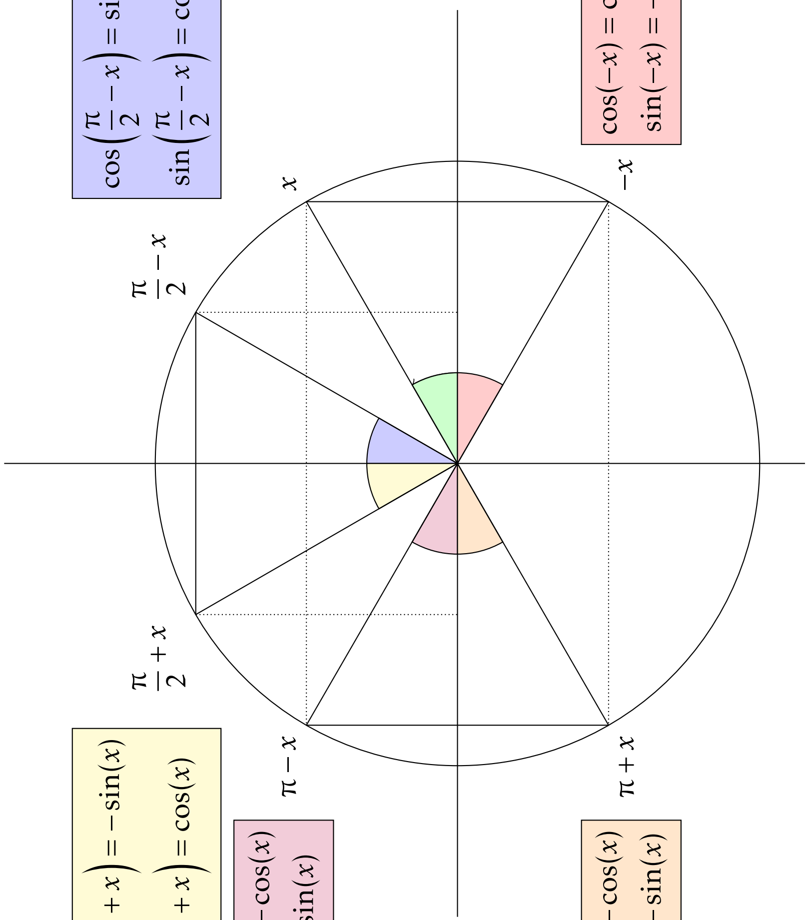
a) $\cos(a-b)$
b) $\sin(a-b)$
c) $\cos(2a)$
d) $\sin(2a)$.

1.4.5– Résumé des formules à savoir

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi-x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi-x) = \sin(x)$$



$$\cos(\pi+x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi+x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

2 Le corps des nombres complexes

2.1) Définition et calculs

Pour résoudre $n+1=0$ il a fallu sortir de $\mathbb{N}$ et aller dans $\mathbb{Z}$, pour résoudre $2n=1$ il a fallu sortir de $\mathbb{Z}$ et aller dans $\mathbb{Q}$, pour résoudre $x^2=2$ il a fallu sortir de $\mathbb{Q}$ et aller dans $\mathbb{R}$ [e]. De même, on ne sait pas résoudre $x^2=-1$ dans $\mathbb{R}$ et il nous faut quitter $\mathbb{R}$. On va passer dans $\mathbb{R}^2$ où l'on va apprendre à ajouter et multiplier les points. On appellera corps des nombres complexes l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces opérations.

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est déterminé [f] par

1. la représentation de ses éléments : un nombre complexe est un élément qui s'écrit sous la forme (a,b) où a et b sont des réels ;
2. l'égalité des ses éléments : deux nombres complexes (a,b) et (a',b') sont égaux si et seulement si $a=a'$ et $b=b'$;
3. deux opérations : une addition et une multiplication.

Définition 19 (addition)– *Si (a,b) et (c,d) sont deux nombres complexes, leur somme est définie comme étant le nombre complexe*

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d).$$

Définition 20 (produit)– *Si (a,b) et (c,d) sont deux nombres complexes, leur produit est défini comme étant le nombre complexe*

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Exercice 21– Soit a,b et a' des réels.

1) Calculer $(a,0)+(a',0)$ et $(a,0)(a',0)$.
2) Calculer $(a',0)(a,b)$.
3) Calculer $(a,0)+(0,b)$.
4) Calculer $(0,1)(b,0)$.
5) Calculer $(0,1)(0,1)$.

Les résultats de l'exercice impliquent les remarques suivantes. On identifie $(a,0)$ avec le réel a, de sorte que $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. On note i le nombre complexe $(0,1)$. Ainsi, le nombre (a,b) est bien la somme de a avec le produit de i par b. On notera donc désormais $a+ib$ au lieu de (a,b). Par ailleurs, on note $a-ib=a+i(-b)$. Il faut remarquer que les opérations sur $\mathbb{C}$ sont définies pour que les calculs se fassent avec les mêmes réflexes que dans $\mathbb{R}$ en ajoutant uniquement la nouvelle règle $i^2=-1$.

---

e. La démonstration de la non rationalité de $\sqrt{2}$ sera faite au prochain semestre.

f. Voir l'annexe C.

Les réels a et b de l'écriture $z = a + ib$ s'appellent respectivement la partie réelle de z, notée $\Re(z)$ et la partie imaginaire de z, notée $\Im(z)$. Cette écriture de z s'appelle sa *représentation algébrique*. Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle s'appelle un *imaginaire pur*.

Nous listons maintenant les règles de calculs dans $\mathbb{C}$. Elles impliquent que $\mathbb{C}$ est un corps.

- L'addition est associative
$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'').$$
- L'addition admet un élément neutre, à savoir $0 = 0 + i0$:
$$z + 0 = 0 + z = z.$$
- Tout nombre complexe admet un symétrique pour l'addition : le symétrique pour l'addition de $z = \Re(z) + i\Im(z)$, noté $-z$ est
$$-z = -\Re(z) + -i\Im(z).$$
On a $z + (-z) = -z + z = 0$. Par ailleurs, on note $z - z'$ le nombre complexe $z + (-z')$, somme de z et du symétrique pour l'addition de z'. Le symétrique pour l'addition d'un nombre complexe est aussi appelé son opposé.
- L'addition est commutative
$$z + z' = z' + z.$$
- La multiplication est associative
$$(zz')z'' = z(z'z'').$$
- La multiplication admet un élément neutre, à savoir 1 :
$$1z = z1 = z.$$
- Tout nombre complexe différent de 0 admet un symétrique pour la multiplication. Si $z = x + iy$ avec x et y réels alors ce symétrique est
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$
Le symétrique pour la multiplication d'un nombre complexe est aussi appelé son inverse.
- La multiplication est commutative
$$zz' = z'z.$$
- La multiplication est distributive sur l'addition
$$(z + z')z'' = zz'' + z'z''.$$

➦ Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors
$$\lambda z = \lambda \mathfrak{Re}(z) + i\lambda \mathfrak{Im}(z).$$

Remarque 22– L'ensemble des nombres complexes non nuls est noté $\mathbb{C}^*$ ou $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{C} - \{0\}$.

Exercice 23– Si $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, montrer que $x^2 + y^2 > 0$. En déduire que $x^2 + y^2 = 0$ si et seulement si $x = y = 0$. Vérifier alors que
$$(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 1.$$

Dès lors qu'on sait multiplier, on sait prendre les puissances. Si $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit la puissance n^{e} de z par récurrence en posant
$$z^n = \begin{cases} z & \text{si } n = 1 \\ zz^{n-1} & \text{si } n > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Autrement dit,
$$z^n = \underbrace{z \cdots z}_{\substack{n \text{ répétitions de } z \\ \text{dont on fait le produit}}}.$$

Si de plus $z \neq 0$, on pose $z^0 = 1$ et
$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}. \tag{2}$$

On a donc $z^n z^{-n} = 1$.

Proposition 24– *Soit z un nombre complexe et m et n des entiers relatifs. On suppose $z \neq 0$ si m ou n est négatif ou nul. Alors*

1) $z^m z^n = z^{m+n}$,

2) $(z^m)^n = z^{mn}$.

Démonstration. Si $z = 0$ et si m et n sont strictement positifs, les égalités sont $0 = 0$ et sont donc vraie. Il reste à démontrer les égalités lorsque $z \neq 0$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{E}(m,n)$ la propriété « pour tout complexe z non nul, $z^m z^n = z^{m+n}$ ». Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{E}(n)$ la propriété « pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la propriété $\mathrm{E}(m,n)$ est vraie ».

   a) Montrons par récurrence que $\mathrm{E}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
   Pour tout $z \neq 0$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, on a $z^0 = 1$ et $z^{m+0} = z^m$. Ainsi, $z^{m+0} = z^m z^0$. La propriété $\mathrm{E}(0)$ est donc vraie.
   Montrons aussi la propriété $\mathrm{E}(1)$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \in \mathbb{N}$, on a $z^{m+1} = z^m z$ par définition (voir (1)). Si $m < 0$. On écrit $m = -q$ avec $q \geq 1$. Comme $q - 1 \geq 0$, on a $z^{q-1}z = z^q$ et donc
$$z^{m+1}z^q = \frac{z^q}{z^{q-1}} = \frac{z^{q-1}z}{z^{q-1}} = z.$$

Ainsi $z^{m+1} = zz^{-q} = z^m z$. La propriété E(1) est vraie.

Soit $n \geq 0$ tel que la propriété E(n) est vraie. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$. On a $z^{m+n+1} = z^{(m+1)+n}$. La propriété E($m+1, n$), conséquence de E(n), implique $z^{(m+1)+n} = z^{m+1}z^n$. Par E(1), on a $z^{m+1} = z^m z$ donc $z^{(m+1)+n} = z^m z z^n$. Enfin, toujours par E(1), on a $z^{n+1} = z^n z = zz^n$ et donc $z^{(m+1)+n} = z^m z^{n+1}$. La propriété E($n+1$) est vraie.

La propriété E(0) est vraie. Pour tout $n \geq 0$, si E(n) est vraie, alors E($n+1$) est vraie. Par récurrence, on en déduit que pour tout entier $n \geq 0$, la propriété E(n) est vraie.

b) Montrons ensuite que E(n) est vraie pour tout $n \leq -1$. Si $n \leq -1$ alors $n = -q$ avec $q \geq 1$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$. On a $z^{m+n}z^q = z^{m+n+q}$ grâce à E($m+n, q$) qui est vraie car E(q) l'est ($q \geq 1$). On a donc ($z^{m+n}z^q = z^m$. Puisque z^{-q} est l'inverse de z^q, on en déduit $z^{m+n} = z^m z^{-q}$ c'est-à-dire $z^{m+n} = z^m z^n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on note P(m, n) la propriété « pour tout complexe z non nul, $(z^m)^n = z^{mn}$ ». Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note P(n) la propriété « pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la propriété P(m, n) est vraie ».

a) Montrons par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \geq 0$.

Pour tout $z \neq 0$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, on a $(z^m)^0 = 1$. De plus $z^{m\cdot 0} = z^0 = 1$ donc $(z^m)^0 = z^{m\cdot 0}$ et P(0) est vraie.

Soit $n \geq 0$ tel que la propriété P(n) est vraie. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$. On a $(z^m)^{n+1} = (z^m)^n z^m$ grâce à 1). Grâce à P(n), on a $(z^m)^n = z^{mn}$ et donc $(z^m)^{n+1} = z^{mn}z^m$. Enfin, appliquant de nouveau 1), on a $z^{mn}z^m = z^{mn+n}$ et donc $(z^m)^{n+1} = z^{m(n+1)}$. La propriété P($n+1$) est vraie.

La propriété P(0) est vraie. Pour tout $n \geq 0$, si P(n) est vraie, alors P($n+1$) est vraie. Par récurrence, on en déduit que pour tout entier $n \geq 0$, la propriété P(n) est vraie.

b) Montrons enfin que P(n) est vraie pour tout entier $n < 0$. Soit $n > 0$. On écrit $n = -q$ qvec $q \geq 1$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$. On a

$$(z^m)^{-q} = \frac{1}{(z^m)^q}.$$

Puisque $q > 0$, la relation P(q) est vraie et donc

$$\frac{1}{(z^m)^q} = \frac{1}{z^{mq}} = z^{-mq} = z^{mn}.$$

Ainsi, P(n) est vraie.

□

Si $n \geq 1$, la définition (2) indiquait que z^{-n} est l'inverse de z^n. La proposition 24 implique que, quelque soit le signe de n, on a $z^n z^{-n} == z^{n-n} = 1$. L'égalité (2) est donc

vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs, la proposition 24 implique $(z^{-1})^n = z^{-n}$. Autrement dit, on a
$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

En développant $(u+v)^2 = (u+v)(u+v)$ vous montrerez que $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$. On veux généraliser cette propriété en développant $(u+v)^n$. Pour cela, on a besoin d'introduire les coefficients binomiaux. On rappelle que $0! = 1$ et que pour $a \geq 1$ entier, on définit $a!$ par récurrence en posant

$$a! = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ (a-1)!a & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

En d'autres termes $a!$ est le produit de tous les entiers de 1 à a si $a \geq 1$.

Définition 25– *Si k et n sont des entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini par*
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

La formule suivante permet de dessiner le *triangle de Pascal* (*c.f.* les figures 2 et 3).

***Proposition* 26–** *Si $0 < k < n$ alors*
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Démonstration. Par définition,
$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

En utilisant les égalités $(n-k)! = (n-k-1)!(n-k)$ et $k! = (k-1)!k$ on réduit au même dénominateur
$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!}$$

puis, en utilisant $(n-1)!n = n!$ on trouve
$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

□

***Corollaire* 27–** *Si $0 \leq k \leq n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.*

Démonstration. On appelle $\mathcal{P}(n)$ la propriété « pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$ le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est un entier naturel ». La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $\binom{0}{0} = 1$. Soit $n \geq 0$. Supposons vraie la propriété $\mathcal{P}(n)$. Si $k = 0$ ou $k = n+1$ alors $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ est entier. Supposons alors $0 < k < n+1$, d'après la proposition 26 on a

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

et puisque $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on en déduit que $\binom{n+1}{k}$ est la somme de deux entiers naturels de sorte que c'est un entier naturel. Pour tout entier $n \geq 0$, nous avons montré que si l'énoncé $\mathcal{P}(n)$ est vrai, alors l'énoncé $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai. Nous avons de plus montré que l'énoncé $\mathcal{P}(0)$ est vrai. Le principe de récurrence permet de conclure que l'énoncé $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geq 1$. ☐

La proposition 26 permet de donner une représentation graphique des coefficients binomiaux et de les calculer facilement. On place n sur un axe vertical et k sur un axe horizontal. On place $\binom{n}{k}$ à l'intersection de la ligne correspondant à n avec la colonne correspondant à k. Les égalités $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ indiquent que la première colonne et la diagonale sont formées de 1. La proposition 26 indique que les coefficients qui ne sont ni sur la première colonne ni sur la diagonale s'obtiennent par ajout du coefficient à l'intersection de la ligne précédente et de la même colonne avec le coefficient à l'intersection de la ligne précedente et de la colonne précédente (voir figures 2 et 3).

Exercice 28– Montrer que $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

***Proposition* 29** (Formule du binôme de Newton)– *Si u et v sont complexes, si $n \geq 1$ est entier naturel alors*

$$\begin{aligned}(u+v)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} u^j v^{n-j} \\ &= \binom{n}{0} v^n + \binom{n}{1} v^{n-1} u + \binom{n}{2} v^{n-2} u^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} v u^{n-1} + \binom{n}{n} u^n.\end{aligned}$$

Remarque 30– Dans la formule de Newton, on fait la convention $0^0 = 1$. C'est nécessaire pour appliquer la formule lorsque $v = 0$.

Démonstration. Soit u et v deux nombres complexes. On raisonne par récurrence en appelant $\mathrm{H}(n)$ l'égalité

$$(u+v)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} u^j v^{n-j}.$$

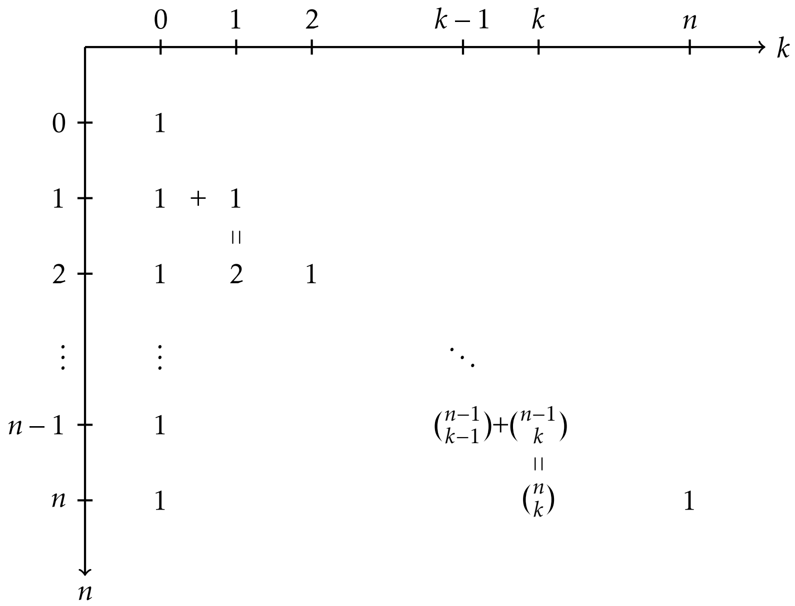


Figure 2 – Construction du triangle de Pascal

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	1	1										
2	1	2	1									
3	1	3	3	1								
4	1	4	6	4	1							
5	1	5	10	10	5	1						
6	1	6	15	20	15	6	1					
7	1	7	21	35	35	21	7	1				
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Figure 3 – Triangle de Pascal

Pour $n = 1$ on a $(u+v)^1 = u+v$ et

$$\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}u^j v^{1-j} = \binom{1}{0}v + \binom{1}{1}u = u+v$$

donc H(1) est vraie. Soit alors $n \geq 1$ tel que l'égalité H(n) est vraie. Alors

$$\begin{aligned}
(u+v)^{n+1} &= (u+v)^n(u+v)\\
&= \left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}u^j v^{n-j}\right)(u+v)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}u^{j+1}v^{n-j} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}u^j v^{n-j+1}\\
&= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}u^j v^{n-j+1} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}u^j v^{n-j+1}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}u^j v^{n-j+1} &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}u^j v^{n-j+1} + \binom{n}{n}u^{n+1}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}u^j v^{n-j+1} + u^{n+1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}u^j v^{n-j+1} &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}u^j v^{n-j+1} + \binom{n}{0}v^{n+1}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}u^j v^{n-j+1} + v^{n+1}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
(u+v)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right)u^j v^{n-j+1} + u^{n+1} + v^{n+1}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}u^j v^{n+1-j} + u^{n+1} + v^{n+1}
\end{aligned}$$

d'après la proposition 26. Puisque

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}u^j v^{n+1-j} = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}u^j v^{n+1-j} - v^{n+1} - u^{n+1}$$

on obtient

$$(u+v)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} u^j v^{n+1-j}$$

et donc $H(n+1)$ est vraie. Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons montré que si l'égalité $H(n)$ est vraie, alors l'égalité $H(n+1)$ est vraie. Nous avons de plus montré que l'égalité $H(1)$ est vraie. Le principe de récurrence permet de conclure que l'égalité $H(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. □

On donne maintenant une méthode pratique de calcul de l'inverse d'un nombre complexe. Si z et z' sont deux nombres complexes, on vérifie que

$$(z+z')(z-z') = z^2 - z'^2.$$

En appliquant cette égalité à $z = a$ et $z' = ib$ pour deux réels a et b, on trouve

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2.$$

En particulier, ce produit est un nombre réel et il n'est nul que si $a = b = 0$ (voir l'exercice 23).

Définition 31– *Si $z = a + ib$ avec a et b réels, le nombre complexe $a - ib$ s'appelle le* conjugué *de z. On note*

$$\overline{z} = a - ib.$$

Définition 32– *Si $z = a + ib$ avec a et b réels, le nombre réel $\sqrt{a^2+b^2}$ s'appelle le* module *de z. On note*

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Exercice 33– Montrer que si z est un nombre réel, son module et sa valeur absolue coïncident.

On a donc montré la proposition suivante.

***Proposition* 34–** *Si $z \in \mathbb{C}$ alors*

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Cette proposition implique que l'inverse de $z \neq 0$ est

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Si $z = x + iy$, on retrouve bien

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

On établit quelques propriétés de la conjuguaison.

***Proposition* 35–**
- ➡ $\overline{\overline{z}} = z$.
- ➡ $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$.
- ➡ $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$.
- ➡ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ *(si $z \neq 0$)*
- ➡ *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\overline{z}^n = \overline{z^n}$ (si $z \neq 0$ lorsque $n < 0$).*
- ➡ $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$ *et* $z - \overline{z} = 2i\mathfrak{Im}(z)$.

Remarque 36– Il résulte du point 35) que si λ est réel et si z est complexe alors$\overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}$.

Démonstration de la proposition 35. 1. Si $z = x + iy$ avec x et y réels alors $\overline{z} = x - iy$ et donc $\overline{\overline{z}} = x + iy$.

2. Si $z_1 = x + iy$ et $z_2 = a + ib$ avec x, y, a, b réels alors

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = x - iy + a - ib = (x + a) - i(y + b) = \overline{(x + a) + i(y + b)} = \overline{z_1 + z_2}.$$

3. Si $z_1 = x + iy$ et $z_2 = a + ib$ avec x, y, a, b réels alors

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x - iy)(a - ib) = xa - yb - i(ya + xb)$$

et

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x + iy)(a + ib)} = \overline{xa - yb + i(ya + xb)} = xa - yb - i(ya + xb)$$

d'où l'égalité cherchée.

4. En choisissant $z_1 = z$ et $z_2 = 1/z$ dans l'égalité précédente, on trouve

$$\overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{1} = 1$$

d'où

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

5. On note E(n) l'égalité $\overline{z}^n = \overline{z^n}$. L'égalité E(1) est vraie. Soit $n \geq 1$. Supposons E(n) vraie. L'égalité $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ avec les choix $z_1 = z^n$ et $z_2 = z$ donne alors

$$\overline{z^n} \cdot \overline{z} = \overline{z^{n+1}}.$$

Par ailleurs, E(n) implique

$$\overline{z^n} \cdot \overline{z} = \overline{z}^n \cdot \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$$

de sorte que E(n) implique E($n + 1$). Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons montré que si l'énoncé E(n) est vrai, alors l'énoncé E($n + 1$) est vrai. Nous avons de plus montré que l'énoncé E(1) est vrai. Le principe de récurrence permet de conclure que l'énoncé E(n) est vrai pour tout $n \geq 1$. L'égalité $\overline{z}^n = \overline{z^n}$ est donc vraie pour tout $n \geq 1$. Appliquant cette égalité à $1/z$ on a alors

$$\left(\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}\right)^n = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)^n}$$

puis

$$\frac{1}{\overline{z}^n} = \overline{z^{-n}}$$

et donc

$$\overline{z}^{-n} = \overline{z^{-n}}.$$

L'égalité $\overline{z}^n = \overline{z^n}$ est donc vraie pour tout $n \leq -1$. Enfin elle est vraie pour $n = 0$.

6. On a $z + \overline{z} = \mathfrak{Re}(z) + i\,\mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z) = 2\mathfrak{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = \mathfrak{Re}(z) + i\,\mathfrak{Im}(z) - \mathfrak{Re}(z) + i\,\mathfrak{Im}(z) = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$.

□

2.2) Module d'un nombre complexe

On a donné une définition algébrique du module d'un nombre complexe z en posant $|z| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}$. Avant d'en étudier les propriétés, on donne une interprétation géométrique du module.

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels peut être représenté par un unique point du plan de coordonnées (a, b) et à tout point du plan de coordonnées (a, b) on peut associer un unique nombre complexe, à savoir $z = a + ib$. Le plan est donc une représentation géométrique de l'ensemble $\mathbb{C}$ (voir figure 4). Le nombre complexe z associé à un point A du plan s'appelle l'*affixe* du point A. Le point A s'appelle le *point image* de z. Le théorème de Pythagore implique

$$\mathrm{OA}^2 = \mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2 = |z|^2.$$

On obtient le résultat suivant.

***Proposition* 37–** *Le module $|z|$ de z est la longueur du segment reliant* O *au point image de z.*

Les propriétés du module sur $\mathbb{C}$ sont semblables aux propriétés de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

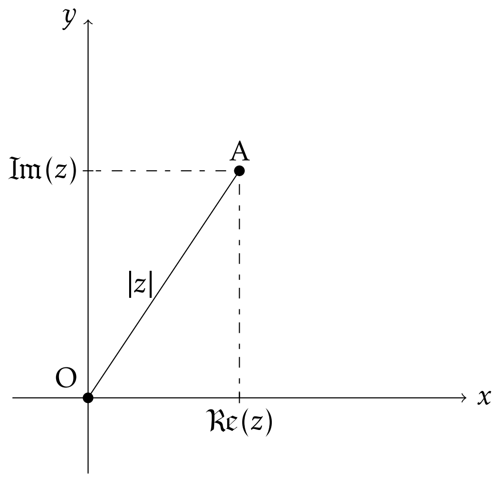


Figure 4 – Représentation géométrique de $\mathbb{C}$

***Proposition* 38** (Propriétés du module)– *Soit z et z' deux nombres complexes.*

- $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$ *et* $|\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$.
- $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$.
- $|-z| = |z|$.
- $|\overline{z}| = |z|$.
- $|zz'| = |z| \cdot |z'|$.
- $\dfrac{1}{|z|} = \left|\dfrac{1}{z}\right|$ *(si $z \neq 0$).*
- $|z^n| = |z|^n \quad$ *($n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$ si $n < 0$).*
- *Inégalité triangulaire :* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

Démonstration. 1) On a $|z| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}$ et $\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2 \geq \mathfrak{Re}(z)^2$ donc $|z| \geq |\mathfrak{Re}(z)|$. De même, $\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2 \geq \mathfrak{Im}(z)^2$ donc $|z| \geq |\mathfrak{Im}(z)|$.

2) a) Si $|z| = 0$ alors $\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2 = 0$. On a $\mathfrak{Re}(z)^2 \geq 0$ et $\mathfrak{Im}(z)^2 \geq 0$, si l'un des deux termes $\mathfrak{Re}(z)^2$ ou $\mathfrak{Im}(z)^2$ est strictement positif alors $|z| > 0$ donc $\mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Im}(z) = 0$ et $z = 0$.

b) Si $z = 0$ alors $\mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Im}(z) = 0$ donc $|z| = 0$.

3) De $-z = -\mathfrak{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z)$ on tire

$$|-z| = \sqrt{(-\mathfrak{Re}(z))^2 + (-\mathfrak{Im}(z))^2} = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2} = |z|.$$

4) De $\overline{z} = \mathfrak{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z)$ on tire

$$|\overline{z}| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + (-\mathfrak{Im}(z))^2} = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2} = |z|.$$

5) On a $|zz'| = \sqrt{zz' \cdot \overline{zz'}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = |z| \cdot |z'|$.

6) En prenant $z' = 1/z$ dans le point précédent, on obtient

$$|z| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| = \left|z \cdot \frac{1}{z}\right| = 1$$

et donc

$$\frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z}\right|.$$

7) On a

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'}) = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z' + |z'|^2.$$

Or,

$$z\overline{z'} + \overline{z}z' = z\overline{z'} + \overline{\overline{z\overline{z'}}} = 2\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) \leq 2\left|z\overline{z'}\right| = 2|z| \cdot |z'|.$$

On a donc

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z| \cdot |z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$$

puis

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|.$$

8) Par un calcul similaire au précédent, on a

$$|z-z'|^2 = |z|^2 - \left(z\overline{z'} + \overline{z}z'\right) + |z'|^2 = |z|^2 - 2\mathfrak{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2.$$

Or, $\mathfrak{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leq |z\overline{z'}| = |z||z'|$ donc

$$|z-z'|^2 \geq (|z| - |z'|)^2.$$

On termine en prenant la racine carrée de cette égalité.

□

Remarque 39– Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, a', b, b' des nombres réels. On note A le point image de z et A′ le point image de z'. Alors $|z - z'|$ est la longueur du segment [A, A′] (voir la figure 5). En effet le théorème de Pythagore implique

$$\mathrm{AA'} = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2} = \sqrt{\mathfrak{Re}(z'-z)^2 + \mathfrak{Im}(z'-z)^2} = |z'-z|.$$

L'inégalité triangulaire a donc pour interprétation géométrique (voir figure 6) le fait que la longueur d'un côté quelconque d'un triangle est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés (« le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite »).

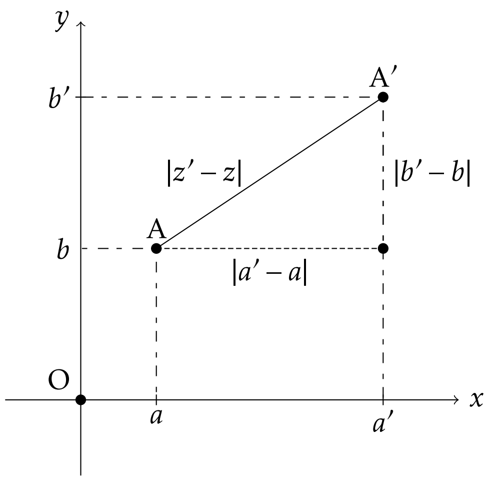


FIGURE 5 – Interprétation géométrique de $|z'-z|$.

2.3) Argument d'un nombre complexe

2.3.1– Argument d'un nombre complexe de module 1

Soit z un nombre complexe de module 1. Il est l'affixe d'un point A du cercle de centre O et de rayon 1. Notons θ une mesure de l'angle entre la demi-droite orientée $[Ox)$ et la demi-droite orientée $[OA)$ (voir la figure 7). Par définition des fonctions sinus et cosinus on a alors

$$\mathfrak{Re}(z) = \cos\theta \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(z) = \sin\theta.$$

Définition 40– *Soit z un nombre complexe de module* 1. *On appelle* argument *tout réel θ tel que*

$$\mathfrak{Re}(z) = \cos\theta \quad \textit{et} \quad \mathfrak{Im}(z) = \sin\theta.$$

Exercice 41– Donner le module et un argument de 1 puis de -1.

Il est important de remarquer qu'un nombre complexe de module 1 admet plusieurs arguments mais que si θ et θ' sont arguments d'un même nombre complexe de module 1 alors il existe un entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$.

Une formule importante, due à de Moivre, permet d'élever à toute puissance les nombres complexes de module 1.

***Théorème* 42** (Formule de De Moivre)– *Soit $n \in \mathbb{Z}$ alors*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Démonstration. Pour $n = 0$, le résultat provient de $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$ et $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$. On raisonne ensuite par récurrence sur $n \geq 1$. Soit $\mathcal{M}(n)$ la propriété « pour

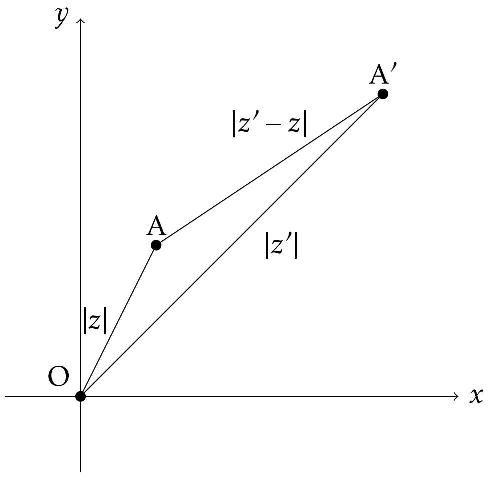


Figure 6 – Interprétation géométrique de $|z'-z| \leq |z'|+|z|$.

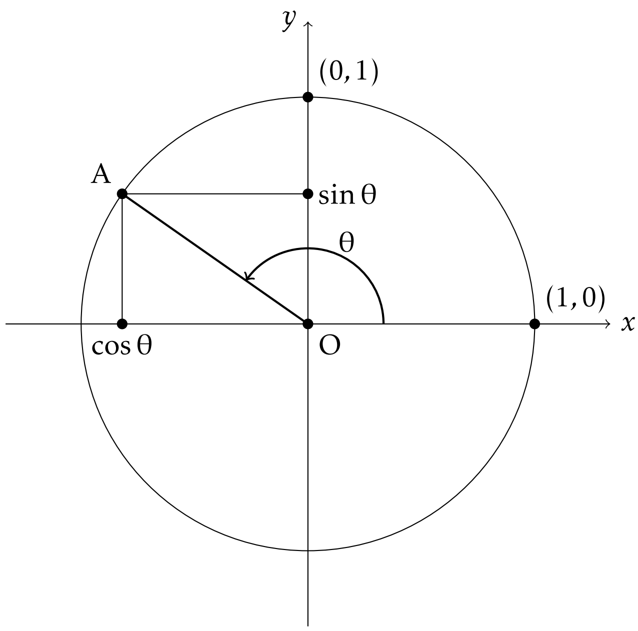


Figure 7 – Argument d'un nombre complexe de module 1.

tout réel θ on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ ». On a vu que $\mathcal{M}(0)$ est vraie. Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{M}(n)$ est vraie. On a alors

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))(\cos\theta + i\sin\theta).\end{aligned}$$

En développant le produit, on obtient

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = (\cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta) + i(\cos(n\theta)\sin\theta + \sin(n\theta)\cos\theta).$$

Les formules d'addition donnent

$$\cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta = \cos(n\theta + \theta) \quad \text{et} \quad \cos(n\theta)\sin\theta + \sin(n\theta)\cos\theta = \sin(n\theta + \theta)$$

de sorte que

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = \cos((n+1)\theta)) + i\sin((n+1)\theta).$$

La propriété $\mathcal{M}(n+1)$ donc vraie. On a montré que $\mathcal{M}(0)$ est vraie puis que, pour tout $n \geq 0$, si $\mathcal{M}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{M}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, la formule de De Moivre est donc vraie pour tout $n \geq 0$. Il reste à la démontrer pour les entiers strictement négatifs. Si n est un entier négatif, on écrit $n = -m$ avec $m \in \mathbb{N}$. On a donc

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\right)^m.$$

Mais, $\cos\theta + i\sin\theta$ étant de module 1, on a

$$\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta).$$

Ainsi,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^m.$$

La formule de De Moivre, déjà démontrée pour les exposants positifs, peut-être appliquée au membre de droite, elle donne

$$(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^m = \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta) = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

et donc

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Ceci achève notre démonstration. □

2.3.2– Argument d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul et λ un réel positif. Si A est le point d'affixe z, ses coordonnées sont $(x, y) = (\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z))$. Puisque $\lambda z = \lambda\mathfrak{Re}(z) + i\lambda\mathfrak{Im}(z)$, les coordonnées du point B d'affixe λz sont $(\lambda x, \lambda y)$. Ainsi $\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA}$ et l'angle entre la demi-droite orientée $[Ox)$ et la demi-droite orientée $[OB)$ est le même que l'angle entre la demi-droite orientée $[Ox)$ et la demi-droite orientée $[OA)$. On est donc amené à appeler argument de z tout argument du nombre complexe $z/|z|$ de module 1 (voir la figure 8).

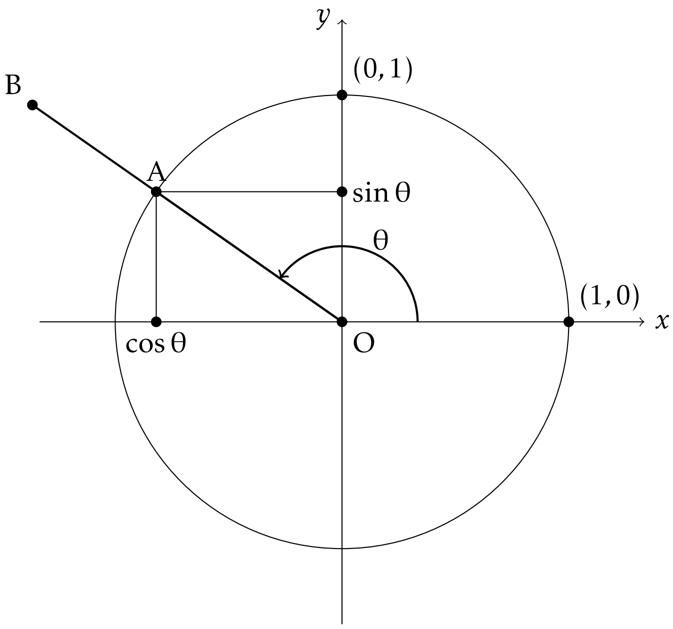


Figure 8 – Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 43– *Si z est un nombre complexe non nul, on appelle* argument *de z tout argument du nombre complexe $z/|z|$ de module* 1.

Exercice 44– Si x est un nombre réel non nul, donner le module et un argument de x (on distinguera les cas suivant le signe de x).

L'introduction de cette partie 2.3.2 montre la proposition suivante qui donne une interprétation géométrique de l'argument.

***Proposition* 45–** *Si z est un nombre complexe non nul, ses arguments sont des mesures de l'angle entre la demi-droite orientée* $[\mathrm{O}x)$ *et la demi-droite orientée* $[\mathrm{OA})$ *où* A *admet z pour affixe.*

Si θ est un argument de z, on a donc $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cette représentation de z s'appelle sa *représentation trigonométrique*. Elle indique qu'un nombre complexe est déterminé de façon univoque par la donnée d'une longueur et d'un angle [g].

Il est important de remarquer qu'un nombre complexe non nul n'admet pas un argument unique. On a en revanche la propriété suivante reliant les arguments d'un même nombre complexe.

***Proposition* 46–** *Si θ et θ' sont arguments d'un même nombre complexe non nul alors il existe un entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$.*

g. Lorsqu'on détermine un point par ses coordonnées dans un repère, on parle de *coordonnées cartésiennes* ; si on le détermine par la longueur et un angle, on parle de ses *coordonnées polaires*.

Démonstration. Si $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|(\cos\theta' + i\sin\theta')$ alors, $|z|$ étant non nul, on a $\cos\theta = \cos\theta'$ et $\sin\theta = \sin\theta'$ ce qui implique le résultat. □

Au lieu de dire « il existe un entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$ », on dit « les deux réeels θ et θ' sont congrus modulo 2π » et on écrit $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$. On note alors $\arg(z)$ un argument de z, sans préciser lequel.

***Proposition* 47–** *Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.*

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$;
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$;
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$;
- $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z) \pmod{2\pi}$;
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \pmod{2\pi}$ *($n \in \mathbb{Z}$).*

Démonstration. 1) On pose $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$. On a alors

$$\begin{aligned}
zz' &= |z||z'|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\
&= |zz'|\left((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right) \\
&= |zz'|\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right).
\end{aligned}$$

Un argument de zz' est $\theta + \theta'$, c'est-à-dire la somme d'un argument de z et d'un argument de z'.

2) Puisque $1 \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\arg(1) \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Le choix de $z' = 1/z$ dans l'égalité $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$ conduit alors à $\arg(z) + \arg(1/z) \equiv 0 \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire $\arg(1/z) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$.

3) Le choix de $z' = \overline{z}$ dans l'égalité $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$ conduit à $\arg\left(|z|^2\right) \equiv \arg(z) + \arg(\overline{z}) \pmod{2\pi}$. Puisque $|z|^2 \in \mathbb{R}^{+*}$, on en déduit $0 \equiv \arg(z) + \arg(\overline{z}) \pmod{2\pi}$ puis le résultat.

4) Cette égalité est conséquence de la première appliquée à $1/z$ au lieu de z et de la deuxième.

5) Appelons $\mathcal{A}(n)$ l'hypothèse « pour tout nombre complexe non nul z, on a $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \pmod{2\pi}$ ». L'hypothèse $\mathcal{A}(0)$ est vraie puisque $\arg(1) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose vraie l'hypothèse $\mathcal{A}(n)$. En utilisant la première égalité avec $z' = z^n$ on trouve $\arg(z^{n+1}) \equiv \arg(z^n) + \arg(z) \pmod{2\pi}$. L'hypothèse de récurrence conduit alors à $\arg(z^{n+1}) \equiv n\arg(z) + \arg(z) \pmod{2\pi}$ c'est-à-dire à $\arg(z^{n+1}) \equiv (n+1)\arg(z) \pmod{2\pi}$ qui est $\mathcal{A}(n+1)$. Par récurrence, l'égalité $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \pmod{2\pi}$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$. Montrons la pour $n < 0$. Si $n < 0$, on écrit $n = -m$ avec $m > 0$ et on a

$$\arg(z^n) \equiv \arg\left(\left(\frac{1}{z}\right)^m\right) \equiv m\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -m\arg(z) \pmod{2\pi}.$$

□

Les propriétés d'additivité de l'argument nous amènent à prolonger la fonction exponentielle aux nombres imaginaires purs.

Définition 48– *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

On écrit aussi $e^{\theta i}$.

De la même façon qu'on a démontré la proposition 47, on montre la proposition suivante.

***Proposition* 49–** *Soit θ et θ' deux nombres réels.*

- ➡ $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$;
- ➡ $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
- ➡ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
- ➡ $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n \ (n \in \mathbb{Z})$;
- ➡ $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ *si et seulement si* $\theta' \equiv \theta \pmod{2\pi}$.

Exercice 50– Démontrer la proposition 49.

En sommant et soustrayant les deux égalités

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

on obtient le résultat suivant.

***Théorème* 51** (Formules d'Euler)–

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{aligned}$$

Remarque 52– Vous verrez plus tard dans vos études que l'on peut définir l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ par approximations successives (techniquement, une série) indépendamment des fonctions cosinus et sinus. Les formules d'Euler servent alors à définir les fonctions cosinus et sinus.

Soit z un nombre complexe non nul. Si θ est un argument de z, l'extension de l'exponentielle permet alors d'écrire, la représentation

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Cette représentation s'appelle la *représentation exponentielle* de z. Puisque $|z|$ est un réel strictement positif, il existe un réel a tel que $|z| = e^a$. On a alors $z = e^a e^{ib}$. On utilise cette formule pour étendre l'exponentielle à $\mathbb{C}$ par la définition suivante.

Définition 53– *Si a et b sont deux nombres réels, alors*

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Exercice 54– Si z et z' sont deux nombres complexes, démontrer les égalité suivantes.

a) $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$

b) $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$

c) $(e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z})$.

2.4) Racines de l'unité

Si $n \geq 2$, on appelle racine n^{e} de l'unité [h] les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$. Par exemple, i est une racine quatrième de l'unité.

Si $z^n = 1$, alors $|z|^n = 1$ et, puisque $|z|$ est un réel positif, on en tire $|z| = 1$. Il existe donc un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. De $z^n = 1$ on déduit alors $e^{in\theta} = 1$ et donc il existe un entier relatif k tel que $n\theta = 2k\pi$. Alors, $\theta = 2k\pi/n$. Les racines n^{es} de l'unité sont donc toutes de la forme $e^{2ik\pi/n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $z = e^{2ik\pi/n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $z^n = e^{2ik\pi} = 1$ et z est une racine n^{e} de l'unité. L'ensemble des racines n^{es} de l'unité est donc exactement l'ensemble des nombres $e^{2ik\pi/n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Montrons qu'il n'y a parmi les racines trouvées précédemment qu'un nombre fini de racines non redondantes. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On pose

$$p = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \quad \text{et} \quad r = k - pn.$$

Par définition de la partie entière,

$$p \leq \frac{k}{n} < p + 1 \quad \text{donc} \quad pn \leq k < pn + n.$$

On en déduit $0 \leq r < n$. Mais,

$$e^{2ik\pi/n} = e^{2i(pn+r)\pi/n} = e^{2ip\pi} e^{2ir\pi/n} = e^{2ir\pi/n}.$$

L'ensemble des racines n^{es} de l'unité est donc exactement l'ensemble des nombres $e^{2ir\pi/n}$ avec $r \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Montrons enfin que dans le dernier ensemble de solutions trouvées, il n'y a plus de redondances. Si r et r' sont deux entiers de $\{0, \ldots, n-1\}$ tels que $e^{2ir\pi/n} = e^{2ir'\pi/n}$ alors $e^{2i(r-r')\pi/n} = 1$. On en déduit l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2(r-r')\pi/n = 2k\pi$, soit encore $r - r' = kn$. Mais $0 \leq r \leq n-1$ et $-(n-1) \leq -r' \leq 0$ donc $|r - r'| \leq n - 1$. Puisque $|r - r'| = |k|n$, on en tire

$$|k| \leq 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Puisque $|k|$ est un entier positif il ne peut donc qu'être nul de sorte que $k = 0$ et $r = r'$.

h. Pour $n = 2$, on parle de racine *carrée*. Pour $n = 3$, on parle de racine *cubique*.

***Théorème* 55** (Racines n^{es} de l'unité)– *Soit $n \geq 2$ un entier. L'ensemble des racines n^{es} de l'unité est l'ensemble des n nombres complexes distincts*

$$e^{2ik\pi/n} \quad \textit{avec} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Remarque 56– Si on note $\xi_n = e^{2i\pi/n}$, l'ensemble des racines n^{es} de l'unité est l'ensemble $\{1, \xi_n, \xi_n^2, \xi_n^3, \dots, \xi_n^{n-1}\}$.

Exemple 57– Si $n = 3$ les trois racines cubiques de l'unité sont

$$1, \quad \xi_3 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \xi_3^2 = e^{4i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et on note traditionnellement $j = \xi_3$. Noter que $1 + j + j^2 = 0$.

La connaissance des racines de l'unité permet de résoudre, quelque soit le nombre complexe $\mathcal{Z}$ fixé et quelque soit l'entier $n \geq 1$ fixé, l'équation

$$z^n = \mathcal{Z}.$$

Rappelons que si $n \geq 1$ est entier et si x est un réel positif, il existe un unique réel positif t tel que $x = t^n$. Ce réel t s'appelle la *racine n^e* de x. On le note $\sqrt[n]{x}$. Puisque $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = t$ si et seulement si $t = (x^m)^n$ et $\sqrt[mn]{x} = u$ si et seulement si $u = x^{mn}$, il résulte de $(x^m)^n = x^{mn}$ que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

pour tout $x > 0$. Il est fondamental de réserver la notation $\sqrt[n]{x}$ au seul cas où x est un réel positif.

Soit $\mathcal{Z}$ un complexe non nul. On écrit $\mathcal{Z} = |\mathcal{Z}|e^{i\varphi}$ sa représentation exponentielle. On a alors

$$\mathcal{Z} = \left(\sqrt[n]{|\mathcal{Z}|}e^{i\varphi/n}\right)^n.$$

L'équation $z^n = \mathcal{Z}$ a donc même ensemble de solutions que l'équation

$$\left(\frac{z}{\sqrt[n]{|\mathcal{Z}|}e^{i\varphi/n}}\right)^n = 1.$$

D'après la description de l'ensemble des racines n^{es} de l'unité, l'ensemble des solutions de cette dernière équation est l'ensemble des nombres complexes z vérifiant

$$\frac{z}{\sqrt[n]{|\mathcal{Z}|}e^{i\varphi/n}} = e^{2ir\pi/n}$$

avec $r \in \{0, \dots, n-1\}$. On déduit de ces considérations le corollaire suivant.

***Corollaire* 58–** *Soit $\mathcal{Z}$ un complexe non nul. On écrit $\mathcal{Z} = |\mathcal{Z}|e^{i\varphi}$ sa représentation exponentielle. L'ensemble des solutions de l'équation $z^n = \mathcal{Z}$ est l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent*

$$\sqrt[n]{|\mathcal{Z}|}e^{i(2\pi r+\varphi)/n}$$

avec $r \in \{0, \dots, n-1\}$.

Remarque 59– La résolution de $z^n = \mathcal{Z}$ consiste à trouver une solution particulière, obtenue par la connaissance du module et d'un argument de $\mathcal{Z}$, et à résoudre l'équation générale $u^n = 1$. Cette méthode est assez générale en mathématiques. Vous l'avez par exemple rencontrée dans la résolution d'équations différentielles avec second membre.

2.5) Trinôme du second degré dans le corps des complexes

2.5.1– Racines carrées d'un nombre complexe

Le corollaire 58 indique que les racines carrées d'un nombre complexe non nul $z = |z|e^{i\theta}$ sont

$$\sqrt{|z|}e^{i\theta/2} \quad \text{et} \quad \sqrt{|z|}e^{i(\theta+2\pi)/2} = -\sqrt{|z|}e^{i\theta/2}.$$

Remarque 60– Il faut prendre garde au fait que dans $\mathbb{R}$, *la* racine carrée d'un nombre réel positif x est l'unique réel positif dont x est la racine carrée. Dans $\mathbb{C}$, il n'y a aucun moyen de distinguer *a priori* les deux nombres complexes dont le carré est un nombre complexe donné. On ne peut donc pas parler de la racine carrée mais *des* racines carrées d'un nombre complexe.

Il n'est pas toujours possible de donner explicitement la valeur de l'argument d'un nombre complexe non nul. On montre donc comment trouver les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On cherche $u = a + ib$ tel que $u^2 = z$. Si u est solution, on a donc $a^2 - b^2 + 2iab = x + iy$ soit, en identifiant parties réelles et imaginaires

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= x \\ 2ab &= y. \end{aligned}$$

La résolution de ce système n'est pas immédiate (mais posssible tout de même). On pense donc à comparer les normes : $|u|^2 = |z|$ on déduit $a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si u est solution, on a donc

$$a^2 - b^2 = x \tag{3}$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4}$$

$$2ab = y. \tag{5}$$

En sommant puis soustrayant les équations (3) et (4) on tire

$$a^2 = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad \text{et} \quad b^2 = \frac{1}{2}\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Ces égalités fixent les réels a et b au signe près. Mais l'équation (5) indique que le produit ab a même signe que y. On en déduit la description suivante des éventuelles solutions u. Si $y \geq 0$, et si u est solution alors

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

ou

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Si $y < 0$, et si u est solution alors

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

ou

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice 61– On a déterminé a et b en supposant u solution. Vérifier que les valeurs trouvées impliquent effectivement que $(a+ib)^2 = x+iy$.

Exemple 62– Soit

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\pi/6}.$$

Ses racines carrées sont $e^{i\pi/12}$ et $-e^{i\pi/12}$. En utilisant la méthode précédente, on trouve que les représentations algébriques des racines carrées de z sont

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Par ailleurs

$$e^{i\pi/12} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

et $\pi/12$ étant dans l'intervalle $[0, \pi/2]$, ses cosinus et sinus sont positifs. On en déduit

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

La discussion et l'exercice 61 impliquent le résultat suivant.

***Théorème* 63–** *Soit $x+iy$ un nombre complexe. On pose*

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} \quad \textit{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Les racines carrées de $x+iy$ sont de la formes $a+ib$ avec

1) si $y \geq 0$:

$$a = \omega_1 \quad \textit{et} \quad b = \omega_2$$

ou

$$a = -\omega_1 \quad \textit{et} \quad b = -\omega_2;$$

2) si $y < 0$:

$$a = \omega_1 \quad \textit{et} \quad b = -\omega_2$$

ou

$$a = -\omega_1 \quad \textit{et} \quad b = \omega_2.$$

Remarque 64– Il n'est pas nécessaire de retenir les formules du théorème 63. La méthode générale à retenir est que l'on tire a^2 et b^2 de l'égalisation des parties réelles et des normes et que les signes de a et b sont déterminés par l'égalisation des parties imaginaires.

Exercice 65– Montrer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}.$$

2.5.2– Trinôme du second degré

Si a, b et c sont trois nombres complexes, avec $a \neq 0$, on veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Pour cela on écrit

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right)$$

puis

$$z^2 + \frac{b}{a}z = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

On a donc

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Considérons alors δ *une* racine carrée de $b^2 - 4ac$ (n'importe laquelle). Alors

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = \left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right).$$

On a donc

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)$$

et $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si

$$z = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b+\delta}{2a}.$$

***Théorème* 66–** *Soit a, b et c sont trois nombres complexes, avec $a \neq 0$. Les solutions complexes de $az^2 + bz + c = 0$ sont*

$$z = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \textit{et} \quad z = \frac{-b+\delta}{2a}$$

où δ est n'importe laquelle des racines carrées de $b^2 - 4ac$.

Remarque 67– Le nombre $b^2 - 4ac$ s'appelle le *discriminant* de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Notons

$$z^- = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z^+ = \frac{-b+\delta}{2a}.$$

On a la factorisation $az^2 + bz + c = a(z - z^+)(z - z^-)$. Or $z^+ = z^-$ si et seulement si $\delta = 0$. Dans ce cas on a une seule racine. Comme $az^2 + bz + c = a(z - z^+)^2$, cette racine est dite *double*. Si $\delta \neq 0$, on a $z^+ \neq z^-$ et on obtient deux racines distinctes qu'on qualifie de *simples*. En développant $a(z - z^+)(z - z^-)$ on voit que $-a(z^+ + z^-) = b$ et que $az^+z^- = c$. On en déduit le corollaire suivant.

***Corollaire* 68–** *Soit a, b et c sont trois nombres complexes, avec $a \neq 0$. Si S est la somme des racines de $az^2 + bz + c = 0$ et si P est le produit de ces racines alors*

$$\mathrm{S} = -\frac{b}{a} \quad \textit{et} \quad \mathrm{P} = \frac{c}{a}.$$

Autrement dit,

$$az^2 + bz + c = a(z^2 - \mathrm{S}z + \mathrm{P}).$$

Exemple 69– Considérons l'équation $z^2 - (1 + 7i)z + 7i = 0$. Il est immédiat que $z = 1$ est une solution. De plus, le produit des racines est $7i$ donc la seconde racine est $7i$.

2.6) Nombres complexes et trigonométrie

2.6.1– Calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

La méthode repose sur la formule de De Moivre, la formule de binôme de Newton et la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Nous traitons deux exemples. Pour le cas général [i], le lecteur est invité à lire l'annexe D.

Commençons par étudier le cas $n = 2$. La formule de De Moivre implique

$$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos(2x) + i\sin(2x).$$

Par ailleurs, la formule du binôme de Newton conduit à

$$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos^2(x) + 2i\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux expressions précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x). \end{aligned}$$

En utilisant la relation $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, on peut réécrire la formule de duplication $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ sous les deux formes suivantes :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x).$$

Étudions maintenant le cas $n = 3$. La formule de De Moivre implique

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos(3x) + i\sin(3x).$$

Par ailleurs, la formule du binôme de Newton conduit à

$$\begin{aligned} (\cos x + i\sin x)^3 &= \cos^3(x) + 3\cos^2(x)i\sin(x) + 3\cos(x)\,(i\sin(x))^2 + (i\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i\Big(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\Big). \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux expressions précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\ \sin(3x) &= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x). \end{aligned}$$

En utilisant la relation $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, on obtient les formules simplifiées suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\ \sin(3x) &= -4\sin^3(x) + 3\sin(x). \end{aligned}$$

i. Le cas général n'est pas au programme.

Exercice 70– Montrer les formules

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1\\ \sin(4x) &= 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)\\ &= 8\sin(x)\cos^3(x) - 4\sin(x)\cos(x).\end{aligned}$$

2.6.2– Linéarisation des formules trigonométriques

Là encore, nous ne traîtons pas le cas général [j] qui est reporté en annexe E. L'objectif est d'exprimer $\cos(x)^n$ et $\sin(x)^n$ comme somme d'élements de la forme $a_j\cos(jx)$ et $b_j\sin(jx)$. Le calcul repose entièrement sur les formules d'Euler et du binôme de Newton.

a) Commençons par linéariser $\cos^2(x)$. En utilisant la formule d'Euler, on a

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{ix}+e^{-ix})^2.$$

La formule du binôme de Newton conduit alors à

$$\cos^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+\frac{1}{2}.$$

Une nouvelle utilisation de la formule d'Euler fournit

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(2x)+1\right).$$

b) On linéarise ensuite $\sin^2(x)$. En utilisant la formule d'Euler, on a

$$\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{ix}-e^{-ix})^2.$$

La formule du binôme de Newton conduit alors à

$$\sin^2(x) = -\frac{1}{4}\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right) = -\frac{1}{4}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+\frac{1}{2}.$$

Une nouvelle utilisation de la formule d'Euler fournit

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right).$$

c) On linéarise $\cos^3(x)$. En utilisant la formule d'Euler, on a

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{ix}+e^{-ix})^3.$$

j. La cas général n'est pas au programme.

La formule du binôme de Newton conduit alors à

$$\cos^3(x) = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right) = \frac{1}{8}\left(\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right).$$

Une nouvelle utilisation de la formule d'Euler fournit

$$\cos^3(x) = \frac{1}{8}\left(2\cos(3x) + 6\cos(x)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos(3x) + 3\cos(x)\right).$$

d) On linéarise $\sin^3(x)$. En utilisant la formule d'Euler, on a

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{ix} - e^{-ix})^3.$$

La formule du binôme de Newton conduit alors à

$$\sin^3(x) = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) = -\frac{1}{8i}\left(\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right).$$

Une nouvelle utilisation de la formule d'Euler fournit

$$\sin^3(x) = -\frac{1}{8i}\left(2i\sin(3x) - 6i\sin(x)\right) = \frac{1}{4}\left(3\sin(x) - \sin(3x)\right).$$

e) Enfin, on linéarise un produit de puissances, à savoir $\cos^2(x)\sin^3(x)$. Les formules d'Euler conduisent à

$$\cos^2(x)\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3.$$

La formule du binôme de Newton conduit à

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin^3(x) &= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) \\
&= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{5ix} - e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}\right) \\
&= -\frac{1}{2^5 i}\left(\left(e^{5ix} - e^{-5ix}\right) - \left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) - 2\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right).
\end{aligned}$$

La formule d'Euler fournit alors

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin^3(x) &= -\frac{1}{2^5 i}\left(2i\sin(5x) - 2i\sin(3x) - 4i\sin(x)\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(2\sin(x) + \sin(3x) - \sin(5x)\right).
\end{aligned}$$

3 Exercices

1) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

3) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a

$$\sum_{j=0}^{n} j(j^3+1) = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 + 15n^2 + 14n}{30}$$

4) Si a est un réel positif, montrer que pout tout n entier naturel on a

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

5) Déterminer l'ensemble des réels solutions du système d'inéquations

$$\begin{cases} (x+1)(x-2)(2x-5) < 0 \\ (3-x)(4x^2+7x) \geq 0. \end{cases}$$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation

$$-5 \leq \frac{-x+1}{x-4} \leq 7.$$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5} \leq \frac{60}{x^2-25}.$$

8) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2}{x^2+4x+3}\geq\frac{3}{x^2+5x+6}.$$

9) Déterminer les ensembles de réels tels que

a) $|4x+1|\leq|2x+7|$,

b) $|3x+7|\leq|3-3x|$,

c) $|x-3|+|x+5|\leq a$.

10) On définit $\tan(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

a) Quel est l'ensemble $\mathcal{D}$ des valeurs de x pour lesquelles on peut définir $\tan(x)$?

b) Si a et b sont dans $\mathcal{D}$ et si $a+b$ est aussi dans $\mathcal{D}$, montrer que

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

c) Soit x tel que $\dfrac{x}{2}\in\mathcal{D}$. On pose $t=\tan\dfrac{x}{2}$. Montrer que

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad\text{et}\quad\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}.$$

11)

a) À l'aide des formules d'addition, calculer $\cos(a+b)+\cos(a-b)$.

b) En déduire

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

pour tous réels p et q.

c) Montrer

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

pour tous réels p et q.

d) Montrer

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\quad\text{et}\quad\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

pour tous réels p et q.

12) Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $(1+i)^2$, $(4-5i)^2$, $(2-7i)(8+3i)$.

b) $\dfrac{1}{6+7i}$, $\dfrac{1}{4-3i}$.

c) $\dfrac{1+3i}{3-i}$, $\dfrac{2-i}{5+3i}$.

d) $\dfrac{1+3i}{1-6i}+\dfrac{1-3i}{1+3i}$.

13) On pose $Z=\dfrac{2z+1}{iz+4}$ pour tout nombre complexe z. Déterminer l'équation reliant $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ garantissant

a) $\mathfrak{Re}(Z)=0$

b) $\mathfrak{Im}(Z)=0$.

14) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ aient même module.

15) Montrer l'égalité

$$|a+b|^2+|a-b|^2=2\left(|a|^2+|b|^2\right).$$

pour tous nombres complexes a et b.

16) Pour tout nombre complexe z, montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathfrak{Re}\,z|+|\mathfrak{Im}\,z|)\leq|z|\leq|\mathfrak{Re}\,z|+|\mathfrak{Im}\,z|.$$

17) On fixe u un nombre complexe tel que $\mathfrak{Im}\,u>0$.

a) Si $z\in\mathbb{C}$ vérifie $|z|<1$, montrer que

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{-\overline{u}z+u}{-z+1}\right)>0.$$

b) Soit $v\in\mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Im}\,v>0$. Montrer qu'il existe $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$ et

$$\frac{-\overline{u}z+u}{-z+1}=v.$$

18) Mettre les nombres suivants sous forme trigonométrique.

a) $-7+7i$, $2\sqrt{3}-2i$, $-27+13i$.

b) $\dfrac{-5+15i\sqrt{3}}{10+2i\sqrt{3}}$, $\dfrac{7\sqrt{3}+7i}{6-6i}$.

c) $e^{i\theta}+e^{i\varphi}$ où θ et φ sont des réels de $[0,2\pi[$.

19) Déterminer le module et l'argument de

$$\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1+i}.$$

En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

20) Soit n un entier et $Z_n = (1+i)^n + (1-i)^n$.

a) Montrer que Z_n est réel.

b) Quel est le module de Z_n.

c) Quel est l'argument de Z_n lorsque n est de la forme

i) $n = 4a$

ii) $n = 4a+1$

iii) $n = 4a+2$

iv) $n = 4a+3$

avec $a \in \mathbb{Z}$.

21) Décrire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant

a) $\arg(z^7) = \pi \pmod{2\pi}$

b) $\arg(z+i) = \arg(z) + \arg(i) \pmod{2\pi}$.

22) Soit x un réel différent de $2k\pi$ pour tout entier k. Si $n \geq 1$ est entier, on pose

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sin(jx).$$

a) Montrer par récurrence que

$$S_n = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2} \cdot \sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

b) Démontrer ce résultat en considérant la somme

$$\sum_{j=1}^{n} e^{ijx}.$$

23)

a) Pour tout nombre complexe z, montrer l'inégalité

$$|z| \leq \left|\frac{1+z}{2}\right|^2.$$

b) En déduire que pour tous nombres complexes a et b, on a

$$|ab| \leq \left|\frac{a+b}{2}\right|^2.$$

24)

a) Donner les représentations exponentielles des solutions de $z^8 = -1 - i\sqrt{3}$.

b) Donner l'expression algébrique des racines huitièmes de l'unité.

c) Déduire des questions précédentes une expression de $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.

d) Calculer $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

25) Soit j une racine cubique de l'unité différente de 1.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\frac{\overline{z} - j^2}{z - j} = -1 + i.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\frac{\overline{z} - j^2}{z - j} = z.$$

26) Soit α un réel de $]-\pi/2, \pi/2[$ et $n \geq 1$ un entier. Résoudre l'équation

$$(1 + iz)^n(1 - i\tan\alpha) = (1 - iz)^n(1 + i\tan\alpha).$$

27) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a) $3z^2 + 2z + 4 = 0$

b) $(1 - i)z^2 - (5 - 3i)z + 10 = 0$

c) $(1 - i)z^4 - (5 - 3i)z^2 + 10 = 0$

d) $z^2 + 2(1 - i)z - 2i = 0$.

28) Soit θ un réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 2(1 - \cos\theta)z + 2(1 - \cos\theta) = 0.$$

On donnera les solutions sous forme trigonométrique.

29) Déterminer les solutions réelles de $z^4 + 3iz^2 + (5 - 6i)z - 26 = 0$.

30) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - |z| - 1 = 0$.

31) On note $\xi = e^{2i\pi/5}$.

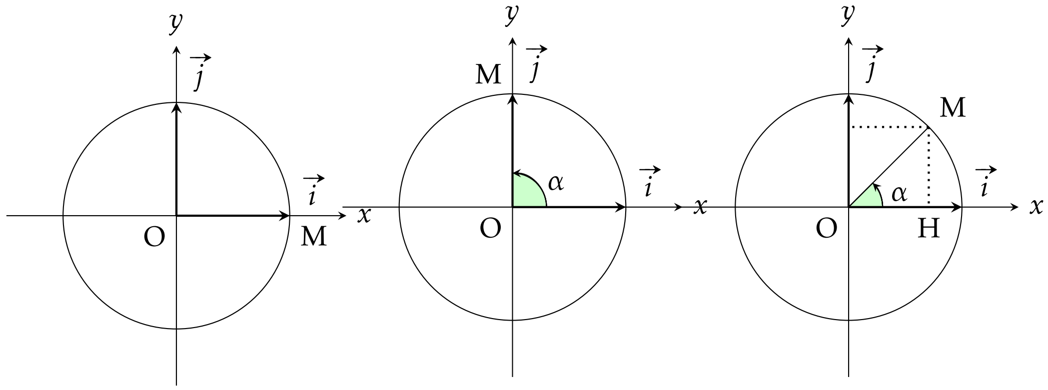
a) Que valent $\xi + \xi^4$ et $\xi^2 + \xi^3$?

b) En déduire que $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

c) Donner la valeur de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

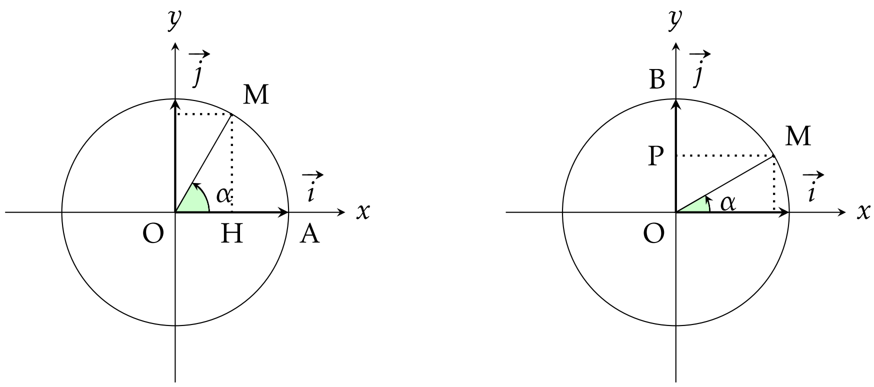
A Rappel : lettres grecques utilisées en mathématiques

nom	minuscule	majuscule
alpha	α	
beta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ε	
zéta	ζ	
éta	η	
theta	θ	Θ
kappa	κ	
lambda	λ	Λ
mu	μ	
nu	ν	
xi	ξ	Ξ
pi	π	Π
rho	ρ	
sigma	σ	Σ
tau	τ	
upsilon	υ	Υ
phi	ϕ ou φ	Φ
chi	χ	
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω



(a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ (c) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Figure 9 – Valeurs de références



(a) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ (b) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

Figure 10 – Valeurs de références (suite)

B Complément : démonstrations des énoncés trigonométriques

L'objet de cette partie est de démontrer les formules données dans la partie 1.4.

B.1) Valeurs en des angles de références du premier quadrant

On note α l'angle déterminé par la demi-droite Ox et la demi-droite d'origine O passant par un point M de cercle trigonométrique (voir la figure 1). Enfin, on note H le projeté orthogonal de M sur Ox, c'est donc le point de coordonnées $(\cos\alpha, 0)$.

Si $\alpha = 0$, reportez-vous à la figure 9a. Le point M est sur la demi-droite Ox. Il en résulte que $\overrightarrow{OM} = \vec{i}$ puis que

$$\boxed{\cos 0 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin 0 = 0.}$$

Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, reportez-vous à la figure 9b. Le point M est sur la demi-droite Oy. Il en résulte que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{j}$ puis que

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{2} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\frac{\pi}{2} = 1.}$$

Si $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, reportez-vous à la figure 9c. Puisque la somme des angles du triangle OMH est π, l'angle déterminé par la demi-droite d'origine M passant par O et la demi-droite d'origine M passant par H vaut aussi $\dfrac{\pi}{4}$. Les longueurs OH et HM sont donc égales et $\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4}$. Puisque par ailleurs ces quantités sont positives et vérifient

$$\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = 1$$

on en déduit $\sin^2\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$ puis

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

Si $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, reportez-vous à la figure 10a. On note A le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{i}$. Puisque les longueurs OM et OA sont toutes deux égales à 1, le triangle MOA est isocèle en O. L'angle déterminé par la demi-droite d'origine M passant par O et la demi-droite d'origine M passant par A est donc égale à l'angle déterminé par la demi-droite d'origine A passant par M et la demi-droite d'origine A passant par O. La somme des angles du triangle MOA, étant π, cet angle est $\dfrac{\pi}{3}$. Le triangle MOA est donc équilatérale. La relation de Pythagore dans les triangles OHM et AHM conduit à

$$\mathrm{MH}^2 + \mathrm{OH}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{MH}^2 + \mathrm{HA}^2 = 1.$$

En soustrayant ces deux relations, on trouve OH = HA et donc

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.}$$

Enfin, grâce à la relation $\cos^2\dfrac{\pi}{3} + \sin^2\dfrac{\pi}{3} = 1$, on obtient

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Si $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, reportez-vous à la figure 10b. On note B le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{j}$ et P le projeté orthogonal de M sur la droite Oy. L'angle orienté déterminé par la demi-droite

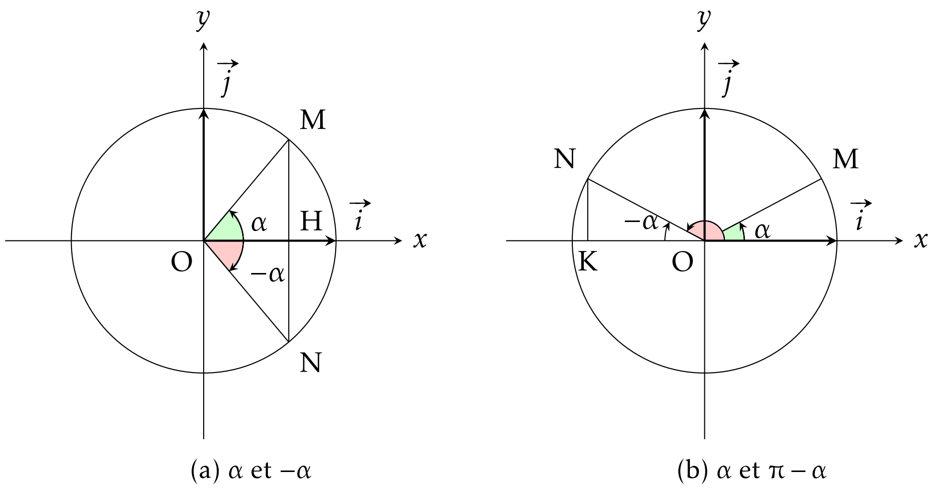


Figure 11

d'origine O passant par M et la demi-droite d'origine O passant par B est $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. Le même raisonnement que celui fait lorsque $\alpha=\frac{\pi}{3}$ conduit alors à

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.}$$

Exercice 71– Écrire les détails de la démonstration des valeurs de $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$.

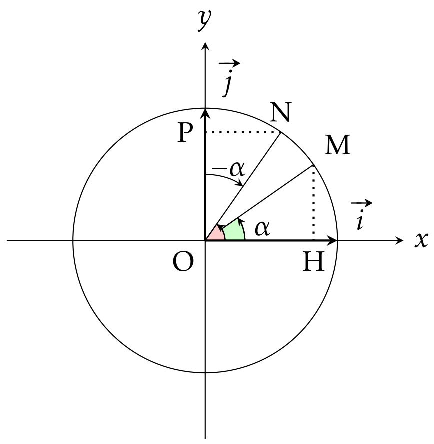
B.2) Extensions aux autres quadrants

On compare les cosinus et sinus de α et $-\alpha$. Dans un premier temps, on suppose que α n'est pas de la forme $k\pi$ ou $k\frac{\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Reportez-vous à la figure 11a. On note N le point du cercle trigonométrique tel que la droite Ox fait un angle orienté de $-\alpha$ avec la demi-droite d'origine O passsant par N. Enfin, on note H le point d'intersection de Ox et MN. La demi-droite Ox fait avec la demi-droite d'origine 0 passant par M le même angle que la demi-droite d'origine O passant par N avec Ox, la droite OH est donc bissectrice en O du triangle MON. De plus, le triangle MON est isocèle en O. Cette bissectrice est alors aussi la hauteur issue de O et MN est orthogonale à Ox. Il en sort que la longueur OH est à la fois $\cos\alpha$ et $\cos(-\alpha)$. On a donc

$$\boxed{\cos(-\alpha)=\cos\alpha.}$$

Puisque OH est aussi la médiatrice du segment [MN] les longueurs HM et HN sont égales d'où

$$\boxed{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.}$$



(a) α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Figure 12

Exercice 72– Montrer que si α est de la forme $k\pi$ ou $k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$.

On compare les cosinus et sinus de α et $\pi - \alpha$. Dans un premier temps, on suppose que α appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Reportez-vous à la figure 11b. On note N le point du cercle trigonométrique tel que la droite Ox fait un angle orienté de $\pi - \alpha$ avec la demi-droite d'origine O passsant par N. On note K le projeté orthogonal du point N sur la droite Ox. L'angle formé par la demi-droite d'origine O passant par K et la demi-droite d'origine O passant par N étant $-\alpha$, l'abscisse de K, et donc de N est $-\cos\alpha$. De même, la longueur KN est $\sin\alpha$ donc l'ordonnée de N est $\sin\alpha$. Puisque les coordonnées de N sont $(\cos(\pi - \alpha), \sin(\pi - \alpha))$, on en déduit

$$\boxed{\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.}$$

Exercice 73– Compléter la preuve des formules pour α et $\pi - \alpha$ aux angles appartenant à $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

En écrivant $\pi + \alpha = \pi - (-\alpha)$, les formules précédentes conduisent à

$$\boxed{\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha.}$$

On compare les cosinus et sinus de α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Reportez-vous à la figure 12a. On note N le point du cercle trigonométrique tel que la droite Ox fait un angle orienté de $\frac{\pi}{2} - \alpha$ avec la demi-droite d'origine O passsant par N. On note H le projeté orthogonal de M sur la droite Ox et P le projeté orthogonal de N sur la droite Oy. L'angle formé par la demi droite Ox et la demi-droite de centre O passant par N est $-\alpha$. La longueur

OP est donc $\cos\alpha$. Puisque c'est aussi $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, on a

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.}$$

En évaluant cette formule en $\frac{\pi}{2}-\alpha$ au lieu de α, on trouve

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.}$$

Enfin, en évaluant ces formules en $-\alpha$ au lieu de α, on obtient

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.}$$

B.2.1– Fomules d'addition

Dans cette partie, on donne une preuve de la formule d'addition (voir la figure 13).

On fixe une base orthonormale directe $(\vec{i},\vec{j})$ puis on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de normes 1 tels que l'angle formé par $\vec{i}$ et $\vec{u}$ est a et l'angle formé par $\vec{i}$ et $\vec{v}$ est b. Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $(\cos(a),\sin(a))$ et celles de $\vec{v}$ sont donc $(\cos(b),\sin(b))$. On en déduit que leur produit scalaire [k] est

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b).$$

Par ailleurs l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $b-a$ et ces vecteurs sont de norme 1, leur produit scalaire est donc

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos(b-a)=\cos(a-b).$$

En comparant les deux formules obtenues pour le produit scalaire on obtient

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b).$$

La formule pour $\cos(a+b)$ s'obtient alors en remplaçant b par $-b$. La formule pour $\sin(a+b)$ s'obtient en remplaçant a par $\pi/2-a$ puis la formule pour $\sin(a-b)$ se déduit de celle pour $\sin(a+b)$ en remplaçant b par $-b$.

k. Voir le cours de Mathématiques pour tous.

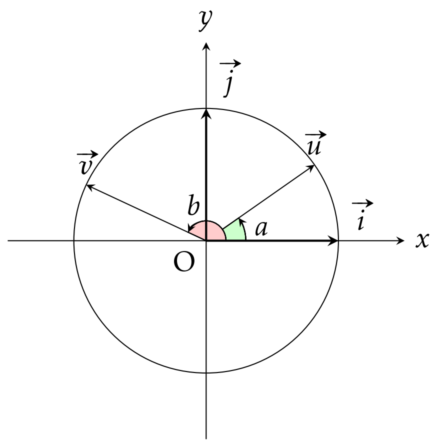


Figure 13 – Formule d'addition

C Complément : construction du corps des nombres complexes

On considère l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. On munit cet ensemble de deux opérations : une *addition* définie par

$$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$$

et une *multiplication* définie par

$$(x,y)(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx').$$

1) Vérifier les propriétés suivantes de l'addition.

a) *L'associativité* :

$$((x,y)+(x',y'))+(x'',y'') = (x,y)+((x',y')+(x'',y'')).$$

b) L'existence d'un *élément neutre* à savoir $(0,0)$:

$$(x,y)+(0,0) = (0,0)+(x,y) = (x,y).$$

c) L'existence d'un *symétrique,* à savoir $(-x,-y)$:

$$(x,y)+(-x,-y) = (-x,-y)+(x,y) = (0,0).$$

On note $-(x,y)$ le symétrique (qu'on appelle *opposé*) de (x,y) de sorte que $-(x,y) = (-x,-y)$.

d) La *commutativité* :

$$(x,y)+(x',y') = (x',y')+(x,y).$$

2) Vérifier les propriétés suivantes de la multiplication.

a) L'*associativité* :

$$((x,y)(x',y'))(x'',y'') = (x,y)((x',y')(x'',y'')).$$

b) L'existence d'un *élément neutre* à savoir $(1,0)$:

$$(x,y)(1,0) = (1,0)(x,y) = (x,y).$$

c) L'existence d'un *symétrique* pour tout élément *non nul* : si (x,y) n'est pas $(0,0)$ alors,

$$(x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)(x,y) = (1,0)$$

et le symétrique (qu'on appelle *inverse*) de (x,y) est donc $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

d) La *commutativité* :

$$(x,y)(x',y') = (x',y')(x,y).$$

3) Vérifier que la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition :

$$(x,y)((x',y')+(x'',y'')) = (x,y)(x',y')+(x,y)(x'',y'')$$

et

$$((x,y)+(x',y'))(x'',y'') = (x,y)(x'',y'')+(x',y')(x'',y'').$$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de cette addition et de cette multiplication est donc un *corps* que l'on note $\mathbb{C}$. On appelle *nombre complexe* tout élément de $\mathbb{C}$. On note $i = (0,1)$.

4) Montrer que $i^2 = -1$.

5) On note $\widetilde{\mathbb{R}}$ l'ensemble des éléments

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \{(x,0) \in \mathbb{C}\}.$$

a) Montrer que si deux nombres complexes sont dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, leur somme est dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.

b) Montrer que si deux nombres complexes sont dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, leur produit est dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.

c) Montrer que si un nombre complexe est dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ et différent de $(0,0)$, son inverse est dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.

d) En déduire que $\widetilde{\mathbb{R}}$ muni des mêmes opérations que $\mathbb{C}$ est un corps. On dit que $\widetilde{\mathbb{R}}$ est un *sous-corps* de $\mathbb{C}$.

6) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ définie par $f(x) = (x,0)$.

a) Montrer que f est bijective, c'est-à-dire que pour tout nombre complexe z appartenant à $\widetilde{\mathbb{R}}$, il existe un unique nombre réel x tel que $z = f(x)$.

b) Montrer que l'image pour l'élément neutre de $\mathbb{R}$ est l'élément neutre de $\widetilde{\mathbb{R}}$.

c) Montrer que $f(x+x') = f(x)+f(x')$.

d) Montrer que $f(xx') = f(x)f(x')$.

On dit que f est un isomorphisme de corps de $\mathbb{R}$ sur $\widetilde{\mathbb{R}}$ et que $\widetilde{\mathbb{R}}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$. Cette bijection permet d'identifier les nombres réels avec les nombres complexes de $\widetilde{\mathbb{R}}$ et le fait que ce soit un isomorphisme montre que les opérations se correspondent. En particulier, on a $(x,y) = (x,0)+(0,1)(y,0)$ ce qui se réécrit $(x,y) = f(x)+if(y)$. En utilisant l'identification on écrit plutôt $(x,y) = x+iy$.

D Complément : calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

La formule de De Moivre donne

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx).$$

D'autre part, la formule du binôme de Newton appliquée au membre de gauche conduit à

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cos(x)^{n-j} (i\sin(x))^j.$$

Or i^j est réel si et seulement si j est pair, il est égal à $\pm i$ sinon. Ainsi

$$\begin{aligned}(\cos(x) + i\sin(x))^n = &\sum_{\substack{j=0\\ j \text{ pair}}}^{n} (-1)^{j/2} \binom{n}{j} \cos(x)^{n-j}\sin(x)^j \\ &+ i \sum_{\substack{j=0\\ j \text{ impair}}}^{n} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n}{j} \cos(x)^{n-j}\sin(x)^j.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \sum_{\substack{j=0\\ j \text{ pair}}}^{n} (-1)^{j/2} \binom{n}{j} \cos(x)^{n-j}\sin(x)^j \\ &= \cos(x)^n - \binom{n}{2}\cos(x)^{n-2}\sin(x)^2 + \binom{n}{4}\cos(x)^{n-4}\sin(x)^4 - \binom{n}{6}\cos(x)^{n-6}\sin(x)^6 + \cdots\end{aligned}$$

Puisque $\sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2$, toutes les expressions $\sin(x)^{2j}$ valent $\left(1-\cos(x)^2\right)^j$ et s'expriment donc, grâce à la formule du binôme de Newton à l'aide de puissance de $\cos(x)$. Ainsi, $\cos(nx)$ s'expriment comme somme de termes de la forme $a_j \cos(x)^j$ avec a_j entier et j prenant des valeurs comprises entre 0 et n. On exprime ce résultat de la façon suivante.

> Il existe un polynôme de degré n à coefficients entiers T_n tel que pour tout réel x on a $\cos(nx) = \mathrm{T}_n(\cos(x))$.

Ce polynôme [l] T_n s'appelle le *polynôme de Tchebychef de première espèce* de degré n.

l. Un polynôme est une fonction de la forme $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Si $a_n \neq 0$, l'entier n s'appelle le degré de ce polynôme.

De même

$$\sin(nx) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ impair}}}^{n} (-1)^{(j+1)/2} \binom{n}{j} \cos(x)^{n-j} \sin(x)^j$$
$$= \binom{n}{1}\cos(x)^{n-1}\sin(x) - \binom{n}{3}\cos(x)^{n-3}\sin(x)^3 + \binom{n}{5}\cos(x)^{n-5}\sin(x)^5 - \cdots$$

Chaque terme $\sin(x)^{2j+1}$ s'écrit $\sin(x)\left(1-\cos(x)^2\right)^j$. Il en résulte que $\sin(nx)$ s'écrit comme le produit de $\sin(x)$ avec une somme de termes de la forme $b_j\cos(x)^j$ avec b_j entier et j prenant des valeurs comprises entre 0 et $n-1$. On exprime ce résultat de la façon suivante.

Il existe un polynôme de degré n à coefficients entiers U_n tel que pour tout réel x on a $\sin(nx) = \sin(x)\mathrm{U}_{n-1}(\cos(x))$.

Ce polynôme U_n s'appelle le *polynôme de Tchebychef de seconde espèce* de degré n.

Exercice 74– 1) Calculer $\mathrm{T}_0, \mathrm{U}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{U}_1$.

2) Si n est pair, montrer que les polynômes T_n et U_n sont pairs. Si n est impair, montrer qu'ils sont impairs.
3) En développant $\cos((n+1)x)$ et $\cos((n-1)x)$ montrer que pour tout $n \geq 0$ on a
$$\mathrm{T}_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X}) - \mathrm{T}_n(\mathrm{X}).$$
4) Montrer que $\sin((n+3)x) + \sin((n+1)x) = 2\cos(x)\sin((n+2)x)$ et en déduire
$$\mathrm{U}_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathrm{U}_{n+1}(\mathrm{X}) - \mathrm{U}_n(\mathrm{X}).$$
5) Montrer qu'il existe pour tout entier impair n un polynôme V_n de degré n à coefficients entiers tel que $\sin(nx) = \mathrm{V}_n(\sin(x))$.
6) On suppose n impair. En considérant $\sin((n+5)x) + \sin((n+1)x)$, établir que
$$\mathrm{V}_{n+5}(\mathrm{X}) = 2(1-2\mathrm{X}^2)\mathrm{V}_{n+3}(\mathrm{X}) - \mathrm{V}_{n+1}(\mathrm{X}).$$

E Complément : linéarisation des formules trigonométriques

L'objectif est d'exprimer $\cos(x)^n$ et $\sin(x)^n$ comme somme d'élements de la forme $a_j\cos(jx)$ et $b_j\sin(jx)$. Le calcul repose entièrement sur les formules d'Euler et du binôme de Newton.

E.1) Linéarisation de cos

On a

$$\cos(x)^n = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}e^{ijx}e^{-i(n-j)x} = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}e^{i(2j-n)x}.$$

E.1.1– Le cas des puissances paires

On suppose que $n=2m$ est pair. On a alors

$$\cos(x)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n}{j}e^{i(2j-n)x} + \frac{1}{2^n}\binom{n}{m} + \frac{1}{2^n}\sum_{j=m+1}^{n}\binom{n}{j}e^{i(2j-n)x}.$$

Dans la dernière somme on fait le changement de variable $\ell = n-j$ et on renomme j la variable de sommation :

$$\sum_{j=m+1}^{n}\binom{n}{j}e^{i(2j-n)x} = \sum_{\ell=0}^{m-1}\binom{n}{n-\ell}e^{-i(2\ell-n)x} = \sum_{j=0}^{m-1}\binom{n}{j}e^{-i(2j-n)x}$$

car

$$\binom{n}{n-\ell} = \binom{n}{\ell}.$$

On a donc, en factorisant

$$\cos(x)^n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{m} + \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n}{j}\left(e^{i(2j-n)x}+e^{-i(2j-n)x}\right)$$

et on obtient en réutilisant la formule d'Euler

$$\cos(x)^n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{m} + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n}{j}\cos((2j-n)x).$$

Si n est pair,

$$\cos(x)^n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{j=0}^{n/2-1}\binom{n}{j}\cos((n-2j)x).$$

E.1.2– Le cas des puissances impaires

On suppose que $n=2m+1$ est impair. On a alors

$$\cos(x)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}e^{i(2j-n)x} + \frac{1}{2^n}\sum_{j=m+1}^{n}\binom{n}{j}e^{i(2j-n)x}.$$

Dans la dernière somme on fait le changement de variable $\ell = n - j$ et on renomme j la variable de sommation :

$$\sum_{j=m+1}^{n} \binom{n}{j} e^{i(2j-n)x} = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{n}{n-\ell} e^{-i(2\ell-n)x} = \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} e^{-i(2j-n)x}$$

On a donc, en factorisant

$$\cos(x)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} \left(e^{i(2j-n)x} + e^{-i(2j-n)x}\right)$$

d'où on déduit le résultat suivant.

Si n est impair,

$$\cos(x)^n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{j} \cos((n-2j)x).$$

E.2) Linéarisation de sin

On a

$$\sin(x)^n = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} e^{ijx} e^{-i(n-j)x} = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} e^{i(2j-n)x}.$$

Les calculs sont alors semblables pour mener au résultat suivant.

Si n est pair,

$$\sin(x)^n = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n/2-1} (-1)^j \binom{n}{j} \cos((n-2j)x).$$

Si n est impair,

$$\sin(x)^n = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{(n-1)/2} (-1)^j \binom{n}{j} \sin((n-2j)x).$$

E.3) Linéarisation de produits de sin et cos

Il s'agit d'exprimer $\cos(x)^p \sin(x)^q$ comme somme de termes $a_j \cos(jx)$ et $b_j \sin(jx)$. On utilise les formules d'Euler et du binôme de Newton de la même façon. C'est plus technique.

On pose

$$\mathrm{P}(p, q, \ell) = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \binom{p}{\ell - k} \binom{q}{k}.$$

Si q est impair,

$$\cos(x)^p \sin(x)^q = \frac{(-1)^{(q-1)/2}}{2^{p+q-1}} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{p+q-1}{2} \rfloor} \mathrm{P}(p,q,\ell) \sin\left((p+q-2\ell)x\right).$$

Si q est pair,

$$\cos(x)^p \sin(x)^q = \mathrm{Q}(p,q) + \frac{(-1)^{q/2}}{2^{p+q-1}} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{p+q-1}{2} \rfloor} \mathrm{P}(p,q,\ell) \cos\left((p+q-2\ell)x\right)$$

avec

$$\mathrm{Q}(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{q/2}}{2^{p+q}} \mathrm{P}\left(p, q, \frac{p+q}{2}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$