UFR MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ
Clermont Auvergne

UFR de mathématiques
Master 1

Analyse complexe

Version du 24 avril 2024

Emmanuel Royer

emmanuel.royer@uca.fr

Table des matières

1 Fonctions holomorphes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1.1) Dérivée complexe

Définition 1– *Une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *est* dérivable au sens complexe *en* $z_0 \in \Omega$ *si la limite de*

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

en z_0 *existe. On note alors*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

et on appelle nombre dérivé *de* f *en* z_0 *cette limite.*

Si f est dérivable au sens complexe en tout point de Ω on dit que f est *holomorphe* sur Ω. On note alors f' la fonction définie sur Ω qui à tout élément de Ω associe le nombre dérivé de f en cet élément. Cette fonction f' s'appelle la *dérivée* de f.

Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ est dite *entière*.

***Proposition* 2-** *Soit* f *et* g *deux fonctions de* Ω *dans* $\mathbb{C}$ *dérivable au sens complexe en* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Alors,*

i) la fonction $f + g$ *est dérivable au sens complexe en* z_0 *et* $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;

ii) la fonction fg *est dérivable au sens complexe en* z_0 *et* $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$;

iii) la fonction λf *est dérivable au sens complexe en* z_0 *et* $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$;

iv) si $f(z_0) \neq 0$, *la fonction* $\frac{1}{f}$ *est dérivable au sens complexe en* z_0 *et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

Remarque 3– Les trois premiers points de la proposition 2 impliquent que l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est une algèbre associative sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4–
Traduire la définition 1 à l'aide de définition de la limite.

Exercice 5–
Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable au sens complexe en $z_0 \in \Omega$, montrer qu'elle est continue en z_0.

Exercice 6–
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable au sens complexe sur Ω et $h\colon I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. On suppose que $h(I) \subset \Omega$.

1) Soit $t \in I$. Montrer qu'il existe une fonction ϵ_1 définie sur un voisinage réel de 0 telle que
$$h(t+\alpha) = h(t) + \alpha h'(t) + \alpha\epsilon_1(\alpha)$$
pour tout α suffisamment petit.
2) Soit $z \in \Omega$. Montrer qu'il existe une fonction ϵ_2 définie sur un voisinage complexe de 0 telle que
$$f(z+u) = f(z) + uf'(z) + u\epsilon_2(u)$$
pour tout u suffisamment petit.
3) Soit $t \in I$. Déduire des questions précédentes qu'il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage réel de 0 telle que
$$f\left(h(t+\alpha)\right) = f\left(h(t)\right) + \alpha h'(t)f'\left(h(t)\right) + \alpha\epsilon(\alpha)$$
pour tout α suffisamment petit.
4) En déduire que la fonction de la variable réelle $f \circ h$ est dérivable, de dérivée $h'f' \circ h$.

Exercice 7–
Démontrer la proposition 2.

Exercice 8–
Soit $n \geq 0$ et $(a_j)_{0\leq j\leq n}$ une suite de nombres complexes. Montrer que la fonction polynomiale
$$z \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$
est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et donner sa dérivée.

Exercice 9–
Démontrer que l'algèbre des fonctions holomorphes sur l'ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ est de dimension infinie.

Exercice 10–
Soit P et Q deux fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note $Z(Q)$ l'ensemble des zéros de Q. Pourquoi $\mathbb{C} - Z(Q)$ est-il un ouvert ? Montrer que la fonction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - Z(Q)$ et donner sa dérivée.

***Proposition* 11-** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega' \to \mathbb{C}$ deux fonctions où Ω' est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $g(\Omega') \subset \Omega$. Soit $z_0 \in \Omega'$. On suppose que g est dérivable au sens complexe en z_0 et que f est dérivable au sens complexe en $g(z_0)$. Alors,la fonction $f \circ g : \Omega' \to \mathbb{C}$ est dérivable au sens complexe en z_0 et*

$$(f \circ g)'(z_0) = g'(z_0) f'(g(z_0)).$$

Exercice 12–

1) Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) La fonction f est dérivable au sens complexe en z_0 et $f'(z_0) = \ell$;
   (ii) Il existe une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ continue en z_0 telle que
   $$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0)$$
   et $\varphi(z_0) = \ell$.
2) Démontrer la proposition 11.
3) En s'inspirant des questions précédentes montrer le résultat suivant. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions. On suppose que $g(\mathbb{R}) \subset \Omega$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que g est dérivable en t_0 et que f est dérivable au sens complexe en $g(t_0)$. Montrer qu'alors, $f \circ g$ est dérivable en t_0 et que $(f \circ g)'(t_0) = g'(t_0) f'(g(t_0))$.

1.2) Équations de Cauchy-Riemann

Grâce à l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x + iy & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

on peut identifier une fonction de la variable complexe avec une fonction de deux variables réelles. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction de la variable complexe, on définit

$$\mathcal{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$$

et $\tilde{f}$ la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (\operatorname{Re} f(x+iy), \operatorname{Im} f(x+iy)) . \end{array}$$

Les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des fonctions de la variable complexe. On notera $\widetilde{\operatorname{Re} f}$ et $\widetilde{\operatorname{Im} f}$ les fonctions correspondantes à deux variables réelles :

$$\widetilde{\operatorname{Re} f} \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \operatorname{Re} f(x+iy) \end{array} \quad \text{et} \quad \widetilde{\operatorname{Im} f} \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \operatorname{Im} f(x+iy). \end{array}$$

Avec ces notations, on a donc

$$\tilde{f} = \left(\widetilde{\operatorname{Re} f}, \widetilde{\operatorname{Im} f}\right).$$

Exercice 13–
Pourquoi l'ensemble $\mathcal{O}$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}^2$?

Rappelons que La fonction $\tilde{f} \colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ si et seulement s'il existe une application linéaire L de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que pour tous réels h et k suffisamment petits, on a

$$\tilde{f}(x_0 + h, y_0 + k) = \tilde{f}(x_0, y_0) + L(h, k) + \|(h, k)\|\tilde{\epsilon}(h, k)$$

où $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2} = |h + ik|$ et $\tilde{\epsilon}$ est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0, 0)$ et vérifiant

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \tilde{\epsilon}(h, k) = 0.$$

Si $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0), la matrice de l'application linéaire L dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ est la matrice jacobienne $\operatorname{Jac}_{(x_0,y_0)}(\tilde{f})$ de $\tilde{f}$ en (x_0, y_0). C'est la matrice à coefficients réels

$$\operatorname{Jac}_{(x_0,y_0)}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial\widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial\widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial\widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire L est

$$(h, k) \mapsto \left(\frac{\partial\widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial\widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial y}(x_0, y_0)k, \frac{\partial\widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial\widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial y}(x_0, y_0)k\right). \tag{1}$$

Si $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable au sens complexe en $z_0 = x_0 + iy_0$, par définition il existe une application ϵ définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 et de limite nulle en 0 telle que

$$f(z_0 + \alpha) = f(z_0) + \alpha f'(z_0) + \alpha\epsilon(\alpha) = f(z_0) + \alpha f'(z_0) + |\alpha|\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\epsilon(\alpha)\right) \tag{2}$$

pour tout $\alpha = h + ik$ suffisamment proche de 0. On écrit $\alpha = h + ik$ avec h et k réels, non tous deux nuls. On a donc $|\alpha| = \|(h,k)\|$. En comparant les parties réelles et imaginaires des membres droit et gauche de (2) on trouve

$$\operatorname{Re} f(z_0+\alpha) = \operatorname{Re} f(z_0)+h\operatorname{Re} f'(z_0)-k\operatorname{Im} f'(z_0)+|\alpha|\left(\frac{h}{|\alpha|}\operatorname{Re}\epsilon(h+ik)-\frac{k}{|\alpha|}\operatorname{Im}\epsilon(h+ik)\right)$$

et

$$\operatorname{Im} f(z_0+\alpha) = \operatorname{Im} f(z_0)+h\operatorname{Im} f'(z_0)+k\operatorname{Re} f'(z_0)+|\alpha|\left(\frac{h}{|\alpha|}\operatorname{Im}\epsilon(h+ik)+\frac{k}{|\alpha|}\operatorname{Re}\epsilon(h+ik)\right).$$

En posant $z_0 = x_0 + iy_0$, on a donc

$$\widetilde{\operatorname{Re} f}(x_0+h, y_0+k) = \widetilde{\operatorname{Re} f}(x_0,y_0) + h\operatorname{Re} f'(z_0) - k\operatorname{Im} f'(z_0) + \|(h,k)\|\tilde{\epsilon}_1(h,k)$$

et

$$\widetilde{\operatorname{Im} f}(x_0+h, y_0+k) = \widetilde{\operatorname{Re} f}(x_0,y_0) + h\operatorname{Im} f'(z_0) + k\operatorname{Re} f'(z_0) + \|(h,k)\|\tilde{\epsilon}_2(h,k)$$

avec

$$\tilde{\epsilon}_1(h,k) = \frac{h}{\|(h,k)\|}\operatorname{Re}\epsilon(h+ik) - \frac{k}{\|(h,k)\|}\operatorname{Im}\epsilon(h+ik)$$

et

$$\tilde{\epsilon}_2(h,k) = \frac{h}{\|(h,k)\|}\operatorname{Im}\epsilon(h+ik) + \frac{k}{\|(h,k)\|}\operatorname{Re}\epsilon(h+ik).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x_0+h, y_0+k) = \tilde{f}(x_0,y_0) + \big(h\operatorname{Re} f'(z_0) - k\operatorname{Im} f'(z_0), h\operatorname{Im} f'(z_0) + k\operatorname{Re} f'(z_0)\big)&\\ + \|(h,k)\|\tilde{\epsilon}(h,k)&\end{aligned}$$

où

$$\tilde{\epsilon}(h,k) = \Big(\tilde{\epsilon}_1(h,k), \tilde{\epsilon}_2(h,k)\Big).$$

L'application

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (h,k) & \mapsto & \big(h\operatorname{Re} f'(z_0) - k\operatorname{Im} f'(z_0), h\operatorname{Im} f'(z_0) + k\operatorname{Re} f'(z_0)\big)\end{array}$$

est linéaire. Pour montrer que c'est l'application différentielle de $\tilde{f}$ en z_0, il reste donc à démontrer que $\tilde{\epsilon}(h,k)$ tend vers 0 lorsque (h,k) tend vers 0. Étudions d'abord la première coordonnée : on a

$$\left|\frac{h}{\|(h,k)\|}\operatorname{Re}\epsilon(h+ik) - \frac{k}{\|(h,k)\|}\operatorname{Im}\epsilon(h+ik)\right| \leq \frac{|h|}{\|(h,k)\|}|\operatorname{Re}\epsilon(h+ik)|+\frac{|k|}{\|(h,k)\|}|\operatorname{Im}\epsilon(h+ik)|.$$

Comme $|h| \leq \sqrt{h^2+k^2} = \|(h,k)\|$ et $|k| \leq \sqrt{h^2+k^2} = \|(h,k)\|$, on trouve

$$\left|\frac{h}{\|(h,k)\|}\operatorname{Re}\epsilon(h+ik) - \frac{k}{\|(h,k)\|}\operatorname{Im}\epsilon(h+ik)\right| \leq |\operatorname{Re}\epsilon(h+ik)| + |\operatorname{Im}\epsilon(h+ik)|.$$

Si (h,k) tend vers 0, alors $h+ik$ tend vers 0. Si ϵ tend vers 0 lorsque $h+ik$ tend vers 0 alors ses parties réelle et imaginaire tendent vers 0. Ainsi,

$$\lim_{(h,k)\to 0} \operatorname{Re}\epsilon(h+ik) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{(h,k)\to 0} \operatorname{Im}\epsilon(h+ik) = 0.$$

On en déduit

$$\lim_{(h,k)\to 0} \tilde{\epsilon}_1(h,k) = 0.$$

De semblable façon,

$$\begin{aligned}\left|\frac{h}{\|(h,k)\|}\operatorname{Im}\epsilon(h+ik) + \frac{k}{\|(h,k)\|}\operatorname{Re}\epsilon(h+ik)\right| &\leq \frac{|h|}{\|(h,k)\|}|\operatorname{Im}\epsilon(h+ik)| + \frac{|k|}{\|(h,k)\|}|\operatorname{Re}\epsilon(h+ik)| \\ &\leq |\operatorname{Im}\epsilon(h+ik)| + |\operatorname{Re}\epsilon(h+ik)|\end{aligned}$$

puis

$$\lim_{(h,k)\to 0} \tilde{\epsilon}_2(h,k) = 0.$$

La fonction $\tilde{f}\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$ est donc différentiable en (x_0,y_0) de différentielle l'application linéaire

$$(h,k) \mapsto \big(\operatorname{Re} f'(z_0)h - \operatorname{Im} f'(z_0)k, \operatorname{Im} f'(z_0)h + \operatorname{Re} f'(z_0)k\big). \tag{3}$$

En comparant (1) et (3), on trouve

$$\operatorname{Re} f'(z_0) = \frac{\partial\widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial\widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial y}(x_0,y_0)$$

et

$$\operatorname{Im} f'(z_0) = -\frac{\partial\widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial\widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0).$$

***Proposition* 14-** *Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable au sens complexe en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors $\tilde{f}\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$ est différentiable en (x_0,y_0) et satisfait aux* équations de Cauchy-Riemann *:*

$$\frac{\partial\widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial\widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial y}(x_0,y_0)$$

et

$$\frac{\partial\widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial\widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Exercice 15–
Montrer que les fonctions $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ et $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ ne sont dérivables au sens complexe en aucun nombre complexe.

Remarque 16– Bien sûr, avec l'habitude, on n'écrira plus les tildes pour marquer la différence entre fonctions sur $\mathbb{C}$ et fonctions sur $\mathbb{R}^2$. Il ne faudra cependant pas oublier qu'il ne s'agit pas des mêmes objets.

Le lecteur intéressé trouvera une présentation légèrement différente des faits précédents dans [FB09, I.5]. Les équations de Cauchy-Riemann permettent une lien géométrique entre fonctions holomorphes et similitudes. Les similitudes du plan sont les bijections du plan euclidien dans lui même qui préservent les rapports entre distances. Les similitudes préservent les angles géométriques. Celles qui préservent les angles orientés sont appelées similitudes directes. Les autres transforment tout angle orienté en son opposé. Elles sont appelées similitudes indirectes. Les translations, rotations et homothéties sont des similitudes directes. Les réflexions par rapport à un axe sont des similitudes indirectes. Toute similitude est obtenue en composant les similitudes précédemment citées. Une bijection du plan euclidien est une similitude directe si et seulement si la bijection complexe associée est de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az+b \end{array}$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Une bijection du plan euclidien est une similitude indirecte si et seulement si la bijection complexe associée est de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a\overline{z}+b \end{array}$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Exercice 17–
Écrire les bijections complexes associées à
1) la translation de vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (α, β) ;
2) la rotation de centre le point Z de coordonnées (p, q) ;
3) l'homothétie de rapport λ.

Une matrice de $\mathrm{M}(2, \mathbb{R})$ est la matrice d'une similitude directe si et seulement si elle est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. C'est la matrice d'une similitude indirecte si et seulement si elle est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{smallmatrix}\right)$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Exercice 18–
Écrire les matrices associées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à

1) la translation de vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (α, β) ;
2) la rotation de centre le point Z de coordonnées (p, q) ;
3) l'homothétie de rapport λ.

Exercice 19–
Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Soit ℓ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe des réels α et β non tous les deux nuls tels que la matrice de ℓ dans $\mathscr{E}$ soit $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$. Montrer qu'il existe des réels γ et δ non tous deux nuls tels que la matrice de ℓ dans $\mathscr{F}$ soit $\left(\begin{smallmatrix} \gamma & -\delta \\ \delta & \gamma \end{smallmatrix}\right)$.

La proposition 14 énonce que, si $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ alors la matrice jacobienne de $\tilde{f} \colon \mathscr{O} \to \mathbb{R}^2$ en (x_0, y_0) est la matrice d'une similitude directe.

Exercice 20–
Décrire la matrice M de similitude directe associée à la fonction entière $z \mapsto z^3 + z$ en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$. Donner une similitude directe de matrice M.

Réciproquement considérons une fonction $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle que la fonction $\tilde{f} \colon \mathscr{O} \to \mathbb{R}^2$ est de classe C^1. On demande donc que les applications

$$\frac{\partial \widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial y}$$

soient définies et continues sur $\mathscr{O}$. La fonction $\tilde{f} \colon \mathscr{O} \to \mathbb{R}^2$ est alors différentiable en tout point de $\mathscr{O}$: soit (x_0, y_0) dans $\mathscr{O}$ et (h, k) suffisamment proche de $(0, 0)$, on a

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(x_0 + h, y_0 + k) = \tilde{f}(x_0, y_0) + \\ &\left(\frac{\partial \widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial \widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial y}(x_0, y_0)k, \frac{\partial \widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial \widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial y}(x_0, y_0)k\right) \\ &\qquad + \|(h, k)\| \epsilon(h, k) \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{(h,k) \to 0} \epsilon(h, k) = 0.$$

Si de plus f satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann, cette égalité se réécrit

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(x_0 + h, y_0 + k) = \tilde{f}(x_0, y_0) + \\ &\left(\frac{\partial \widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial \widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0)k, \frac{\partial \widetilde{\operatorname{Im}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial \widetilde{\operatorname{Re}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0)k\right) \\ &\qquad + \|(h, k)\| \epsilon(h, k) \end{aligned}$$

et donc

$$f((x_0+iy_0)+(h+ik)) = f(x_0+iy_0)+\left(\frac{\partial\widetilde{\mathrm{Re}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial\widetilde{\mathrm{Im}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(h+ik)$$
$$+|h+ik|(\mathrm{Re}\,\epsilon(h,k)+i\,\mathrm{Im}\,\epsilon(h,k)).$$

On a donc

$$\frac{f((x_0+iy_0)+(h+ik))-f(x_0+iy_0)}{h+ik} = \left(\frac{\partial\widetilde{\mathrm{Re}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial\widetilde{\mathrm{Im}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$$
$$+\mathrm{Re}\,\epsilon(h,k)+i\,\mathrm{Im}\,\epsilon(h,k)$$

puis

$$\lim_{h+ik\to 0}\frac{f((x_0+iy_0)+(h+ik))-f(x_0+iy_0)}{h+ik} = \frac{\partial\widetilde{\mathrm{Re}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial\widetilde{\mathrm{Im}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0).$$

On en déduit que $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ est dérivable au sens complexe en x_0+iy_0 de dérivée

$$f'(z_0) = \frac{\partial\widetilde{\mathrm{Re}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial\widetilde{\mathrm{Im}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0).$$

On introduit une nouvelle notation en définissant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial\widetilde{\mathrm{Re}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial\widetilde{\mathrm{Im}(f)}}{\partial x}(x_0,y_0)$$

pour tout $z_0=x_0+iy_0$ dans Ω. Compte-tenu des équations de Cauchy Riemann, on a aussi

$$f'(z_0) = \frac{\partial\widetilde{\mathrm{Im}(f)}}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial\widetilde{\mathrm{Re}(f)}}{\partial y}(x_0,y_0).$$

et on introduit une nouvelle notation en définissant

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial\widetilde{\mathrm{Re}(f)}}{\partial y}(x_0,y_0)+i\frac{\partial\widetilde{\mathrm{Im}(f)}}{\partial y}(x_0,y_0)$$

pour tout $z_0=x_0+iy_0$ dans Ω.

Proposition 21- *Soit* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. *On suppose que* $\tilde{f}\colon \mathscr{O} \to \mathbb{R}^2$ *admet des dérivées partielles*

$$\frac{\partial \widetilde{\mathrm{Re}(f)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \widetilde{\mathrm{Re}(f)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \widetilde{\mathrm{Im}(f)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \widetilde{\mathrm{Im}(f)}}{\partial y}$$

continues en tout point de $\mathscr{O}$ *et vérifie les équations de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial \widetilde{\mathrm{Re}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial \widetilde{\mathrm{Im}(f)}}{\partial y}(x_0, y_0)$$

et

$$\frac{\partial \widetilde{\mathrm{Re}(f)}}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial \widetilde{\mathrm{Im}(f)}}{\partial x}(x_0, y_0)$$

pour tout $(x_0, y_0) \in \mathscr{O}$. *Alors,* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *est holomorphe sur* Ω *et pour tout* z_0 *de* Ω*, on a*

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Remarque 22— Sous les conditions de la proposition 21, on obtient en particulier que f' est continue.

Remarque 23— L'existence de dérivées partielles n'est pas suffisante pour garantir la différentiabilité. Elle n'est même pas suffisante pour garantir la continuité. Contrairement aux notions de continuité et de différentiabilité, les dérivées partielles privilégient des directions (la dérivée partielle par rapport à la première coordonnée privilégie par exemple l'axe de cette première coordonnée). Le lecteur montrera par exemple que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$ [a]. Le résultat qui assure qu'une fonction admettant des dérivées partielles continues sur un ouvert est différentiable sur cet ouvert est une conséquence de la majoration des accroissements finis. Voir [Lau05, Proposition II.1.9]. En prolongement de cette remarque, on peut lire [God98, Chapitre III, §5, 19 et 20].

a. Pour montrer la non-continuité, on évalue la fonction en $1/n, 1/n^2)$ pour tout entier $n > 0$ puis on fait tendre n vers $+\infty$. La dérivée de direction $(u, v) \neq (0, 0)$ en (x_0, y_0) de f est

lorsque cette limite existe. La dérivée partielle par rapport à la première variable est la dérivée de direction $(1, 0)$, la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable est la dérivée de direction $(0, 1)$ Le lecteur vérifiera que

Exercice 24–
On définit une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3.$$

En quels points la fonction f est-elle dérivable au sens complexe ? Existe-t-il un ouvert sur lequel la fonction f est holomorphe ?

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Soit $n \geq 1$ un entier et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est dérivable à l'ordre 1 en z_0 si elle est dérivable en z_0 et on note $f^{(1)}(z_0) = f'(z_0)$. Pour tout entier $j \in [2, n]$, on dit que f est dérivable à l'ordre j en z_0 si $f^{(j-1)}$ est dérivable en z_0 ; on note alors $f^{(j)}(z_0)$ la dérivée de $f^{(j-1)}$ en z_0.

2 Séries entières

2.1) Généralités

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $z \in \mathbb{C}$. On dit que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge *absolument* en z si la suite de terme général $\sum_{n=0}^{N}|a_n z^n|$ admet une limite finie lorsque N tend vers l'infini. On sait alors que la suite de terme général $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ admet une limite finie lorsque N tend vers l'infini et cette limite est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Si la suite de terme général $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ n'admet pas de limite lorsque N tend vers l'infini, on dit que la série entière diverge.

***Proposition* 25-** *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Il existe $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que*

1) La série converge absolument pour $|z| < R$;

2) La série diverge pour $|z| > R$.

Le nombre R s'appelle le rayon de convergence *de la série. Il est donné par la* formule de Hadamard

$$1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$$

avec les conventions $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$.

Remarque 26– Cette proposition implique le point suivant qu'il est important de retenir. Si une série entière en 0 converge simplement dans un disque ouvert centré en 0, alors elle y converge absolument. Si R est le rayon de convergence, et si $0 < \rho < R$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \rho^n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \rho^n$$

pour tout $z \in D(0, \rho)$. On en déduit que la série entière est même normalement convergente sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur au rayon de convergence.

Démonstration de la proposition 25. Posons $L = \limsup |a_n|^{1/n}$.

1) On suppose $L \notin \{0, +\infty\}$ et on pose $R = 1/L$.

   i) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Puisque $1/|z| - L > 0$, on fixe $\epsilon > 0$ tel que $(L+\epsilon)|z| < 1$. Par définition de la limite supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ on a $|a_n|^{1/n} \leq L + \epsilon$. Pour tout $n \geq n_0$ on a alors
   $$|a_n z^n| \leq [(L+\epsilon)|z|]^n.$$
   Comme $(L+\epsilon)|z| < 1$, la série géométrique
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} [(L+\epsilon)|z|]^n$$
   converge et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ converge.

   ii) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Puisque $L - 1/|z| > 0$, on fixe $\epsilon > 0$ tel que $(L-\epsilon)|z| > 1$. Par définition de la limite supérieure, il existe une suite extraite de $\left(|a_n|^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers L. Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\left(|a_{\varphi(n)}|^{1/\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une telle suite extraite. On trouve alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on a $|a_{\varphi(n)}|^{1/\varphi(n)} \geq L - \epsilon$. Pour tout entier $n \geq n_0$, on a alors
   $$|a_{\varphi(n)} z^{\varphi(n)}| \geq [(L-\epsilon)|z|]^{\varphi(n)}.$$
   On en déduit que la suite $\left(|a_{\varphi(n)} z^{\varphi(n)}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et donc que la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Ainsi, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ n'est pas convergente.

2) On suppose $L = 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On choisit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon|z| < 1$. Il existe alors $n_0 \geq 0$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $|a_n|^{1/n} \leq \epsilon$. On en déduit que pour tout entier $n \geq n_0$, on a
   $$|a_n z^n| \leq (\epsilon|z|)^n.$$
   La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\epsilon|z|)^n$ converge et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ converge.

3) On suppose $L = +\infty$. Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. On fixe $M > 0$ tel que $M|z| > 1$. Par définition de la limite supérieure, il existe une suite extraite de $\left(|a_n|^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $+\infty$. Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\left(|a_{\varphi(n)}|^{1/\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une telle suite extraite. On trouve alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on a $|a_{\varphi(n)}|^{1/\varphi(n)} \geq M$. Pour tout entier $n \geq n_0$, on a alors
   $$|a_{\varphi(n)} z^{\varphi(n)}| \geq (M|z|)^{\varphi(n)}.$$
   On en déduit que la suite $\left(|a_{\varphi(n)} z^{\varphi(n)}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et donc que la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Ainsi, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ n'est pas convergente.

□

Exercice 27–
On considère la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}.$$

Montrer que son rayon de convergence est $+\infty$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit l'exponentielle complexe de z, notée e^z ou $\exp(z)$ par

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On définit ensuite le sinus et le cosinus de z grâce aux relations d'Euler :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Si θ est réel, montrer que

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Donner les développements en séries entières de cos et sin et montrer que leur rayon de convergence est $+\infty$.

Exercice 28–
Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$

On donne le comportement des séries par les opérations usuelles.

Proposition 29 (Produit externe)- *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et λ un complexe non nul. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda a_n) z^n$ a R pour rayon de convergence et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

pour tout complexe z tel que $|z| < R$.

Démonstration. L'égalité des rayons de convergence résulte de la formule de Hadamard puisque $(|\lambda|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, on a $\lim(\lambda S_n) = \lambda \lim S_n$. On en déduit l'égalité des sommes en choisissant $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. □

***Proposition* 30** (Somme)- *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_b. Alors, le rayon R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n)z^n$ vérifie*

$$\begin{cases} R = \min(R_a, R_b) & \text{si } R_a \neq R_b \\ R \geq R_a & \text{si } R_a = R_b. \end{cases}$$

De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq \min(R_a, R_b)$. Les deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k z^k| \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} |b_k z^k|$$

convergent. La suite de terme général

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)z^k = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=0}^{n} b_k z^k \tag{4}$$

vérifie

$$\sum_{k=0}^{n} |(a_k + b_k)z^k| \leq A_n + B_n.$$

Elle est donc absolument convergente. On en déduit que $R \geq \min(R_a, R_b)$. En passant à la limite dans (4), on trouve

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k)z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k.$$

Supposons maintenant $R_a \neq R_b$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\min(R_a, R_b) < |z| < \max(R_a, R_b)$. La suite de terme général

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)z^k = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$$

est somme d'une suite convergente et d'une suite divergente. Elle est donc divergente. Il en ressort que que $R \leq \min(R_a, R_b)$ et donc $R = \min(R_a, R_b)$. □

***Proposition* 31** (Produit)- *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R_a *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R_b*. La série produit test la série*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) z^n.$$

Son rayon de convergence R *vérifie* $R \leq \min(R_a, R_n)$ *et, si* $|z| \leq \min(R_a, R_b)$ *alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq \min(R_a, R_b)$. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} |a_j||b_{k-j}|\right) |z^k| = \sum_{k=0}^{n} |a_k z^k| \sum_{k=0}^{n} |b_k z^k|.$$

Les deux suites de termes généraux les deux sommes de droite convergent. On en déduit que la suite de terme général

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) z^k \right|$$

converge puis que $R \leq \min(R_a, R_b)$. Enfin, la dernière égalité de l'énoncé est conséquence d'un passage à la limite dans l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) z^k = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k.$$

□

Les séries considérées jusqu'à présent étaient convergentes sur des disques centrés en zéro. Soit S une telle série, donnée par

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

pour tout $z \in D(0, R)$ ou $R > 0$ est le rayon de convergence de S. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On considère la fonction T définie par

$$T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Elle est définie pour tout z tel que $z - z_0 \in D(0, R)$ donc pour tout $z \in D(z_0, R)$. Grâce à cette remarque, on peut retrouver l'ensemble des résultats énoncés précédemment dans cette partie. On obtient les énoncés suivants.

Proposition 32- *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$ *une série entière autour de* z_0. *Il existe* $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *tel que*

1) *La série converge absolument pour tout* z *tel que* $|z-z_0| < R$;
2) *La série diverge pour tout* z *tel que* $|z-z_0| > R$.

Le nombre R *s'appelle le* rayon de convergence *de la série. Il est donné par la* formule de Hadamard

$$1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$$

avec les conventions $1/0 = +\infty$ *et* $1/+\infty = 0$.

Proposition 33 (Produit externe)- *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$ *une série entière centrée en* z_0 *de rayon de convergence* R *et* λ *un complexe non nul. Alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\lambda a_n)(z-z_0)^n$ *a* R *pour rayon de convergence et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n)(z-z_0)^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

pour tout complexe z *tel que* $|z-z_0| < R$.

Proposition 34 (Somme)- *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$ *une série entière centrée en* z_0 *de rayon de convergence* R_a *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n(z-z_0)^n$ *une série entière centrée en* z_0 *de rayon de convergence* R_b. *Alors, le rayon* R *de la série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$ *vérifie*

$$\begin{cases} R = \min(R_a, R_b) & \text{si } R_a \neq R_b \\ R \geq R_a & \text{si } R_a = R_b. \end{cases}$$

De plus, si $|z-z_0| < \min(R_a, R_b)$, *on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n.$$

Proposition 35 (Produit)- *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$ *une série entière centrée en* z_0 *de rayon de convergence* R_a *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n(z-z_0)^n$ *une série entière de rayon de convergence* R_b. *La série produit test la série*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right)(z-z_0)^n.$$

Son rayon de convergence R *vérifie* $R \leq \min(R_a, R_n)$ *et, si* $|z| \leq \min(R_a, R_b)$ *alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right)(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n.$$

Exercice 36–
Démontrer directement les énoncés précédents.

Enfin, on montre l'unicité des développements en série entière.

Proposition 37- *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et* $R > 0$. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites complexes telles que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$. *Alors,* $a_n = b_n$ *pour tout entier* $n \geq 0$.

Démonstration. En posant $c_n = a_n - b_n$ pour tout $n \geq 0$ et $w = z - z_0$, on voit qu'il suffit de montrer que si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n = 0$$

pour tout $w \in D(0, R)$, alors $c_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. Pour tout $w \in D(0, R)$, on pose

$$Z(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n.$$

Pour tout entier $m \geq 0$, on note m l'hypothèse : $c_n = 0$ pour tout $n \leq m$. Comme $Z(0) = 0$, on $c_0 = 0$ et l'hypothèse $\mathcal{N}(0)$ est vraie. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que l'hypothèse $\mathcal{N}(m)$ est vraie. On a alors

$$Z(w) = \sum_{n=m+1}^{+\infty} c_n w^n$$

pour tout $w \in D(0, R)$. On pose

$$T(w) = \frac{Z(w)}{w^{m+1}}$$

pour tout $w \in D(0, R)$. Comme Z est la fonction constante nulle, T l'est aussi. Or

$$T(w) = \sum_{r=0}^{+\infty} c_{r+m+1} w^r$$

pour tout $w \in D(0, R)$ et en particulier $T(0) = c_{m+1}$. On a donc $c_{m+1} = 0$ et $\mathcal{N}(m+1)$ est vraie.

L'hypothèse $\mathcal{N}(0)$ est vraie. Pour tout entier $m \geq 0$, si $\mathcal{N}(m)$ est vraie alors $\mathcal{N}(m+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{N}(m)$ est vraie pour tout entier $m \geq 0$ puis que $c_n = 0$ pour tout entier $n \geq 0$.

□

2.2) Analycité et holomorphie

Si $R \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$, on note

$$D(z, R) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < R\}$$

le disque ouvert de centre z et de rayon R.

***Proposition* 38-** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z - z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La fonction*

$$\begin{array}{cccc} S & : & D(z_0, R) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \end{array}$$

est holomorphe sur $D(z_0, R)$. Pour tout $z \in D(z_0, R)$, la dérivée de S en z est

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Remarque 39– Les séries entières S et S' de la proposition 38 ayant même rayon de convergence (grâce à la formule de Hadamard), on peut appliquer la proposition aux dérivées successives de S. On montre qu'ainsi, la fonction S admet des dérivées au sens complexe à tout ordre. Pour tout entier $k \geq 0$ et tout $z \in D(z_0, R)$, on a

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k} = k! \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k}(z - z_0)^n.$$

Démonstration de la proposition 38. Si on note

$$D(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

cette série à même rayon de convergence R que S. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h} = D(z)$$

ou encore que

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z) - hD(z)}{h} = 0 \qquad (5)$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$. Soit $z \in D(z_0, R)$. On a alors $|z - z_0| < R$. Soit alors $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < R - |z - z_0|$. On a

$$|z + h - z_0| \leq |z - z_0| + |h| < R$$

et donc $z + h \in D(z_0, R)$. On utilise alors les développements en série de S et D pour écrire le numérateur de (5) comme

$$S(z+h) - S(z) - hD(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n[(z - z_0 + h)^n - (z - z_0)^n - nh(z - z_0)^{n-1}].$$

On en tire

$$|S(z+h)-S(z)-hD(z)| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot \left|(z-z_0+h)^n-(z-z_0)^n-nh(z-z_0)^{n-1}\right|.$$

On reconnaît dans $(z-z_0)^n+nh(z-z_0)^{n-1}$ le début du développement du binôme $(z-z_0+h)^n$. Ainsi

$$\begin{aligned}\left|(z-z_0+h)^n-(z-z_0)^n-nh(z-z_0)^{n-1}\right| &= \left|\sum_{\ell=2}^{n}\binom{n}{\ell}h^\ell(z-z_0)^{n-\ell}\right| \\ &\le \sum_{\ell=2}^{n}\binom{n}{\ell}|h|^\ell|z-z_0|^{n-\ell} \\ &= (|z-z_0|+|h|)^n-|z-z_0|^n-n|h|\cdot|z-z_0|^{n-1}.\end{aligned}$$

Il faut noter que cette dernière quantité est positive. On a donc

$$|S(z+h)-S(z)-hD(z)| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \left((|z-z_0|+|h|)^n-|z-z_0|^n-n|h|\cdot|z-z_0|^{n-1}\right).$$

Le complexe z étant dans le disque ouvert $D(z_0,R)$, on peut trouver $r>0$ tel que $|z-z_0|<r<R$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ converge absolument, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers 0. En particulier elle est bornée et il existe $A>0$ tel que pour tout entier $n\ge 0$ on a $|a_n|\le Ar^{-n}$. Si $|h|\le r-|z-z_0|$ (on a alors bien $|h|\le R-|z-z_0|$), on en déduit que

$$|S(z+h)-S(z)-hD(z)| \le A\sum_{n=0}^{+\infty} r^{-n}\left((|z-z_0|+|h|)^n-|z-z_0|^n-n|h|\cdot|z-z_0|^{n-1}\right)$$

car la quantité entre parenthèses en facteur de r^{-n} est positive

$$\begin{aligned}&= A\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{|z-z_0|+|h|}{r}\right)^n - A\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{z-z_0}{r}\right|^n - A\left|\frac{h}{r}\right|\sum_{n=0}^{+\infty} n\left|\frac{z-z_0}{r}\right|^{n-1} \\ &= A\left(1-\frac{|z-z_0|+|h|}{r}\right)^{-1} - A\left(1-\left|\frac{z-z_0}{r}\right|\right)^{-1} - A\left|\frac{h}{r}\right|\left(1-\left|\frac{z-z_0}{r}\right|\right)^{-2}.\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que, si $|u|\le 1$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nu^{n-1} = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}u}\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}u}(1-u)^{-1} = (1-u)^{-2}.$$

En simplifiant, on trouve

$$\left|\frac{S(z+h)-S(z)-hD(z)}{h}\right| \le A\frac{r|h|}{(r-|z-z_0|)^2(r-|z-z_0|-|h|)}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(z+h)-S(z)-hD(z)}{h} = 0$$

qui était notre objectif. □

Exercice 40–
Calculer les dérivées au sens complexe à tous ordres des fonctions exp, sin et cos.

Exercice 41–
Déterminer la dérivée au sens complexe de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$

Exercice 42–
Donner un énoncé mathématique précis de la remarque 39 et démontrer cet énoncé.

On a donc construit une classe importante de fonctions holomorphes : toutes celles qui ont un développement en série entière. On donne un nom à ces fonctions.

Définition 43– *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est* analytique *en un point $z_0 \in \Omega$ s'il existe $R > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que que f admet le développement en série*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

convergeant absolument pour tout $z \in D(z_0, R)$.

Remarque 44– On dit que f est analytique sur Ω si elle est analytique en tout point de Ω.

Avec le vocabulaire introduit, la remarque 39 s'énonce de la façon suivante.

Proposition 45- *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique en $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $R > 0$ tel que f admet donc un développement en série*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

convergeant absolument pour tout $z \in D(z_0, R)$. Alors, f est holomorphe sur $D(z_0, R)$. De plus, pour tout $z \in D(z_0, R)$ et tout entier $k \geq 0$ la dérivée d'ordre k de f en z est donnée par :

$$f^{(k)}(z) = k! \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} (z - z_0)^n.$$

Une conséquence de cette proposition est le développement de Taylor des fonctions analytiques. Ce développement relie les coefficients du développement en série centré en un point aux valeurs des dérivées en ce point de la fonction développée en série.

Proposition 46- *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction analytique en* $z_0 \in \Omega$. *Il existe donc* $R > 0$ *et* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tels que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$. *Alors* f *est dérivable à tout ordre sur* $D(z_0, R)$. *De plus, pour tout* $n \geq 0$, *les coefficients du développement en série entière sont donnés par*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Démonstration. Soit $k \geq 0$, on a

$$f^{(k)}(z) = k! \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} (z - z_0)^n.$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$. En particulier, en choisissant $z = z_0$, on trouve

$$f^{(k)}(z_0) = k! \binom{k}{k} a_k$$

et donc

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

□

Exercice 47–
Pour tout entier $n \geq 1$, calculer les dérivées à l'ordre n en 0 de cos et sin.

Si f est analytique en z_0, alors elle est analytique en tout point du disque de convergence centré en z_0. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 48- *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et* f *une fonction analytique en* z_0. *Il existe donc un réel* $R > 0$ *et une suite complexe* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tels que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$. *Soit* $z_1 \in D(z_0, R)$. *Alors, il existe un réel* $\rho > 0$ *et une suite complexe* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tels que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_1)^n$$

pour tout $z \in D(z_1, \rho)$.

Remarque 49— Il faut bien comprendre que cela implique le fait suivant : si une fonction admet un développement en série entière centré en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors elle admet un développement en série entière centré en n'importe quel point de son disque de convergence.

Démonstration de la proposition 48. On pose $\rho = R - |z_1 - z_0|$. C'est le plus grand rayon possible pour un disque ouvert de centre z_1 contenu dans le disque ouvert $D(z_0, R)$. Comme f est analytique en z_0, la proposition 46 implique qu'elle est dérivable à tout ordre en z_1. On va montrer que le développement de Taylor de f en z_1 est convergent sur $D(z_1, \rho)$ et que sa somme est f.

Soit $z \in D(z_1, \rho)$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et

$$R_N(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n,$$

on va montrer que $R_N(z)$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. On a

$$R_N(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n + S_N(z)$$

avec

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n.$$

Comme

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n = f(z)$$

il nous suffit de montrer que $S_N(z)$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

Puisque z_1 est le centre du développement que l'on cherche, exprimons S_N comme polynôme en $z - z_1$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_1 + z_1 - z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}(z - z_1)^m(z_1 - z_0)^{n-m} \\
&= \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}\left(\sum_{n=m}^{N} \frac{n!}{(n-m)!}a_n(z_1 - z_0)^{n-m}\right)(z - z_1)^m \\
&= \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}\left(\sum_{r=0}^{N-m} \frac{(r+m)!}{r!}a_{r+m}(z_1 - z_0)^r\right)(z - z_1)^m.
\end{aligned}$$

On a donc

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\left(\sum_{r=0}^{N-n} \frac{(n+r)!}{r!}a_{r+n}(z_1 - z_0)^r - f^{(n)}(z_1)\right)(z - z_1)^n.$$

D'après la proposition 45, on a

$$f^{(n)}(z_1) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(r+n)!}{r!} a_{r+n}(z_1 - z_0)^r$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{N-n} \frac{(n+r)!}{r!} a_{r+n}(z_1 - z_0)^r - f^{(n)}(z_1) &= \sum_{r=N-n+1}^{+\infty} \frac{(n+r)!}{r!} a_{r+n}(z_1 - z_0)^r \\ &= \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (z_1 - z_0)^{k-n}.\end{aligned}$$

On en tire

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \binom{k}{n} a_k (z_1 - z_0)^{k-n} (z - z_1)^n$$

puis

$$|S_N(z)| \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \binom{k}{n} |a_k| |z_1 - z_0|^{k-n} |z - z_1|^n.$$

Après interversion des sommes, on reconnaît le début du développement de $(|z_1 - z_0| + |z - z_1|)^k$:

$$|S_N(z)| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} \binom{k}{n} |a_k| |z_1 - z_0|^{k-n} |z - z_1|^n.$$

On peut majorer la somme en n par la somme totale du développement du binôme puisque la somme est constituée de termes positifs et que $N \leq k$. On trouve

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{k}{n} |a_k| |z_1 - z_0|^{k-n} |z - z_1|^n \leq \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} |z_1 - z_0|^{k-n} |z - z_1|^n = (|z_1 - z_0| + |z - z_1|)^k$$

et donc

$$|S_N(z)| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} |a_k| \left(|z_1 - z_0| + |z - z_1|\right)^k.$$

Enfin,

$$|z_1 - z_0| + |z - z_1| < |z_1 - z_0| + \rho < R$$

donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \left(|z_1 - z_0| + |z - z_1|\right)^k$$

converge et $S_N(z)$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. □

On vient de montrer que les fonctions analytiques sont holomorphes. On montre maintenant que les fonctions holomorphes sont analytiques, sous une hypothèse de continuité des dérivées partielles qu'on pourra supprimer après avoir vu la théorie de Cauchy (voir le théorème 99).

***Proposition* 50-** *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose par ailleurs que les fonctions*

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\colon \mathscr{O} \to \mathbb{R}^2 \quad \textit{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\colon \mathscr{O} \to \mathbb{R}^2$$

sont continues. Alors, f est analytique.

La démonstration qu'on donne utilise la théorie de Fourier.

Démonstration. On suppose $0 \in \Omega$. On montre l'analycité en 0, laissant en exercice le cas général. Soit donc $R > 0$ tel que le disque ouvert $D(0,R)$ est inclus dans Ω. Soit $r \in [0,R[$. La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f\left(re^{2i\pi t}\right) \end{array}$$

est périodique de période 1. Elle est aussi dérivable de dérivée

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 2i\pi re^{2i\pi t} f'\left(re^{2i\pi t}\right) \end{array}$$

d'après l'exercice 6. On en déduit qu'elle est C^1, en raison de l'hypothèse de continuité des dérivées partielles de f (voir la remarque 22). Sa série de Fourier est donc absolument convergente :

$$f\left(re^{2i\pi t}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(r) e^{2i\pi nt}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Les coefficients de Fourier sont définis, pour tout entier relatif n, par

$$a_n(r) = \int_0^1 f\left(re^{2i\pi t}\right) e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Calculons la dérivée de la fonction a_n. Si F est la fonction de la variable réelle définie, pour tout $t \in [0,1]$ fixé par

$$F(r) = f\left(re^{2i\pi t}\right) e^{-2i\pi nt}$$

pour tout $r \in [0,R[$, alors $F'(r) = f'\left(re^{2i\pi t}\right) e^{-2i\pi(n-1)t}$. L'hypothèse de continuité des dérivées partielles de f implique que la fonction f' est continue. On en déduit que la fonction

$$\begin{array}{ccc} [0,R[\times[0,1] & \to & \mathbb{C} \\ (r,t) & \mapsto & f'\left(re^{2i\pi t}\right) e^{-2i\pi(n-1)t} \end{array}$$

est continue. On peut donc calculer la dérivée

$$a_n'(r) = \int_0^1 f'\left(re^{2i\pi t}\right) e^{-2i\pi(n-1)t}\,\mathrm{d}t.$$

On établit ensuite une équation différentielle satisfaite par a_n. Fixons $r \in [0, R[$. La dérivée de la fonction G de la variable réelle définie par

$$G(t) = f\left(re^{2i\pi t}\right)$$

pour tout $t \in [0, 1]$ est

$$G'(t) = 2i\pi re^{2i\pi t} f'\left(re^{2i\pi t}\right).$$

Par intégration par parties, on calcule donc

$$2i\pi r \int_0^1 f'\left(re^{2i\pi t}\right) e^{-2i\pi(n-1)t}\,\mathrm{d}t = 2i\pi n \int_0^1 f\left(re^{2i\pi t}\right) e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = 2i\pi n a_n(r).$$

Ainsi,

$$ra_n'(r) = na_n(r)$$

pour tout $r \in [0, R[$. On résout cette équation différentielle. Pour tout $r \in]0, R[$, on pose $\alpha_n(r) = a_n(r)r^{-n}$ et on voit que l'équation différentielle $ra_n'(r) = na_n(r)$ est équivalente à l'équation différentielle $\alpha_n'(r) = 0$. On a donc $a_n(r) = b_n r^n$ pour tout $r \in]0, R[$ où b_n ne dépend pas de r. Enfin, on montre que $a_n = 0$ si $n < 0$. Soit $\rho \in]0, R[$. L'équation (6) donne

$$|b_n| r^n \le \max_{|z|=r} |f(z)| \le \max_{|z| \le \rho} |f(z)|$$

pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in]0, \rho]$ et donc

$$|b_n| \le r^{-n} \max_{|z| \le \rho} |f(z)|.$$

Si $n < 0$, en faisant tendre r vers 0 on obtient $b_n = 0$. Finalement

$$f\left(re^{2i\pi t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(re^{2i\pi t}\right)^n$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $r \in]0, R[$. Par continuité, l'égalité reste valable en $r = 0$. On a donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

pour tout $z \in D(0, R)$. C'est le développement en série entière recherché. □

Exercice 51–
Sans supposer $0 \in \Omega$, adapter la preuve précédente pour montrer l'analycité de f en un z_0 quelconque de Ω. On pourra poser $g(z) = f(z_0 + z)$.

Exercice 52–
On définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \begin{cases} \exp(-1/z^2) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1) On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la restriction de φ à $\mathbb{R}$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

   $$\phi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

   b) Montrer que ϕ est C^∞.
2) La fonction φ est-elle holomorphe ?

Des propositions 50 et 45 résulte immédiatement le résultat suivant qui montre une très grande régularité des fonctions holomorphes.

Corollaire 53- *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose par ailleurs que les fonctions*

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$$

sont continues. Alors, f est dérivable au sens complexe à tout ordre.

2.3) Prolongement analytique

Soit f une fonction analytique sur Ω, ou bien, c'est la même chose, une fonction holomorphe à dérivées partielles premières continues. Si $z_0 \in \Omega$, il existe $R > 0$ tel que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{7}$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$.

Si toutes les dérivées de f en z_0 sont nulles, l'équation (7) implique que f est nulle au voisinage de z_0, à savoir au moins sur $D(0, R)$.

Supposons donc qu'au moins l'une des dérivées de f en z_0 est non nulle. Soit $m \geq 0$ tel que

$$f^{(m)}(z_0) \neq 0 \quad \text{et } f^{(n)}(z_0) = 0 \text{ si } n < m.$$

Cet entier s'appelle l'ordre d'annulation de f en z_0 [b]. On peut alors factoriser $(z - z_0)^m$ dans (7) et obtenir

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \tag{8}$$

avec

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!}(z - z_0)^n$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$. La fonction g est analytique donc continue. Elle est non nulle en z_0 puisque $g(z_0) = f^{(m)}(z_0)/m!$. Il existe donc $\rho > 0$ tel que g ne s'annule pas sur $D(z_0, \rho)$.

On résume la discussion précédente dans l'énoncé suivant.

***Proposition* 54** (Principe des zéros isolés)- *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit $z_0 \in \Omega$.*

i) Si toutes les dérivées de f s'annulent en z_0, alors f est nulle au voisinage de z_0 ;

ii) Sinon, il existe un voisinage de z_0 dans lequel f ne s'annule qu'en z_0.

Remarque 55— Soit Z un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Un élément w de Z est dit *point isolé* de Z s'il existe $R > 0$ tel que le disque épointé $D(w, R) - \{w\}$ ne contient aucun point de Z. La proposition 54 dit que, si f n'est pas la fonction nulle au voisinage d'un de ses zéros, alors ce zéro est un point isolé de l'ensemble des zéros de f.

***Corollaire* 56-** *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit $K \subset \Omega$ un compact de $\mathbb{C}$. Alors, f ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans K.*

Démonstration. Soit

$$Z_0 = \{z \in \Omega\colon f(z) = 0\}$$

l'ensemble des zéros de f. C'est un fermé puisque c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par la fonction continue f. L'ensemble $Z_0 \cap K$ est donc fermé puisque K est aussi un fermé. L'ensemble $Z_0 \cap K$ est aussi borné car K l'est, c'est donc un compact. Par le principe des zéros isolés, pour chaque $z \in Z_0 \cap K$, il existe un ouvert $U_z \subset \Omega$ tel que, sur U_z, la fonction f ne s'annule qu'en z. La réunion de tous les U_z est un recouvrement ouvert de $Z_0 \cap K$:

$$Z_0 \cap K \subset \bigcup_{z \in Z_0 \cap K} U_z.$$

Comme $Z_0 \cap K$ est compact, on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini : il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{Z}$ de $Z_0 \cap K$ tel que

$$Z_0 \cap K \subset \bigcup_{z \in \mathcal{Z}} U_z.$$

b. Si f ne s'annule pas en z_0, on dit donc que f s'annule à l'ordre 0 en z_0.

Soit $\xi \in Z_0 \cap K$. Alors il existe $z \in \mathcal{Z}$ tel que $\xi \in U_z$. Comme f s'annule en $\xi \in U_z$ et qu'elle ne s'annule sur U_z qu'en z, on a $\xi = z$ puis $\xi \in \mathcal{Z}$. Ainsi $Z_0 \cap K \subset \mathcal{Z}$ et $Z_0 \cap K$ est fini. □

En ajoutant une hypothèse de connexité, on rend global le principe des zéros isolés pour obtenir le principe de prolongement analytique.

***Proposition* 57** (Principe de prolongement analytique)- *On suppose que l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est connexe. Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. S'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points distincts de Ω telle que*

$$f(w_k) = 0 \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

et admettant une limite dans Ω alors f est la fonction nulle.

Démonstration. On note w la limite de la suite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque $f(w_n) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et puisque $w \in \Omega$, on a $f(w) = 0$ par continuité de f. De plus, par définition de la limite, toute boule ouverte de centre w contient au moins un élément de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les termes de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant distincts, on peut trouver des boules ouvertes de centre w et de rayon arbitrairement petit contenant un zéro de f distinct de w. Par le principe des zéros isolés, on en déduit que toutes les dérivées de f en w sont nulles.

On considère alors l'ensemble

$$Z = \{z \in \Omega \colon \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z) = 0\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$Z_n = \{z \in \Omega \colon f^{(n)}(z) = 0\}$$

est l'image réciproque par la fonction continue $f^{(n)}$ de l'ensemble fermé $\{0\}$, c'est donc un ensemble fermé. L'ensemble Z est alors l'intersection de tous ces ensembles fermés Z_n, c'est donc un ensemble fermé. Montrons que c'est aussi un ensemble ouvert, autrement dit que Z est voisinage de chacun de ses points. Soit z un élément de Z, il nous faut montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $D(z,\rho) \subset Z$. Puisque $f^{(n)}(z) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est une conséquence immédiate du développement de Taylor de f en z.

L'ensemble Z est donc ouvert et fermé dans Ω. Puisque Ω est connexe, on en déduit que $Z = \emptyset$ ou $Z = \Omega$. Mais Z contient w donc $Z = \Omega$. On a donc $f = 0$. □

Remarque 58– Le principe de prolongement analytique s'utilise souvent de la façon suivante. Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ et $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques sur l'ouvert connexe Ω. On suppose que f et g coïncident sur une suite infinie de points distincts de Ω admettant une limite dans Ω. Alors, f et g coïncident sur Ω.

Exercice 59–
Soit L la fonction analytique définie sur $D(0,1)$ par

$$L(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$

Montrer que

$$\exp\left(L(z)\right) = 1 + z$$

pour tout $z \in D(0,1)$.

Exercice 60–

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(x+z) = \exp(x)\exp(z)$.
2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $w \in \mathbb{C}$, on a $\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z)$.

Exercice 61–

1) Si $z \in \mathbb{C}$, montrer que

$$\exp(z) = e^{\mathrm{Re}(z)}\left(\cos\left(\mathrm{Im}\, z\right) + i \sin\left(\mathrm{Im}\, z\right)\right).$$

2) La fonction exp s'annule-t-elle sur $\mathbb{C}$?
3) Déterminer les zéros avec leurs ordres des fonctions entières sin et cos.

3 Théorie de Cauchy

Le théorème de Cauchy énonce que

$$\int_\gamma f = 0$$

pour toute fonction holomorphe f à condition que le contour γ jouisse de certaines propriétés. Dans cette partie, on commence par établir un théorème de Cauchy pour les triangles. On en déduit l'existence de primitive pour toute fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. L'existence de primitive implique alors le théorème de Cauchy pour tout contour contenu dans un ouvert étoilé. Ce théorème fournit un important moyen de calcul intégral. En particulier, on étendra le logarithme néperien aux nombres complexes. Il permet aussi de montrer que tout fonction holomorphe est analytique (montrant ainsi que la condition de continuité des dérivées partielles de la proposition 50 est superflue).

3.1) Intégration le long d'un contour

Dans ce cours nous appellerons *chemin* une fonction d'un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est *lisse par morceaux*. Une application $s\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite lisse par morceaux [c] si elle est continue et s'il existe un nombre fini de réels

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

tels que sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ la fonction s est dérivable (à gauche en a_i, à droite en a_{i+1}) et si, pour tout $t \in [a_i, a_{i+1}]$, on a $s'(t) \neq 0$ [d]. On dira que $(a_0, \ldots, a_n)$ est une subdivision adaptée au chemin.

Exercice 62–
Donner un chemin dont l'image est un carré passant par les points $1/2 + i/2$, $-1/2 + i/2$, $-1/2 - i/2$ et $1/2 - i/2$.

Deux chemins $s\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\tilde{s}\colon [c, d] \to \mathbb{C}$ sont ***équivalents*** s'il existe une bijection u de classe C^1 de $[c, d]$ dans $[a, b]$ telle que $u'(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et $\tilde{s} = s \circ u$ [e]. Puisque u est strictement croissante et bijective, on a $u(c) = a$ et $u(d) = b$. Un *contour* est alors une classe d'équivalence de chemins. On dit qu'un chemin représentant appartenant à la classe d'équivalence d'un contour paramètre ce contour. Si $\gamma \subset \mathbb{C}$ est un contour paramétré par un chemin $s\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, le point $s(a)$ s'appelle le *point de départ* du contour et le point $s(b)$ s'appelle son *point d'arrivée*. Un contour est *fermé* si ses points de départ et d'arrivée sont identiques.
⚠Dans ce cours un contour n'est *pas* l'image d'un chemin. C'est une classe d'équivalence de chemin. Pensez à la différence entre le cercle vu comme une courbe et ce même cercle parcouru 17 fois.

Remarque 63– Si u est une bijection de classe C^1 de $[a, b]$ dans $[c, d]$, elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Si elle est strictement croissante, on dit que les chemins s et $s \circ u$ ont *même orientation*. Sinon, qu'ils ont des orientations opposées. On note donc que les chemins définissant un contour ont tous même orientation.

Remarque 64– On attribue souvent des propriétés aux contours qu'on devrait en toute rigueur attribuer aux paramétrages de ces contours. Il faut vérifier que ces propriétés ne dépendent pas du contour.

1) Soit E une partie de $\mathbb{C}$ et γ un contour paramétré par $s\colon [a, b] \to \mathbb{C}$. On dit que γ est inclus dans E, on écrit $\gamma \subset E$, pour dire $s([a, b]) \subset E$;

---

c. On dit aussi continue et C^1 par morceaux.

d. Si $t \in \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, cela signifie que les dérivées à gauche et à droite en tt sont non nulles, si $t = a_0$ cela signifie que la dérivée à droite en t est non nulle, si $t = a_n$ cela signifie que la dérivée à gauche en t est non nulle

e. Comme u' ne s'annule pas, la fonction réciproque de u est aussi une bijection de classe C^1 dont la dérivée ne s'annule pas.

2) Une fonction f est continue sur le contour γ paramétré par $s\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ si $f \circ s$ est continue sur $[a,b]$.

Définition 65– *Soit γ un contour paramétré par un chemin $s\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ de subdivision adaptée $(a_0, \dots, a_n)$. Soit f une fonction continue sur γ. L'intégrale de f le long de γ est*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(s(t))\, s'(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(s(t))\, s'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 66–
Vérifier que la définition précédente est indépendante du choix de chemin utilisé pour représenter le contour.

Exercice 67–
Soit $z_0 \in \Omega$. On suppose que $z - z_0 \in \Omega$ pour tout $z \in \Omega$. Si γ est un contour de Ω paramétré par le chemin $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, on note $z_0 + \gamma$ le contour paramétré par

$$\begin{array}{rccc} \beta & : & [a,b] & \to \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto \quad z_0 + \alpha(t). \end{array}$$

Montrer que

$$\int_\gamma f = \int_{z_0+\gamma} f(z - z_0)\, \mathrm{d}z.$$

Exercice 68–
Soit $k \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}^{+*}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On note $C_k(z_0, R)$ le cercle de centre z_0 et de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique.

i) Donner une paramétrisation de $C_k(z_0, R)$.

ii) Montrer que l'intégrale le long de $C_k(z_0, R)$ de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{z_0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z - z_0}. \end{array}$$

est $2ik\pi$.

iii) Soit γ un arc de cercle de centre z_0 et rayon R. On note $\alpha \in [0, 2\pi[$ l'angle décrit par cet arc de cercle. Montrer que l'intégrale le long de γ de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{z_0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z - z_0}. \end{array}$$

est $i\alpha$.

Exercice 69–
Étant donné un contour $\gamma \subset \Omega$, on note $\overleftarrow{\gamma}$ le contour d'orientation opposée. Si $s\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin paramétrant γ, alors un chemin paramétrant $\overleftarrow{\gamma}$ est

$$\begin{array}{cccc} \overleftarrow{s} & : & [a,b] & \to & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & s(a+b-t). \end{array}$$

Montrer que pour tout fonction f continue sur Ω, on a

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f = -\int_{\gamma} f.$$

Exercice 70–
Soit $\gamma_1 \subset \Omega$ un contour paramétré par $s_1\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 \subset \Omega$ un contour paramétré par $s_2\colon [c,d] \to \mathbb{C}$. On suppose que les contours γ_1 et γ_2 se recollent, autrement dit que $s_2(c) = s_1(b)$. Un autre paramétrage de γ_1 est

$$\begin{array}{ccc} \left[0, \frac{1}{2}\right] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & s_1\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)a + tb\right). \end{array}$$

Un autre paramétrage de γ_2 est

$$\begin{array}{ccc} \left[\frac{1}{2}, 1\right] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & s_2\left(-2(t-1)c + 2\left(t - \frac{1}{2}\right)d\right). \end{array}$$

Soit alors $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ le contour obtenu en recollant les contours γ_1 et γ_2 dans cet ordre. Un paramétrage de $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ est le chemin

$$\begin{array}{ccccc} s_1 \oplus s_2 & : & [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} s_1\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)a + tb\right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ s_2\left(-2(t-1)c + 2\left(t - \frac{1}{2}\right)d\right) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \end{array}$$

Montrer que si f est continue sur Ω, alors

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Définition 71– *Soit γ un contour paramétré par un chemin $s\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. La longueur de γ est*

$$\mathrm{Long}(\gamma) = \int_a^b |s'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 72– Soit $(a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à s. Alors,

$$\mathrm{Long}(\gamma) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} |s'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $|s'|$ est continue sur chacun des intervalles $[a_j, a_{j+1}]$. Les intégrales de $|s'|$ sur ces intervalles sont donc finies et la longueur de γ est finie.

Exercice 73–
Vérifier que la définition précédente est indépendante du choix de chemin utilisé pour représenter le contour.

Exercice 74–

1. Calculer la longueur du carré de l'exercice 62.
2. Calculer la longueur d'un cercle de rayon 1 centré en 0.

Exercice 75–
Soit γ un contour reliant les complexes distincts z_0 et z_1. Soit $s\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un paramétrage de γ.

1. Montrer que
$$|z_1 - z_0| = \left|\int_a^b s'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$
2. En déduire que le contour de plus petite longueur reliant z_0 à z_1 est la droite.

Lemme 76- *Soit γ un contour et f une fonction continue sur γ. Alors,*

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot \mathrm{Long}(\gamma).$$

Démonstration. Soit $s\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin paramétrant γ. On a

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq \left|\int_a^b f(s(t))\, s'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \max_{t\in[a,b]} |f(s(t))| \int_a^b \left|s'(t)\right|\mathrm{d}t.$$

l'existence du maximum résultant de la continuité de $f \circ s$ sur le compact $[a,b]$. □

3.2) Primitive d'une fonction holomorphe

Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction, une *primitive* de f sur Ω est une fonction holomorphe $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ dont f est la dérivée :

$$F'(z) = f(z) \qquad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

Proposition 77- *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que f admet une primitive F sur Ω. Soit γ un contour contenu dans Ω. On note z_1 le point de départ de γ et z_2 son point d'arrivée. Alors*

$$\int_\gamma f = F(z_2) - F(z_1).$$

Démonstration. Soit $s\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin paramétrant γ et $(a_0, \dots, a_{n_1})$ une subdivision adaptée. Alors,

$$\int_\gamma f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(s(t))\, s'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Pour chaque entier i, on écrit

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(s(t))\, s'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{a_i}^{a_{i+1}} F'(s(t))\, s'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{a_i}^{a_{i+1}} (F \circ s)'.$$

Ainsi,

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(s(t))\, s'(t)\, \mathrm{d}t = F(s(a_{i+1})) - F(s(a_i)).$$

Il ne reste plus qu'à sommer

$$\int_\gamma f = \sum_{i=0}^{n-1} F(s(a_{i+1})) - F(s(a_i)) = F(a_n) - F(a_0).$$

□

Exercice 78–
Si une fonction continue admet une primitive sur Ω, quelle est son intégrale le long d'un chemin fermé contenu dans Ω?

Exercice 79–
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. La fonction

$$z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$$

admet-elle une primitive sur $\mathbb{C} - \{z_0\}$?

Une importante conséquence de la proposition 77 est la proposition suivante.

***Proposition* 80-** *On suppose que l'ouvert Ω est connexe. Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe de dérivée nulle :*

$$f'(z) = 0 \quad \textit{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Alors, f est constante sur Ω.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. On veut montrer que, pour tout $z \in \Omega$, on a $f(z) = f(z_0)$. Puisque Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, il est connexe par arc. Il existe donc un contour γ reliant z_0 à z. On a alors

$$\int_\gamma f' = f(z) - f(z_0).$$

Mais comme $f' = 0$, alors f' est continue et

$$\int_\gamma f' = 0.$$

□

L'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit *étoilé* s'il existe $z^* \in \Omega$ tel que, pour tout $z \in \Omega$, le segment reliant z^* à z est contenu dans Ω. Autrement dit, l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit *étoilé* s'il existe $z^* \in \Omega$ tel que, pour tout $z \in \Omega$ on a

$$\{z^* + t(z - z^*),\ t \in [0,1]\} \subset \Omega.$$

Un ouvert étoilé est connexe par arcs.

Exercice 81–
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des ouverts étoilés ?

i) $\mathbb{C}$;
ii) $\mathbb{C} - \{z_0\}$, $(z_0 \in \mathbb{C})$;
iii) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $(R > 0)$;
iv) $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, $(R > r > 0)$;
v) $\mathbb{C} - D$ où D est une droite ;
vi) $\mathbb{C} - D$ où D est une demi-droite.

On va montrer que toute fonction holomorphe sur un ouvert étoilé possède une primitive.

Le diamètre $\mathrm{Diam}(K)$ d'un ensemble compact (donc borné) K de $\mathbb{C}$ est la plus grande distance entre ses points. Dans l'exercice 82, on montre que le diamètre d'un triangle plein est la longueur de son plus grand côté.

Exercice 82–
Soit a, b et c trois nombres complexes. On définit le triangle plein de sommet a, b et c par

$$T = \{\alpha a + \beta b + \gamma c,\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{+3},\ \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

i) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\max\{|z' - z| : z' \in T\} = \max(|z-a|, |z-b|, |z-c|).$$

ii) En déduire que

$$\max\{|z' - z| : (z', z) \in T \times T\} = \max(|b-a|, |c-b|, |a-c|).$$

***Lemme* 83** (Théorème de Goursat)- *Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω. Soit T un triangle plein contenu dans Ω. On note ∂T le triangle constituant le bord de T. Alors,*

$$\int_{\partial T} f = 0.$$

Démonstration. Pour tout triangle plein $\mathcal{T}$ inclus dans Ω, on pose

$$\phi(\mathcal{T}) = \frac{1}{\text{Diam}(\mathcal{T})^2}\left|\int_{\partial \mathcal{T}} f\right|.$$

Fixons un triangle plein T contenu dans ω. On va montrer que $\phi(T) = 0$ d'où l'on déduit

$$\int_{\partial T} f = 0.$$

Étape 1 – Construction d'un processus. Partant d'un triangle plein $\mathcal{T}$ contenu dans Ω, marquons les milieux de chacun de ses côtés. Reliant chacun de ces milieux, on obtient quatre triangles pleins $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ et $\mathcal{T}_4$ contenus dans Ω. Ayant fixé une orientation sur $\mathcal{T}$, on induit une orientation sur chacun des quatre triangles. Les côtés de ces quatre triangles qui ne sont pas supportés par des côtés de $\mathcal{T}$ sont des chemins opposés de triangles distincts (voir la figure 1 page ci-contre).
On a donc

$$\int_{\partial \mathcal{T}} f = \int_{\partial \mathcal{T}_1} f + \int_{\partial \mathcal{T}_2} f + \int_{\partial \mathcal{T}_3} f + \int_{\partial \mathcal{T}_4} f.$$

En particulier, parmi $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ et $\mathcal{T}_4$ il existe un triangle, que nous notons $s(\mathcal{T})$ tel que

$$\left|\int_{\partial s(\mathcal{T})} f\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial \mathcal{T}} f\right|.$$

Puisque $\text{Diam}(s(\mathcal{T})) = \text{Diam}(\mathcal{T})/2$, on a donc

$$\phi(s(\mathcal{T})) \geq \phi(\mathcal{T}). \tag{9}$$

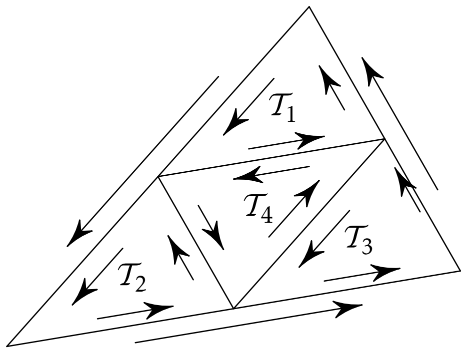


FIGURE 1 – Processus de découpage de $\mathscr{T}$.

Étape 2 – Construction d'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de triangles emboîtés. On définit une suite de triangles pleins $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\begin{cases} T_0 = T \\ T_{n+1} = s(T_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 0$, on a $T_{n+1} \subset T_n$ et $\operatorname{Long}(\partial T_n) = 2^{-n} \operatorname{Long}(\partial T)$ puis $\operatorname{Diam}(T_n) = 2^{-n} \operatorname{Diam}(T)$. Grâce à (9), la suite $(\phi(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de réels positifs.

Étape 3 – La suite $(\phi(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de compacts emboîtés. leur intersection est donc un complexe que l'on note z_0. La fonction f est holomorphe sur Ω et en particulier en z_0. Définissons une fonction ϵ en posant

$$\epsilon(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) & \text{si } z \in \Omega - \{z_0\}\,; \\ 0 & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur Ω de limite 0 en z_0. Elle vérifie

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\epsilon(z)$$

pour tout $z \in \Omega$. La fonction affine $z \mapsto f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ admet une primitive sur $\mathbb{C}$. Son intégrale le long de n'importe lequel des triangles ∂T_n est donc nulle. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\int_{\partial T_n} f = \int_{\partial T_n} (z - z_0)\epsilon(z)\,\mathrm{d}z.$$

La fonction $|\epsilon|$ est continue sur le compact ∂T_n, soit $z_n \in \partial T_n$ tel que

$$\max_{z\in\partial T_n} |\epsilon(z)| = |\epsilon(z_n)|.$$

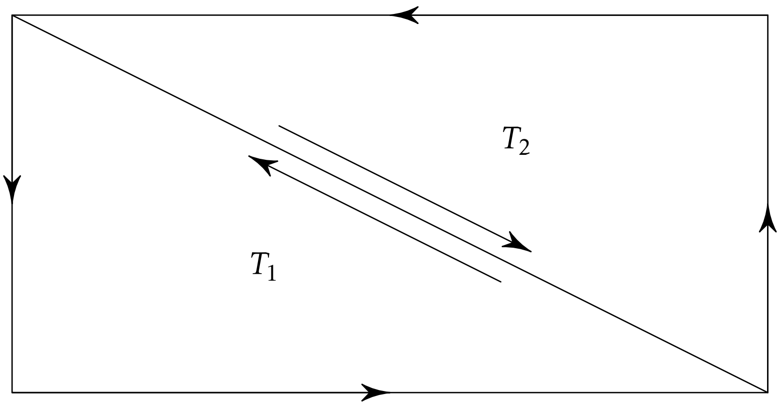


FIGURE 2 – Découpage d'un rectangle en deux triangles.

On obtient

$$\left|\int_{\partial T_n} f\right| \leq \mathrm{Long}(\partial T_n)\,\mathrm{Diam}(T_n)|\epsilon(z_n)|.$$

On a donc

$$\phi(T_n) \leq \frac{\mathrm{Long}(\partial T_n)}{\mathrm{Diam}(T_n)} \max_{z\in\partial T_n} |\epsilon(z)| = \frac{\mathrm{Long}(\partial T)}{\mathrm{Diam}(T)}|\epsilon(z_n)|.$$

On a $|z_n - z_0| \leq \mathrm{Diam}(T_n) \leq 2^{-n}\,\mathrm{Diam}(T)$. Lorsque n tend vers l'infini, on en déduit que z_n tend vers z_0 et donc $\epsilon(z_n)$ tend vers 0. On en déduit que $\phi(T_n)$ tend vers 0.

Étape 4 - La suite $(\phi(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, positive et tend vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \phi(T) = \phi(T_0) \leq \phi(T_n).$$

En prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on en tire $\phi(T) = 0$.

□

Considérons un rectangle $\mathscr{R}$. On construit deux triangles T_1 et T_2 comme figure 2. Une orientation de $\mathscr{R}$ induit une orientation sur T_1 et T_2 la diagonale est parcourue en sens opposés selon qu'on parcourt T_1 ou T_2. Sommant une fonction f continue sur T_1 et T_2 le long de T_1 puis le long T_2, les contributions le long de la diagonale sont opposées. On a donc

$$\int_{\mathscr{R}} f = \int_{T_1} f + \int_{T_2} f.$$

Corollaire 84- *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si $\mathscr{R}$ est un rectangle inclus, ainsi que son intérieur, dans Ω alors*

$$\int_{\mathscr{R}} f = 0.$$

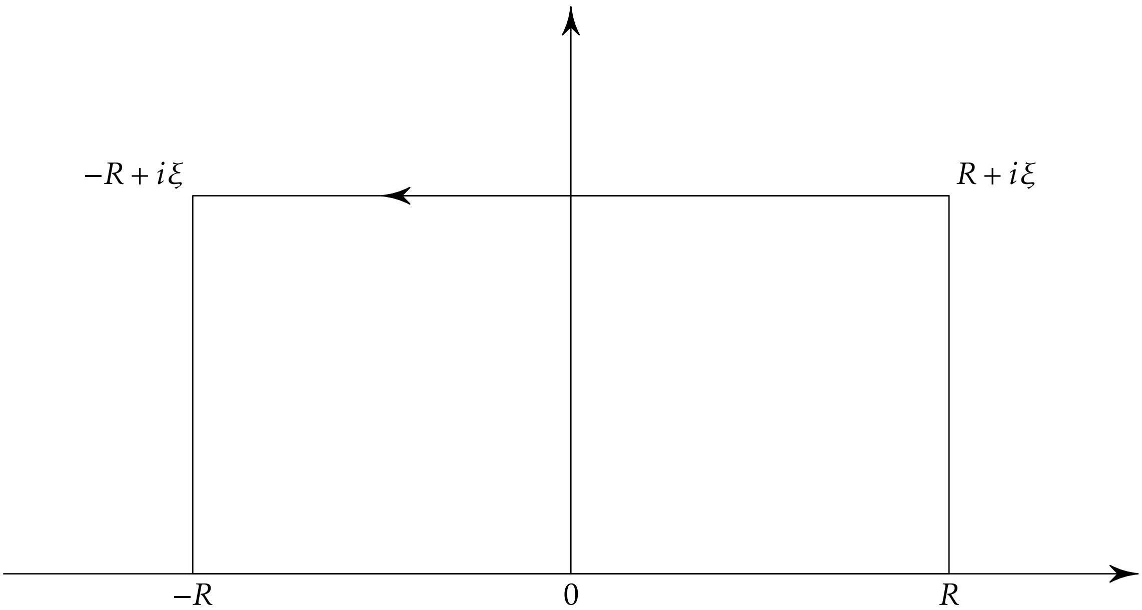


FIGURE 3 - Le contour γ_R.

Ce corollaire est utile au calcul d'intégrale, comme le montre le calcul suivant.
Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on définit

$$I(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{2i\pi x\xi} \,\mathrm{d}x.$$

La fonction $x \mapsto e^{-\pi x^2} e^{2i\pi x\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| e^{-\pi x^2} e^{2i\pi x\xi} \right| \leq e^{-\pi x^2}.$$

La fonction $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ tend vers 0 en $\pm\infty$. Il existe donc $x_0 > 0$ tel que si $|x| \geq x_0$, alors

$$\left| e^{-\pi x^2} e^{2i\pi x\xi} \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Par le critère de Riemann, on en déduit la convergence normale de $I(\xi)$. Nous allons exprimer $I(\xi)$ en fonction de $I(0)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Dans un premier temps, supposons $\xi > 0$. Si $R > 0$, on note γ_R le contour de la figure 3. Considérons la fonction f définie par

$$f(z) = e^{-\pi z^2} e^{2i\pi z\xi}.$$

Elle est entière. On pose

$$J(R) = \int_{\gamma_R} f.$$

On a $J(R) = 0$. On écrit $J(R) = J_0(R) + J_1(R) + J_2(R) + J_3(R)$ avec

$$J_0(R) = \int_{[-R,R]} f = \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2} e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x,$$

$$J_1(R) = \int_{[R,R+i\xi]} f = i\int_0^{\xi} e^{-\pi(R+it)^2} e^{2i\pi(R+it)\xi}\,\mathrm{d}t,$$

$$J_2(R) = \int_{[R+i\xi,-R+i\xi]} f = -\int_{-R}^{R} e^{-\pi(t+i\xi)^2} e^{2i\pi(t+i\xi)\xi}\,\mathrm{d}t,$$

et

$$J_3(R) = \int_{[-R+i\xi,-R]} f = -i\int_0^{\xi} e^{-\pi(-R+it)^2} e^{2i\pi(-R+it)\xi}\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale $I(\xi)$ étant convergente, $J_0(R)$ admet une limite lorsque R tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{R\to+\infty} J_0(R) = I(\xi).$$

On en déduit que $J_1(R) + J_2(R) + J_3(R)$ a une limite lorsque R tend vers $+\infty$ et que

$$I(\xi) = -\lim_{R\to+\infty} \left(J_1(R) + J_2(R) + J_3(R)\right).$$

Soit $R > 0$, alors

$$|J_1(R)| \leq \int_0^{\xi} e^{-\pi(R^2-t^2)} e^{-2\pi t\xi}\,\mathrm{d}t = e^{-\pi R^2}\int_0^{\xi} e^{\pi(t^2-2\xi t)}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que $J_1(R)$ admet une limite lorsque R tend vers $+\infty$ et que

$$\lim_{R\to+\infty} J_1(R) = 0.$$

Soit $R > 0$. Alors,

$$|J_3(R)| \leq \int_0^{\xi} e^{-\pi(R^2+t^2)} e^{-2\pi t\xi}\,\mathrm{d}t = e^{-\pi R^2}\int_0^{\xi} e^{-\pi(t^2+2t\xi)}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que $J_3(R)$ admet une limite lorsque R tend vers $+\infty$ et que

$$\lim_{R\to+\infty} J_3(R) = 0.$$

Enfin, soit $R > 0$. On a

$$J_2(R) = -e^{-\pi\xi^2}\int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Comme l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge, alors $J_2(R)$ admet une limite lorsque R tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{R\to+\infty} J_2(R) = -e^{-\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = -I(0)e^{-\pi\xi^2}.$$

On a donc
$$I(\xi) = I(0)e^{-\pi\xi^2} \tag{10}$$
pour tout $\xi > 0$.

Supposons maintenant $\xi < 0$. On a
$$I(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi x|\xi|} \, \mathrm{d}x.$$
Par un changement de variable $u = -x$, on a
$$I(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} e^{2i\pi u|\xi|} \, \mathrm{d}x.$$
Grâce à (10), on trouve $I(\xi) = I(0)e^{-\pi|\xi|^2}$. Ainsi, on a
$$I(\xi) = I(0)e^{-\pi\xi^2}$$
pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ (pour $\xi = 0$ c'est immédiat).

Exercice 85–
Le but de cet exercice est de calculer
$$I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} \, \mathrm{d}x.$$

1) Montrer que
$$I(0)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$
2) En déduire que
$$I(0)^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$
3) Montrer que $I(0) = 1$.

Une première conséquence du théorème de Goursat est l'existence d'une primitive pour une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. On a besoin, pour établir ce résultat du lemme géométrique suivant.

***Lemme* 86-** *Soit Ω un ouvert étoilé par rapport à z^*. Soit z_0 et z deux points de Ω. On suppose que le segment $[z_0, z]$ est inclus dans Ω. Alors, le triangle plein dont les sommets sont z_0, z et z^* est inclus dans Ω.*

Démonstration. Soit $u \neq z^*$ un nombre complexe du triangle plein. On note v l'intersection de la droite passant par z^* et u et de celle passant par z et z_0. Le complexe v appartient au segment reliant z et z_0. Le point v est donc dans Ω. Comme Ω est étoilé par rapport à z^*, tout le segment $[v, z^*]$ est dans Ω. Le complexe u appartient à ce segment. En particulier, u est dans Ω. □

Théorème 87– *Une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé admet une primitive sur cet ouvert étoilé.*

Démonstration. Considérons une fonction f holomorphe sur Ω qu'on suppose étoilé. Soit $z^* \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z^*, z]$ reliant z^* à z est contenu dans Ω. Soit $z_0 \in \Omega$, nous voulons construire une fonction dont la dérivée en z_0 est $f(z_0)$. Pour tout $z \in \Omega$, on définit

$$F(z) = \int_{[z^*,z]} f.$$

Alors,

$$-F(z_0) + F(z) = \int_{\overline{[z^*,z_0]}\oplus[z^*,z]} f = \int_{[z_0,z^*]\oplus[z^*,z]} f.$$

Comme Ω est ouvert, soit $\rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$. Pour tout $z \in D(z_0, \rho)$, le triangle plein dont les sommets sont z^*, z et z_0 est inclus dans Ω. Grâce au théorème de Goursat, on a alors

$$\int_{[z_0,z^*]\oplus[z^*,z]\oplus[z,z_0]} f = 0$$

d'où

$$\int_{[z_0,z^*]\oplus[z^*,z]} f = -\int_{[z,z_0]} f = \int_{[z_0,z]} f.$$

On en déduit

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} f.$$

D'autre part,

$$\int_{[z_0,z]} \mathrm{d}w = 1$$

donc

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} [f(w) - f(z_0)]\,\mathrm{d}w.$$

Le lemme 76 implique alors

$$\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| \leq \max_{w\in[z_0,z]} |f(w) - f(z_0)|.$$

Par continuité de f, le maximum du terme de droite tend vers 0 lorsque z tend vers $z_0$et donc

$$\lim_{z\to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = f(z_0)$$

ce qu'il nous fallait démontrer. □

Remarque 88– On retient de cette preuve le fait suivant. Si f est holomorphe sur Ω qu'on suppose étoilé par rapport à $z^* \in \Omega$. Alors, la fonction F définie par

$$F(z) = \int_{[z^*,z]} f$$

est holomorphe sur Ω de dérivée f.

De la proposition 77 et du théorème 87, on déduit immédiatement le théorème de Cauchy suivant.

***Proposition* 89** (Théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés)- *On suppose l'ouvert Ω étoilé. Soit γ un contour contenu dans Ω. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Alors*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Remarque 90– Un ouvert *élémentaire* est un ouvert Ω ayant la propriété suivante : toute fonction holomorphe sur Ω admet une primitive holomorphe sur Ω. Il faut noter que nous avons démontré que le théorème de Cauchy est valable pour tout ouvert élémentaire.

Exercice 91–
L'objet de cet exercice est de démontrer la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

On définit la fonction f en posant

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tous nombres réels strictement positifs R et ϵ, on note γ_R le demi-cercle de centre O, rayon R constitué des complexes ayant leur argument dans $[0,\pi]$ parcouru dans le sens trigonométrique et $\overleftarrow{\gamma_\epsilon}$ le demi-cercle de centre O, rayon ϵ constituédes complexes ayant leur argument dans $[0,\pi]$ parcouru dans le sens antitrigonométrique (voir la figure 4 page suivante).

i) Montrer que f s'étend en une fonction entière (pour l'holomorphie en 0, on pourra écrire le développement en série entière de f).

ii) Que vaut l'intégrale

$$\int_{\gamma_R \oplus [-R,-\epsilon] \oplus \overleftarrow{\gamma_\epsilon} \oplus [\epsilon,R]} f?$$

iii) Calculer la limite lorsque R tend vers $+\infty$ des intégrales

$$\int_{[-R,-\epsilon]} f, \quad \int_{[\epsilon,R]} f \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_R} f.$$

iv) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = -i/z + E(z)$ avec E bornée au voisinage de 0.

v) Calculer la limite lorsque ϵ tend vers 0 de

$$\int_{\overleftarrow{\gamma_\epsilon}} f.$$

vi) Conclure.

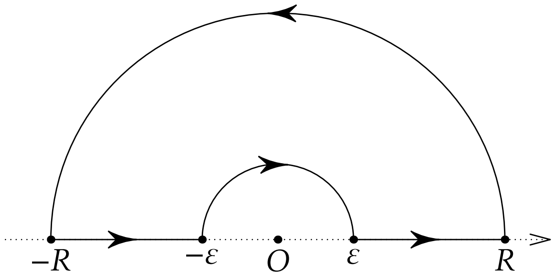


FIGURE 4

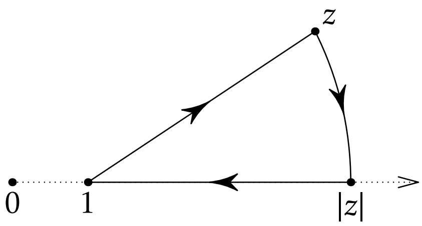


FIGURE 5

3.3) Logarithmes complexes

Exercice 92 (Détermination principale du logarithme complexe)–

i) Montrer que $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ est un ouvert étoilé (par exemple par rapport à 1).

ii) Soit $z \in U$. On définit son *logarithme complexe* par

$$\ln(z) = \int_{[1,u]} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}$$

où $[1, u]$ est le segment reliant 1 à u. Montrer que ln est holomorphe et donner sa dérivée. Si $x \in \mathbb{R}^{+*}$, comprendre pourquoi $\ln(x)$ est le logarithme néperien de x.

iii) Pour $z \in U$, on note $\arg(z)$ son argument compris dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. En considérant le contour obtenu en recollant le segment $[1, z]$, un arc de cercle de centre 0 et de rayon $|z|$ puis le segment $[|z|, 1]$ (voir la figure 5 page précédente), montrer que

$$\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z). \tag{11}$$

iv) L'égalité (11) permet d'étendre la définition du logarithme à $\mathbb{C}^*$ (la fonction obtenue n'est a priori pas holomorphe sur $\mathbb{C}^*$). On fixe $\theta \in]-\pi, \pi] - \{0\}$.

a) Si $r > 0$, que vaut $\ln(-r)$?

b) Quelles sont les limites en $-\pi$ et en π de $\theta \mapsto \ln(re^{i\theta})$?

c) Quelle est la limite lorsque le réel t tend vers 0 de

$$\ln\left(|t|e^{i\theta}\right) - \ln\left(-|t|e^{i\theta}\right) ?$$

v) Si $z \in U$, que vaut $\exp(\ln(z))$?

vi) En utilisant le principe du prolongement analytique et le développement en série de la fonction de la variable réelle $x \mapsto \ln(1 - x)$, montrer que

$$\ln(1 - z) = -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{z^j}{j}$$

pour tout $z \in U$ vérifiant $|z| < 1$.

vii) Que vaut $\ln\left(e^{8i\pi}\right)$? Exhiber une égalité satisfaite par le logarithme néperien réel qui ne s'étend pas au logarithme complexe.

viii) Comparer les deux nombres complexes :

$$\ln\left(i(i-1)\right) \quad \text{et} \quad \ln(i) + \ln(i-1).$$

Exhiber une égalité satisfaite par le logarithme néperien réel qui ne s'étend pas au logarithme complexe.

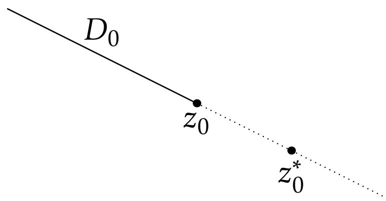


FIGURE 6

L'existence de la détermination principale du logarithme permet de définir la notion de puissance complexe d'un nombre complexe.

Définition 93— *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, on définit*

$$z^\lambda = e^{\lambda \ln z}.$$

La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^\lambda \end{array}$$

est holomorphe.

Le logarithme étudié dans l'exercice 92 résulte du choix de faire de $\mathbb{C}^*$ un ouvert étoilé en lui retirant la demi-droite $\mathbb{R}^-$ et en prenant comme chemin d'intégration un segment partant de 1. Ce choix conduit à ce qu'on appelle la *détermination principale* du logarithme. D'autres choix sont possibles qu'on étudie maintenant.

Soit z_0 dans $\mathbb{C}$. La fonction

$$f\colon z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{z_0\}$. Choisissons D_0 une demi-droite d'extrémité z_0. Sur la demi-droite d'extrémité z_0, de même direction que D_0 et qui n'est pas D_0, on choisit un complexe z_0^* (voir la figure 6) [f]. L'ouvert $\mathbb{C} - D_0$ est étoilé par rapport à z_0^*. Grâce au théorème 87, la fonction f admet des primitives sur $\mathbb{C} - D_0$. L'une d'entre elles est la fonction $\log_{D_0,z_0^*}$ définie pour tout $z \in \mathbb{C} - D_0$ par

$$\log_{D_0,z_0^*}(z) = \int_{[z_0^*,z]} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z_0}.$$

On a

$$\log_{D_0,z_0}(z_0^*) = 0.$$

Considérons sur $\mathbb{C} - D_0$ la fonction

$$z \mapsto (z - z_0)e^{-\log_{D_0,z_0^*}(z)}.$$

f. La détermination principale du logarithme correspond à $D_0 = \mathbb{R}^-$, $z_0 = 0$ et $z_0^* = 1$.

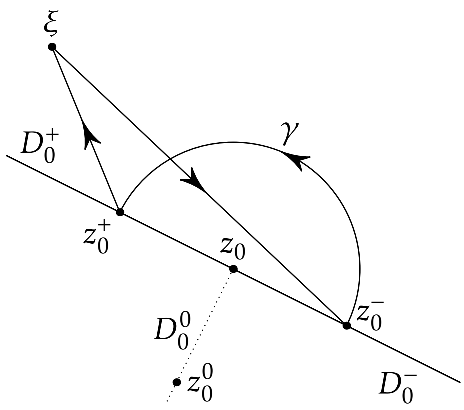


FIGURE 7

Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}-D_0$. Sa dérivée est nulle donc elle est constante : il existe C tel que, pour tout $z \in \mathbb{C} - D_0$ on a

$$e^{\log_{D_0, z_0^*}(z)} = C(z - z_0).$$

Évaluant cette égalité en $z = z_0^*$, on trouve $C = 1/(z_0^* - z_0)$. Ainsi,

$$e^{\log_{D_0, z_0^*}(z)} = \frac{z - z_0}{z_0^* - z_0}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} - D_0$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et D une droite passant par z_0. Il existe deux demi-droites d'origine z_0 de même direction que D. Sur chacune de ces demi-droites, on peut choisir un point distinct de z_0 de sorte que z_0 est le centre des deux points choisis. Si $\xi \in \mathbb{C} - D$, on veut comparer les valeurs en ξ des logarithmes relatifs à ces choix. Pour énoncer et démontrer le résultat, il faut donner une façon de distinguer les points et la position de ξ relativement à ces points.

La droite D partage $\mathbb{C}$ en deux demi-plans (voir la figure 7). On choisit deux points sur D de façon que z_0 soit leur centre. On note z_0^- et z_0^+ ces points de sorte que l'arc de cercle γ de centre z_0 passant dans le demi-plan déterminé par D et ξ et reliant z_0^- à z_0^+ dans cet ordre soit orienté dans le sens trigonométrique. On note D_0^+ la demi-droite d'origine z_0 passant par z_0^+ et D_0^- la demi-droite d'origine z_0 passant par z_0^-. On choisit dans le demi-plan ne contenant pas ξ un point z_0^0 sur la perpendiculaire à D contenant z_0. On note D_0^0 la demi droite d'origine z_0 passant par z_0^0.

On veut comparer $\log_{D_0^+, z_0^-}(\xi)$ et $\log_{D_0^-, z_0^+}(\xi)$. Le contour $[z_0^+, \xi] \oplus [\xi, z_0^-] \oplus \gamma$ est inclus dans l'ouvert étoilé $\mathbb{C} - D_0^0$. Sur cet ouvert étoilé, la fonction $z \mapsto 1/(z - z_0)$ est holomorphe. Il résulte alors du théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés que

$$\int_{[z_0^+, \xi]} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_{[\xi, z_0^-]} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 0$$

soit encore

$$\log_{D_0^-, z_0^+}(\xi) + \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \log_{D_0^+, z_0^-}(\xi).$$

puisque γ est un demi-cercle de centre z_0, l'intégrale de $z \mapsto 1/(z - z_0)$ sur γ vaut $i\pi$ (voir l'exercice 68). Ainsi,

$$\log_{D_0^+, z_0^-}(\xi) = \log_{D_0^-, z_0^+}(\xi) + i\pi.$$

On a montré le résultat suivant.

***Proposition* 94-** *Soit D une droite et $z_0 \in \mathbb{C}$ un point de cette droite. Soit a et b des points de D tels que z_0 est le centre de a et b. On note D_a* (resp. D_b) *la demi-droite portée par D, d'origine z_0 et contenant a* (resp. b). *Pour tout ξ n'appartenant pas à D, on a alors*

$$\log_{D_b, a}(\xi) = \log_{D_a, b}(\xi) + si\pi$$

avec

$$s = \begin{cases} 1 & \text{si le demi-cercle de centre } z_0 \text{ reliant } b \text{ à } a \text{ et contenu dans le même demi-plan determiné par } D \text{ que } \xi \text{ est orienté dans le sens positif ;} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.4) La formule de Cauchy

***Théorème* 95-** *Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Soit D un disque ouvert. On suppose que le disque fermé $\overline{D}$ est contenu dans Ω. Soit $C = \overline{D} - D$ le cercle bord de ce disque orienté dans le sens trigonométrique. Alors,*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w$$

pour tout $z \in D$.

Démonstration. Notons z_0 le centre de D et R son rayon. Comme $\overline{D}$ est inclus dans l'ouvert Ω, il existe un réel $R' > R$ tel que le disque ouvert D' de centre z_0 et de rayon R' est inclus dans Ω (et contient $\overline{D}$). Soit $z \in D$. Si $z \neq z_0$, notons $\mathscr{D}$ la demi-droite d'origine z de même direction que la droite passant par z et z_0 et ne contenant pas z_0. Si $z = z_0$, on choisit pour $\mathscr{D}$ n'importe quelle demi-droite d'origine z. L'ouvert $U = D' - \mathscr{D}$ est alors un ouvert étoilé. Dans U, on construit le contour en forme de «trou de serrure» décrit figure 8 page suivante. Pour tous $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$

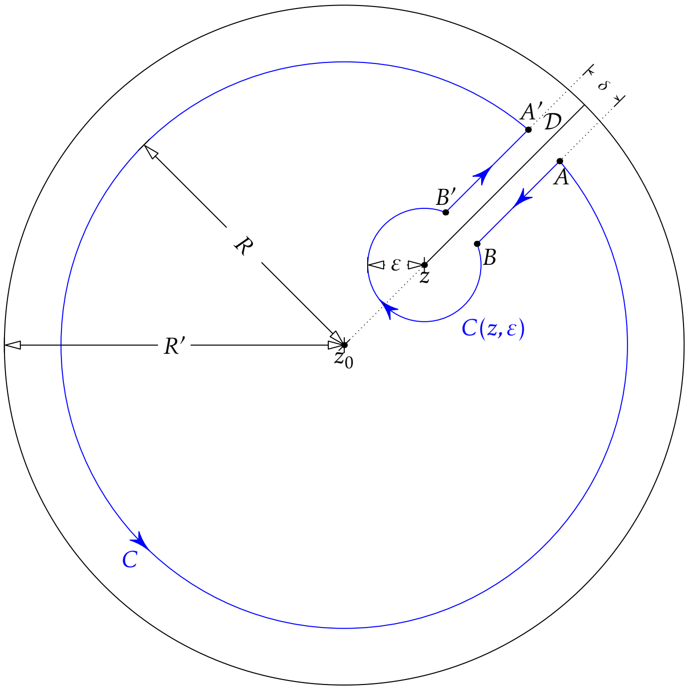


FIGURE 8 – Contour en forme de «trou de serrure» $\Gamma_{\delta,\epsilon}$.

suffisamment petits, notons $\Gamma_{\delta,\epsilon}$ ce contour [g]. On considère la fonction F définie par

$$F(w) = \frac{f(w)}{w-z}$$

pour tout $w \in \mathbb{C} - \{z\}$. Elle est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{z\}$ et donc en particulier sur l'ouvert étoilé U. Le théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés implique alors

$$\int_{\Gamma_{\delta,\epsilon}} F = 0. \tag{12}$$

L'intégrale sur les segments $[A, B]$ et $[B', A']$ est

$$(B-A)\int_0^1 F((1-t)A+tB)\,\mathrm{d}t + (A'-B')\int_0^1 F\big((1-t)B'+tA'\big)\,\mathrm{d}t.$$

g. On construit le cercle $C(z,\epsilon)$ de centre z et rayon ϵ avec ϵ suffisamment petit pour que $C(z,\epsilon) \subset D$. On oriente C dans le sens trigonométrique et $C(z,\epsilon)$ dans le sens antitrigonométrique. On trace deux parallèles à $\mathscr{D}$ distinctes toutes deux distantes de $\mathscr{D}$ de $\delta/2$. Partant de n'importe quel point de C qui ne soit pas compris entre les deux parallèles à $\mathscr{D}$, on parcourt C jusqu'au point A, première intersection de C avec l'une des deux parallèles. On parcourt la parallèle contenant A vers l'intérieur de C jusqu'à couper $C(z,\epsilon)$ en B. On parcourt $C(z,\epsilon)$ jusqu'à couper la deuxième parallèle en B'. On parcourt cette deuxième parallèle vers l'extérieur de C jusqu'à couper C en A'. On parcourt enfin C jusqu'au point de départ.

Lorsque δ tend vers 0, les complexes A et A' tendent vers un même complexe A_0 et les complexes B et B' tendent vers un même complexe B_0. On a donc [h]

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}(B-A)\int_0^1 F\left((1-t)A+tB\right)\mathrm{d}t+(A'-B')\int_0^1 F\big((1-t)B'+tA'\big)\mathrm{d}t\\ =(B_0-A_0)\left(\int_0^1 F\left((1-t)A_0+tB_0\right)\mathrm{d}t+\int_0^1 F\left((1-t)B_0+tA_0\right)\mathrm{d}t\right)=0\end{aligned}$$

par changement de variable $t\to 1-t$ dans l'une des deux intégrales.

L'intégrale sur l'arc de cercle reliant B à B' est

$$\int_{\widehat{BB'}} F=\int_{C(z,\epsilon)} F-i\epsilon\int_{-b}^{b} F\big(z+\epsilon e^{i\theta}\big)\,e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

où b est la mesure de l'angle des demi-droites $[zB)$ et $\mathscr{D}$ comprise entre 0 et $\pi/2$. Si δ tend vers 0 alors b tend vers 0. Ainsi,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\widehat{BB'}} F=\int_{C(z,\epsilon)} F.$$

De la même façon,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\widehat{A'A}} F=\int_{C} F.$$

On obtient donc

$$\int_{C(z,\epsilon)} F+\int_{C} F=0 \tag{13}$$

en prenant dans (12) la limite lorsque δ tend vers 0.

On écrit

$$\int_{C(z,\epsilon)} F=\int_{C(z,\epsilon)}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w+f(z)\int_{C(z,\epsilon)}\frac{\mathrm{d}w}{w-z}=\int_{C(z,\epsilon)}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w-2i\pi f(z)$$

(en se souvenant de l'exercice 68 et en prenant garde que $C(z,\epsilon)$ est parcouru dans le sens antitrigonométrique). Puisque f est holomorphe, la fonction

$$G\colon w\mapsto\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

est continue sur la compact $\overline{D}$. Elle est donc majorée en norme, par un réel que nous notons M. Ainsi,

$$\left|\int_{C(z,\epsilon)}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right|=\left|\int_0^{2\pi} G\big(z_0+\epsilon e^{i\theta}\big)\epsilon i e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right|\leq 2\pi M\epsilon.$$

h. La fonction $(t,\delta)\mapsto F\left((1-t)A+tB\right)$ est continue sur $[0,1]\times[0,1]$ et bornée par une constante puisque $[0,1]\times[0,1]$ est un compact de $\mathbb{C}$. Ceci justifie le passage à la limite.

On en tire
$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C(z,\epsilon)} F = -2i\pi f(z).$$
Faisant tendre ϵ vers 0 dans (13), on trouve
$$-2i\pi f(z) + \int_C F = 0$$
ce qui est la formule de Cauchy. □

Le corollaire 53 énonce qu'une fonction holomorphe est dérivable à tout ordre à condition que ses dérivées partielles premières soient continues. La formule de Cauchy permet de se débarrasser de cette condition et donne une formule pour les dérivées.

***Proposition* 96** (Égalité de Cauchy pour les dérivées)- *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors, f est dérivable au sens complexe à tout ordre. Soit $C \subset \Omega$ un cercle parcouru dans le sens trigonométrique. On suppose que l'intérieur est contenu dans Ω. Alors*
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$
pour tout z à l'intérieur de C et tout entier $n \geq 0$.

Démonstration. Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $C \subset \Omega$ un cercle parcouru dans le sens trigonométrique. Pour tout entier $n \geq 0$, notons $\mathscr{H}(n)$ l'hypothèse : pour tout z à l'intérieur de C, f est dérivable à l'ordre n en z et on a
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w.$$
L'hypothèse $\mathscr{H}(0)$ est vraie grâce à l'égalité de Cauchy. Soit $n \geq 0$ tel que l'égalité $\mathscr{H}(n)$ est vraie. Soit z à l'intérieur de C. Il existe $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D(z,r)}$ est contenu dans l'intérieur de C. Si le complexe h vérifie $|z+h| < r$, on a alors
$$\frac{f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z)}{h} = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{1}{h}\cdot\left[\frac{1}{(w-z-h)^{n+1}} - \frac{1}{(w-z)^{n+1}}\right] f(w)\,\mathrm{d}w$$
en appliquant $\mathscr{H}(n)$ à $z+h$ et z. Posant
$$A = \frac{1}{w-z-h} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{w-z}$$
on a
$$A^{n+1} - B^{n+1} = A^{n+1}\left(1 - \left(\frac{B}{A}\right)^{n+1}\right) = A^{n+1}\left(1 - \frac{B}{A}\right)\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{B}{A}\right)^j = (A-B)\sum_{j=0}^{n} B^j A^{n-j}$$

et donc

$$\frac{f^{(n)}(z+h)-f^{(n)}(z)}{h} = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{1}{(w-z)(w-z-h)}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{w-z}\right)^j\left(\frac{1}{w-z-h}\right)^{n-j} f(w)\,\mathrm{d}w.$$

Notons

$$F(w,h) = \frac{1}{(w-z)(w-z-h)}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{w-z}\right)^j\left(\frac{1}{w-z-h}\right)^{n-j} f(w).$$

Alors, en notant z_0 le centre de C et R son centre, on a

$$\int_C F(w,h)\,\mathrm{d}w = iR\int_0^{2\pi} F(z_0+Re^{i\theta},h)e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

La fonction $(\theta,h)\mapsto F(z_0+Re^{i\theta},h)e^{i\theta}$ est continue sur le compact $[0,2\pi]\times\overline{D(0,r)}$ où elle est bornée. La fonction

$$h\mapsto \int_C F(w,h)\,\mathrm{d}w$$

est donc continue sur $\overline{D(0,r)}$ et en particulier,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(z+h)-f^{(n)}(z)}{h} = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{1}{(w-z)^2}\cdot(n+1)\cdot\left(\frac{1}{w-z}\right)^n f(w)\,\mathrm{d}w.$$

On en déduit que $f^{(n)}$ est dérivable en z de dérivée

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\,\mathrm{d}w.$$

L'hypothèse $\mathscr{H}(0)$ est vraie. Pour tout entier $n\geq 0$, si l'hypothèse $\mathscr{H}(n)$ est vraie, alors l'hypothèse $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que l'hypothèse $\mathscr{H}(n)$ est vraie pour tout entier $n\geq 0$. $\square$

Exercice 97–

1) Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $D(0,1)$. On note

$$d = \sup_{(z,w)\in D(0,1)\times D(0,1)} |f(z) - f(w)|$$

le diamètre de l'image de f qui peut être infini.

a) Montrer que

$$2f'(0) = \int_{C(0,r)} \frac{f(w) - f(-w)}{w^2}\,\mathrm{d}w$$

quelque soit le réel $r \in]0,1[$.

b) En déduire que $2|f'(0)| \leq d$.

2) On définit la fonction sh par

$$\mathrm{sh}(w) = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$$

pour tout $w \in \mathbb{C}$. Soit $R > 0$. Calculer

$$\int_{C(0,R)} \frac{\mathrm{sh}(w)}{w^8}\,\mathrm{d}w.$$

En appliquant l'égalité de Cauchy pour les dérivées, on obtient immédiatement le corollaire suivant.

***Corollaire* 98** (Inégalité de Cauchy)- *Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Soit $z \in \Omega$ et $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D(z,r)}$ est contenu dans Ω. Alors*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left|f(z + re^{i\theta})\right|$$

pour tout entier $n \geq 0$.

3.5) Analycité des fonctions holomorphes

La proposition 50 énonce qu'une fonction holomorphe est analytique à condition que ses dérivées partielles premières soient continues. La formule de Cauchy permet de se débarrasser de cette condition et donc implique la synonymie des termes holomorphe et analytique.

Théorème 99– *Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Alors f est analytique sur Ω. Plus précisément, soit $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D(z_0,R)}$ soit contenu dans Ω. Notons $C(z_0,R)$ le disque bord de $\overline{D(z_0,R)}$ orienté dans le sens trigonométrique. Alors, si pour tout entier $n \geq 0$, on définit*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w,$$

on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

pour tout $z \in D(z_0,R)$.

Remarque 100– Grâce à la proposition 46, on a aussi

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. Si $z \in D(z_0,R)$ et $w \in C(z_0,R)$, alors

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{-1}.$$

Puisque

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{R} < 1$$

on a le développement en somme des termes d'une suite géométrique

$$\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n.$$

Ainsi,

$$\frac{f(w)}{z-w} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

La formule de Cauchy donne

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,R)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(z+Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^n}(z-z_0)^n\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{14}$$

La fonction $\theta \mapsto f(z+Re^{i\theta})$ est continue donc bornée sur le compact $[0,2\pi]$. D'autre part, $|z-z_0|<R$. On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left|f(z+Re^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta\cdot\left|\frac{z-z_0}{R}\right|^n \le 2\pi\|f\|_\infty\left(1-\left|\frac{z-z_0}{R}\right|\right)^{-1}<\infty.$$

Dans (14), on peut donc intervertir sommation et intégration pour obtenir,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^n}\,\mathrm{d}\theta\right)(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,R)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité démontre le théorème. □

On donne quelques conséquences de l'analycité. En premier lieu, on peut utiliser la synonymie des notions d'holomorphie et d'analycité pour énoncer les propositions 54 et 57 dans le cadre des fonctions holomorphes.

***Proposition* 101** (Principe des zéros isolés)- *Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0\in\mathbb{C}$.*

i) Si toutes les dérivées s'annulent en z_0, alors f est nulle au voisinage de z_0 ;

ii) sinon, il existe un voisinage de z_0 dans lequel f ne s'annule qu'en z_0.

Comme on l'a vu pour les fonctions analytiques (voir le corollaire 56), le principe des zéros isolés implique que si $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est holomorphe et si $K\subset\Omega$ est compact alors f s'annule un nombre fini de fois sur K.

Exercice 102–
Soit $z_0\in\mathbb{C}$ et $R>0$. L'objectif de cet exercice est de construire une fonction holomorphe sur $D(z_0,R)$ et y admettant une infinité de zéros.

1) Donner un exemple de fonction entière s'annulant une infinité de fois.
2) Montrer que l'application $z\mapsto\frac{1+z}{1-z}$ est une bijection holomorphe de $D(0,1)$ dans un ouvert qu'on précisera et en déduire une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ et s'y annulant une infinité de fois.
3) Construire une fonction holomorphe sur $D(z_0,R)$ et s'y annulant une infinité de fois.

***Théorème* 103** (Principe de prolongement analytique)- *Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ et $g:\Omega\to\mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω. On suppose que f et g coïncident sur une suite infinie de points distincts de Ω admettant une limite dans Ω. Alors, f et g coïncident sur Ω.*

Exercice 104–
On suppose que l'ouvert Ω est connexe. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que les dérivées de d'ordre $n \geq 1$ de f s'annulent en z_0. Montrer que f est constante sur Ω.

Exercice 105–
Soit f et g deux fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω. L'objectif de l'exercice est de montrer que si $fg = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$. Pour cela, on suppose que $f \neq 0$ et on doit montrer que $g = 0$.

1) Montrer qu'il existe $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $D(z_0, r)$.
2) Conclure.

Remarque 106– L'exercice 105 implique que l'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ est *intègre*.

Exercice 107–
L'objectif de cet exercice est de montrer que l'anneau des fonctions entières n'est pas factoriel[a]. Notons $\mathscr{H}(\Omega)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. C'est un anneau intègre dans lequel existe donc la notion d'élément *irréductible*. Dans ce contexte, la fonction $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ est irréductible si et seulement si elle n'est pas inversible, n'est pas la fonction nulle et l'égalité $f = gh$ avec g et h dans $\mathscr{H}(\Omega)$ implique que g ou h est inversible. On note $\mathscr{H}(\Omega)^\times$ le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{H}(\Omega)$.

1) Soit $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Montrer que $f \in \mathscr{H}(\Omega)^\times$ si et seulement si f ne s'annule pas sur Ω.
2) L'objectif de cette question est de montrer que les éléments irréductibles de $\mathscr{H}(\Omega)$ sont, à un facteur multiplicatif inversible près, les monômes unitaires.
   a) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathscr{H}(\Omega)^\times$. Montrer que la fonction $z \mapsto (z - z_0)k(z)$ est un élément irréductible de $\mathscr{H}(\Omega)$.
   b) Réciproquement, soit $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ irréductible. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathscr{H}(\Omega)^\times$ tels que f soit de la forme $z \mapsto (z - z_0)k(z)$.
   c) On rappelle qu'un élément p non nul et non inversible de l'anneau $\mathscr{H}(\Omega)$ est premier si, pour tous éléments a et b et c de $\mathscr{H}(\Omega)$, si $ab = cp$ alors il existe k dans $\mathscr{H}(\Omega)$ tel que $a = kp$ ou $b = kp$. Déterminer les éléments premiers de $\mathscr{H}(\Omega)$.
3) On suppose $\Omega = \mathbb{C}$ de sorte que $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ est l'anneau des fonctions entières. Peut-on écrire toute fonction non nulle et non inversible de $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ comme produit d'une fonction inversible et d'un nombre fini d'éléments irréductibles de $\mathscr{H}(\mathbb{C})$[b] ?
4) En utilisant l'exercice 102 page 58, reprendre la question précédente en supposant que Ω est une boule ouverte (non vide).

a. Un anneau est *factoriel* si tout élément non nul et non inversible s'écrit comme produit d'un élément inversible et d'un nombre fini d'éléments irréductibles et ceci de façon unique modulo permutation des éléments irréductibles et modulo produit des éléments irréductibles par des éléments inversibles. Dans un anneau factoriel, un élément est premier si et seulement si il est irréductible. L'exercice montre que dans l'ensemble des fonctions entières, un élément est premier si et seulement si il est irréductible mais que l'anneau des fonctions entières n'est pas factoriel.

b. Si l'on autorise des factorisation sous forme de produits infinis (à qui il faut donner un sens), on peut établir un théorème de factorisation (de Weierstraß dans le cas des fonctions entières.

Une conséquence frappante de l'inégalité de Cauchy et du principe des zéros isolés est le théorème de Liouville suivant.

***Théorème* 108** (Théorème de Liouville)- *Une fonction entière bornée est constante.*

Démonstration. On suppose que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et qu'il existe M tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Grâce à l'inégalité de Cauchy, on a

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \right| \leq M r^{-n}$$

pour tout entier $n \geq 0$ et tout $r > 0$. On fixe un entier $n \geq 1$ et on fait tendre r vers l'infini. On obtient $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Par le principe des zéros isolés (en particulier l'exercice 104) on en déduit que f est constante. □

Exercice 109–
Montrer que si une fonction entière a sa partie réelle bornée, alors elle est constante. (On pourra considérer l'exponentielle de la fonction.)

L'exercice suivant donne une démonstration pratiquement immédiate du théorème fondamental de l'algèbre, aussi appelé théorème de d'Alembert-Gauss. Ce théorème énonce que tout polynôme à coefficients complexes de degré supérieur ou égal à 1 admet une racine complexe.

Exercice 110–
Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes. Par l'absurde on suppose que P ne s'annule pas et on pose $f = 1/P$.

1. Montrer que f est entière.
2. Montrer que f est bornée.
3. Conclure.

L'inégalité de Cauchy et le principe de prolongement analytique admette comme conséquence le théorème suivant. Il implique que si une fonction f est holomorphe sur un ouvert connexe Ω et si elle n'est pas constante alors son module $|f|$ n'a pas de maximum, pas même de maximum local !

***Théorème* 111** (Principe du module maximum)- *Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert connexe Ω. Si $|f|$ admet un maximum local en un point de Ω, alors f est constante sur Ω.*

Démonstration. On suppose que $|f|$ admet un maximum local. Il existe donc $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$ et

$$\left| f\left(z_0 + r e^{i\theta}\right) \right| \leq |f(z_0)| \quad \text{pour tout } r \in [0, R[\text{ et tout } \theta \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

On pose $\rho = R/4$. Grâce au théorème 99 et à la remarque 100, on a

$$f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \rho^n e^{in\theta}. \tag{16}$$

On en déduit que [i]

$$\begin{aligned}\left|f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)\right|^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\frac{\overline{f^{(m)}(z_0)}}{m!}\rho^{n+m}e^{i(n-m)\theta}\\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{m=\max(0,-k)}^{+\infty}\frac{f^{(k+m)}(z_0)}{(k+m)!}\frac{\overline{f^{(m)}(z_0)}}{m!}\rho^{k+2m}\right)e^{ik\theta}.\end{aligned}$$

La fonction $\theta\mapsto\left|f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)\right|^2$ est continue, on l'intègre sur $[0,2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)\right|^2\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{m=\max(0,-k)}^{+\infty}\frac{f^{(k+m)}(z_0)}{(k+m)!}\frac{\overline{f^{(m)}(z_0)}}{m!}\rho^{k+2m}\right)e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

On veut intervertir l'intégration et la sommation en k. Pour cela on justifie que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{m=\max(0,-k)}^{+\infty}\frac{f^{(k+m)}(z_0)}{(k+m)!}\frac{\overline{f^{(m)}(z_0)}}{m!}\rho^{k+2m}e^{ik\theta}\right|\mathrm{d}\theta<\infty.$$

Le sommande de la somme en k est majoré par

$$2\pi\sum_{m=\max(0,-k)}^{+\infty}\left|\frac{f^{(k+m)}(z_0)}{(k+m)!}\right|\left|\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\right|\rho^{k+2m}.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy, on a

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|\le\left(\frac{R}{2}\right)^{-n}\max_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f\left(z_0+\frac{R}{2}e^{i\theta}\right)\right|.$$

En utilisant (15), on en déduit

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|\le(2\rho)^{-n}|f(z_0)|$$

et donc

$$\begin{aligned}2\pi\sum_{m=\max(0,-k)}^{+\infty}\left|\frac{f^{(k+m)}(z_0)}{(k+m)!}\right|\left|\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\right|\rho^{k+2m} &\le 2\pi|f(z_0)|^2\sum_{m=\max(0,-k)}^{+\infty}2^{-k-2m}\\ &= \frac{8\pi}{3}|f(z_0)|^2 2^{-|k|}.\end{aligned}$$

La somme en k est donc majorée par $8\pi|f(z_0)|^2$ et on peut intervertir avec l'intégration :

$$\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)\right|^2\mathrm{d}\theta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{m=\max(0,-k)}^{+\infty}\frac{f^{(k+m)}(z_0)}{(k+m)!}\frac{\overline{f^{(m)}(z_0)}}{m!}\rho^{k+2m}\right)\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

---

i. Le lecteur qui se souvient de son cours de théorie de Fourier et en particulier de la formule de Parseval peut se rendre directement en 17. Voir la remarque 112.

L'intégrale du membre de droite vaut 0 pour tout $k \neq 0$ et 2π pour $k = 0$. On obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{m=0}^{+\infty}\left|\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\right|^2 \rho^{2m}. \tag{17}$$

On a donc

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\right|^2 \rho^{2m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta - |f(z_0)|^2.$$

En utilisant (15) on a $\left|f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)\right|^2 \leq |f(z_0)|^2$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et donc

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\right|^2 \rho^{2m} \leq 0.$$

Chaque terme de la somme est positif ou nul. La seule possibilité pour que leur somme soit négative ou nulle est qu'ils soient tous nuls. On a donc $f^{(m)}(z_0) = 0$ pour tout $m \geq 1$. Par le principe des zéros isolés (en particulier l'exercice 104) on en déduit que f est constante. □

Remarque 112– On pourrait ramener à une ligne le passage de (16) à (17) en évoquant la formule de Parseval. Celle ci implique le résultat suivant. Si f est holomorphe sur Ω, soit $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D(z_0, R)}$ est inclus dans Ω. Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 R^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+Re^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Exercice 113–
On suppose que Ω est connexe et que $\overline{\Omega}$ est borné. On suppose que f est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. Montrer que f admet un maximum $\|f\|_\infty$ atteint sur la frontière $\overline{\Omega} - \Omega$ de Ω et que

$$|f(z)| < \|f\|_\infty \quad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

Exercice 114–
On suppose que Ω est connexe et f est holomorphe non constante sur Ω. Montrer que si $|f|$ admet un minimum local dans Ω, alors ce minimum est nécessairement nul. En particulier f s'annule au moins une fois dans Ω.

4 Fonctions méromorphes

4.1) Singularités d'une fonction

Si f est une fonction de la variable complexe, le nombre complexe z_0 est une *singularité isolée* de f si f est définie sur un voisinage épointé de z_0, c'est-à-dire sur un ensemble contenant un ensemble de la forme

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} = D(z_0, R) - \{z_0\}$$

pour un certain $R > 0$. Le but de cette partie est de décrire les singularités d'une fonction.

Définition 115— *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur V, un voisinage épointé de z_0. La singularité isolée z_0 est dite* illusoire[a] *si la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur $V \cup \{z_0\}$.*

a. On dit aussi *effaçable*.

Remarque 116— La singularité isolée z_0 est donc illusoire s'il existe une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe sur $V \cup \{z_0\}$ dont la restriction à V est f. Par le théorème de prolongement analytique, si elle existe la fonction $\widetilde{f}$ est unique.

***Théorème* 117** (Théorème de prolongement de Riemann)- *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur V, un voisinage épointé de z_0. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes.*

i) La singularité z_0 est illusoire ;

ii) La fonction f admet un prolongement en fonction continue sur $V \cup \{z_0\}$;

iii) La fonction f est bornée sur un voisinage épointé de z_0 ;

iv)

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0.$$

Démonstration. Les implications $i \Rightarrow ii$, $ii \Rightarrow iii$ et $iii \Rightarrow iv$ sont immédiates[j]. Supposons donc que f satisfait à iv et montrons i, c'est-à-dire que z_0 est illusoire. On définit g sur $V \cup \{z_0\}$ par

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = z_0 \,; \\ (z - z_0)^2 f(z) & \text{si } z \in V. \end{cases}$$

La fonction g est holomorphe sur V. D'autre part

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = (z - z_0) f(z)$$

et donc g est dérivable en z_0 de dérivée $g'(z_0) = 0$. La fonction g est donc holomorphe sur $V \cup \{z_0\}$. Soit $R > 0$ tel que $\overline{D(z_0, R)} \subset V \cup \{z_0\}$. Pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = (z-z_0)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!}(z-z_0)^n.$$

j. C'est-à-dire laissées en exercice au lecteur.

Pour tout $z \in D(z_0, R) - \{z_0\}$ on a donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!}(z - z_0)^n.$$

La série de droite fournit un prolongement holomorphe de f en z_0. □

Exercice 118–
Montrer que 0 est une singularité illusoire de la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 119–
Soit f et g deux fonctions entières. On suppose que $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f = \alpha g$.

i) Que se passe-t-il si g est la fonction constante égale à 0? Dans la suite, on suppose que g n'est pas la fonction constante égale à 0.
ii) On pose $h = f/g$. Pourquoi les zéros de g sont-ils des singularités isolées de h?
iii) Montrer que les singularités isolées de h sont illusoires.
iv) Conclure.

Définition 120– *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe non constamment nulle sur V, un voisinage épointé de z_0. La singularité isolée z_0 est appelée* pôle de f *si la fonction*

$$\frac{1}{f} : z \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z = z_0\,; \\ \dfrac{1}{f(z)} & \text{sinon} \end{cases}$$

est holomorphe sur un voisinage de z_0.

On généralise la notion d'ordre d'annulation d'un zéro (voir l'équation (8)).

Proposition 121- *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe non constamment nulle sur V, un voisinage épointé de z_0. On suppose que z_0 est un pôle de f. Alors, il existe un unique entier naturel non nul n, appelé* ordre du pôle z_0 *et une fonction h holomorphe sur un voisinage de z_0 et non nulle en z_0 telle que*

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^n}$$

pour tout z dans un voisinage épointé de z_0.

Démonstration. La fonction $1/f$ est holomorphe sur un voisinage U de z_0. D'après (8), il existe un unique entier $k \geq 0$ et une fonction g holomorphe sur U et non nulle en z_0 tels que

$$\frac{1}{f}(z) = (z - z_0)^k g(z).$$

Puisque $1/f$ s'annule en z_0, on a $k \geq 1$. La fonction g étant continue, il existe un voisinage $U' \subset U$ où elle ne s'annule pas. On a alors

$$f(z) = \frac{1/g(z)}{(z - z_0)^k}$$

pour tout $z \in U'$. □

Remarque 122— Il résulte de la preuve précédente que l'ordre du pôle z_0 de f est l'ordre du zéro z_0 de $1/f$.

Exercice 123—
Quelles sont les singularités de la fonction tan = sin / cos ? Lesquelles sont des pôles. Quels sont les ordres de ces pôles ?

Exercice 124—
On définit la fonction cotan = cos / sin. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Quelles sont les singularités de la fonction

$$z \mapsto \frac{\operatorname{cotan}(\pi n z)}{z} ?$$

Lesquelles sont des pôles. Quels sont les ordres de ces pôles ?

Exercice 125—
Soit f et g deux fonctions holomorphes au voisinage de z_0. On suppose que z_0 est un pôle de f d'ordre $v(f)$ et que z_0 est un pôle de g d'ordre $v(g)$.

i) Montrer que z_0 est un pôle de fg d'ordre $v(f) + v(g)$.
ii) Montrer que z_0 est une singularité illusoire de $f + g$ ou un pôle d'ordre inférieur ou égal à $\max(v(f), v(g))$.

De même que le théorème de prolongement de Riemann permet de caractériser les singularités illusoires, le théorème précédent permet de caractériser les pôles.

Théorème 126- *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe non constamment nulle sur V, un voisinage épointé de z_0. La singularité isolée z_0 est un pôle de f si et seulement si*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Démonstration. Si z_0 est un pôle de f alors, c'est un zéro de $1/f$ et par continuité de $1/f$, on obtient

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f}(z) = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Réciproquement, supposons que $|f|$ tend vers $+\infty$ en z_0. Alors, $1/f$ tend vers 0 en z_0. En particulier, $1/f$ est bornée au voisinage de z_0 et la singularité z_0 est illusoire. La fonction $1/f$ est donc holomorphe au voisinage de z_0 et en particulier, continue en z_0. Ainsi, z_0 est un zéro de $1/f$ et donc un pôle de f. □

4.2) Fonctions méromorphes

On généralise la notion d'holomorphie pour prendre en compte les pôles.

Définition 127– *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est méromorphe s'il existe une partie P de Ω discrète* [a] *dans Ω telle que*

i) La fonction f est holomorphe sur $\Omega - P$;

ii) Les points de P sont des pôles de f.

a. Il existe autour de tout point de P un voisinage dans Ω ne contenant pas d'autre point de P. Cette propriété est toujours satisfaite si P est finie.

Lorsqu'on dit qu'une fonction est méromorphe en z_0, on dit qu'elle est holomorphe sur un voisinage épointé de z_0 et qu'elle possède un pôle en z_0 un une singularité illusoire.

Définition 128– *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe non constamment nulle sur V, un voisinage épointé de z_0. La singularité isolée z_0 est dite* essentielle *si elle n'est pas illusoire et si ce n'est pas un pôle de f.*

Exercice 129–
Soit f la fonction définie par $f(z) = e^{1/z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe

i) Une direction suivant laquelle la limite de f en 0 est $+\infty$;

ii) Une direction suivant laquelle la limite de f en 0 est 0 ;

iii) Une direction suivant laquelle $f(z)$ oscille en restant borné lorsque z tend vers 0.

Le comportement des fonctions holomorphes au voisinage d'une singularité essentielle est très hiératique comme l'indique le théorème suivant.

***Théorème* 130** (Théorème de Casorati-Weierstrass)- *Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé $D(z_0, R) - \{z_0\}$. On suppose que z_0 est une singularité essentielle. Alors, l'image de $D(z_0, R) - \{z_0\}$ par f est dense dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Dire que l'image de $D(z_0, R) - \{z_0\}$ par f est dense dans $\mathbb{C}$ signifie la chose suivante : pour tout $w \in \mathbb{C}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $z \in D(z_0, R)$, $z \neq z_0$ tel que $|f(z) - w| \leq \epsilon$. Supposons, par l'absurde, que l'image de $D(z_0, R) - \{z_0\}$ par f n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. Soit alors $w \in \mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$ tels que, pour tout $z \in D(z_0, R)$, $z \neq z_0$ on a $|f(z) - w| > \epsilon$. La fonction

$$g : z \mapsto \frac{1}{f(z) - w}$$

est donc holomorphe sur $D(z_0, R) - \{z_0\}$. Comme

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \epsilon$$

pour tout $z \in D(z_0, R) - \{z_0\}$, la singularité z_0 est illusoire et g admet un prolongement holomorphe sur $D(z_0, R)$. Pour tout $z \in D(z_0, R)$ tel que $g(z) \neq 0$, on a

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w.$$

Si $g(z_0) = 0$, alors $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque z tend vers z_0 et alors z_0 est un pôle de f : ceci contredit le fait que z_0 est une singularité essentielle de f. Si $g(z_0) \neq 0$, alors f admet un prolongement holomorphe sur $D(z_0, R)$ et z_0 est une singularité illusoire de f : ceci contredit aussi le fait que z_0 est une singularité essentielle de f. □

5 Le théorème des résidus et applications

5.1) Résidu d'une fonction

On a vu que les fonctions holomorphes sur un disque admettent un développement en série entière en tout point de ce disque. On généralise ce résultat autour d'un pôle.

***Théorème* 131-** *Soit f holomorphe au voisinage épointé de z_0. On suppose que z_0 est un pôle d'ordre n de f. Alors, il existe une suite $(a_k)_{k \geq -n}$ de nombres complexes telle que*

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

au voisinage épointé de z_0.

Remarque 132– On dit que f admet un *développement de Laurent* en z_0.

Démonstration du théorème 131. Il existe une fonction h, holomorphe au voisinage de z_0 telle que $f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z)$. La fonction h est analytique : au voisinage épointé de z_0, on a

$$h(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

Le développement en série de Laurent de f s'obtient donc en posant $a_k = b_{k-n}$ pour tout $k \geq -n$. □

Définition 133— *Avec les notations du théorème 131, la somme*

$$\sum_{k=-n}^{-1} a_k (z - z_0)^k = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}$$

s'appelle la partie principale de f et le terme a_{-1} s'appelle le résidu *de f. On note*

$$a_{-1} = \underset{z=z_0}{Res}\, f(z).$$

Remarque 134— Le résidu d'une fonction en un point z_0 peut-être nul même si z_0 est un pôle de cette fonction. Pensez à $z \mapsto z^{-n}$ pour $n \geq 2$.

Exercice 135—
Soit f et g deux fonctions holomorphes non identiquement nulles au voisinage épointé de z_0.

i) On suppose que z_0 est un pôle d'ordre 1. Montrer que

$$\underset{z=z_0}{Res}\, f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \,;$$

ii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que z_0 est un pôle d'ordre k. Montrer que

$$\underset{z=z_0}{Res}\, f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right) \,;$$

iii) Si f est holomorphe en z_0 et si g possède un zéro simple en z_0, alors

$$\underset{z=z_0}{Res}\, \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Exercice 136–
Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe sur Ω. On suppose que f n'est pas la fonction constante nulle.

i) Montrer que f'/f est méromorphe sur Ω et que ses pôles, tous simples, sont les pôles et les zéros de f.
ii) Si z_0 est un pôle de f d'ordre $v(f)$, montrer que
$$\underset{z=z_0}{Res}\frac{f'(z)}{f(z)} = -v(f)\,;$$
iii) Si z_0 est un zéro de f d'ordre $v(f)$, montrer que
$$\underset{z=z_0}{Res}\frac{f'(z)}{f(z)} = v(f).$$

5.2) Indice d'un contour par rapport à un point

On rappelle la formule suivante (voir l'exercice 68) :
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_k(z_0,R)}\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = k$$
où $C_k(z_0,R)$ désigne le cercle de centre z_0 et rayon R parcouru k fois dans le sens trigonométrique.

Exercice 137–
En utilisant l'exercice 68 et la formule de Cauchy (voir le théorème 95), montrer que si $|a-z_0|<R$, alors
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_k(z_0,R)}\frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = k.$$

D'autre part, si $|z_0-a|>R$, considérons ρ un réel tel que $R<\rho<|z_0-a|$. La fonction
$$z\mapsto\frac{1}{z-a}$$
est holomorphe sur le disque $D(z_0,\rho)$ et $C_k(z_0,R)$ est un contour inclus dans l'ouvert étoilé $D(z_0,\rho)$. Grâce au théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés (théorème 89), on a donc
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_k(z_0,R)}\frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = 0.$$
En résumé, l'intégrale
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_k(z_0,R)}\frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z \tag{18}$$
est, au sens usuel du terme, le nombre de tours de $C_k(z_0,R)$ autour du point a.

Remarque 138— Noter que si le cercle de centre z_0 et rayon R est parcouru k fois ($k > 0$) dans le sens antitrigonométrique, alors l'intégrale (18) vaut $-k$ si a est à l'intérieur de cercle et 0 sinon.

Définition 139— *Soit γ un contour fermé ne contenant pas z_0. L'*indice *de γ par rapport à z_0, encore appelé nombre de tours de γ autour de z_0 est*

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

Remarque 140— Soit γ un contour fermé. On le suppose paramétré par le chemin $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{C}$. Si γ ne contient pas z_0, c'est-à-dire s'il n'existe pas de réel t tel que $\alpha(t) = z_0$, alors l'indice de γ par rapport à z_0 est

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z_0}\, \mathrm{d}t.$$

Puisque la fonction

$$t \mapsto \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z_0}$$

est continue sur l'intervalle compact $[a, b]$, la fonction $z_0 \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ est continue sur $\Omega - \mathrm{Im}\, \alpha$.

Exercice 141—
Soit $R > 0$. On définit le chemin $\gamma\colon [-R, R + \pi]$ par

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & \text{si } -R \le t \le R \\ Re^{i(t-R)} & \text{si } R \le t \le R + \pi. \end{cases}$$

Calculer, en fonction de R, l'indice de γ par rapport à i. Comparer avec l'indice du cercle de centre O et rayon R par rapport à i.

Exercice 142—
On note $A = 0$, $B = 1$, $C = 1 + i$ et $D = i$. On considère le contour γ obtenu en parcourant le rectangle $ABCD$ une fois dans le sens tel que A et B sont atteints dans cet ordre. Après avoir paramétré ce contour, calculer l'indice de γ par rapport à $z = x + iy$

- dans le cas où $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$;
- dans le cas où $(x, y) \notin \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le a \le 1 \text{ et } 0 \le b \le 1\}$.

Le nombre de tours d'un contour autour d'un point tel que nous l'avons défini n'est pas une définition géométrique. En particulier, si l'intuition peut fournir une idée de ce qu'est le nombre de tours, ou un moyen mnémotechnique, elle ne devrait jamais permettre le calcul rigoureux. Notons que l'indice est toujours un nombre entier, comme l'indique le lemme suivant.

***Lemme* 143-** *Soit γ un contour fermé ne contenant pas z_0. Alors, l'*indice *de γ par rapport à z_0 est un entier relatif.*

Démonstration. On suppose que le contour γ est paramétré par le chemin $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Si z_0 n'est pas dans l'image de γ, on définit la fonction G par

$$G(t) = \int_a^t \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - z_0}\,\mathrm{d}\tau$$

pour tout $t \in [a,b]$. On a alors

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{G(b)}{2i\pi}.$$

La fonction G est continue et dérivable sauf en un nombre fini de points. Pour t différent de l'un de ces points, on a

$$G'(t) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z_0}.$$

Introduisons la fonction F en posant

$$F(t) = [\alpha(t) - z_0]e^{-G(t)}$$

pour tout $t \in [a,b]$. Elle est continue et dérivable sauf en un nombre fini de points. On calcule

$$F'(t) = [\alpha'(t) - (\alpha(t) - z_0)\,G'(t)]e^{-G(t)} = 0$$

pour tout $t \in [a,b]$ sauf un nombre fini de points. On en déduit que F est constante égale à C sur $[a,b]$. Ainsi,

$$\alpha(t) = z_0 + C\,e^{G(t)}$$

pour tout $t \in [a,b]$. De $\alpha(a) = \alpha(b)$ on déduit $e^{G(a)} = e^{G(b)}$ c'est-à $1 = e^{2i\pi\,\mathrm{Ind}(\gamma,z_0)}$. Il en résulte $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$. □

De la même façon, nous n'avons pas défini rigoureusement la notion de point *à l'intérieur* ou *à l'extérieur* d'un contour fermé . Là encore, la définition n'est en rien géométrique puisque l'intérieur d'un contour fermé γ est l'ensemble des nombres complexes z n'appartenant pas au contour et dont l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est non nul :

$$\mathrm{Int}(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} - \gamma\colon\ \mathrm{Ind}(\gamma, z) \neq 0\}.$$

L'extérieur d'un contour fermé γ est l'ensemble des nombres complexes z n'appartenant pas au contour et dont l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est nul :

$$\mathrm{Ext}(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} - \gamma\colon\ \mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0\}.$$

L'intérieur d'un contour fermé est un ouvert puisque c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R} - \{0\}$ par la fonction continue $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$. Si l'intérieur d'un contour fermé est connexe, les points à l'intérieur de ce contour ont tous même résidu par rapport au contour comme le montre le lemme suivant.

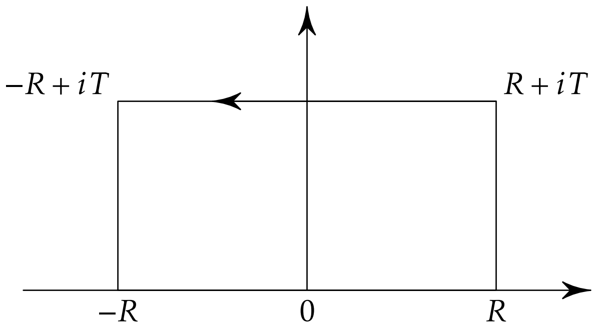


FIGURE 9

***Lemme* 144-** *Soit U un ouvert* connexe *inclus dans Ω. Soit γ un contour tel que* $\operatorname{Im}\gamma \cap U = \emptyset$. *Alors, l'application $z \mapsto \operatorname{Ind}(\gamma, z)$ est constante sur U.*

Démonstration. Notons i_γ l'application $z \mapsto \operatorname{Ind}(\gamma, z)$. Elle est continue sur $\mathbb{C}$ privé du contour γ et en particulier sur U. L'image $i_\gamma(U)$ est donc elle aussi convexe. C'est un ensemble convexe inclus dans $\mathbb{Z}$, donc un singleton. □

À titre d'exemple, nous allons déterminer l'intérieur et l'extérieur du rectangle de la figure 9 et calculer l'indice des points de l'intérieur. On note γ le contour obtenu en parcourant une fois ce rectangle orienté de $-R$ vers R.

Soit

$$\mathscr{I} = \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re} z| < R \text{ et } 0 < \operatorname{Im} z < T\}$$

et

$$\mathscr{E} = \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re} z| > R \text{ ou } \operatorname{Im} z < 0 \text{ ou } \operatorname{Im} z > T.\ \}$$

On fixe $z_0 \in \mathbb{C}$.

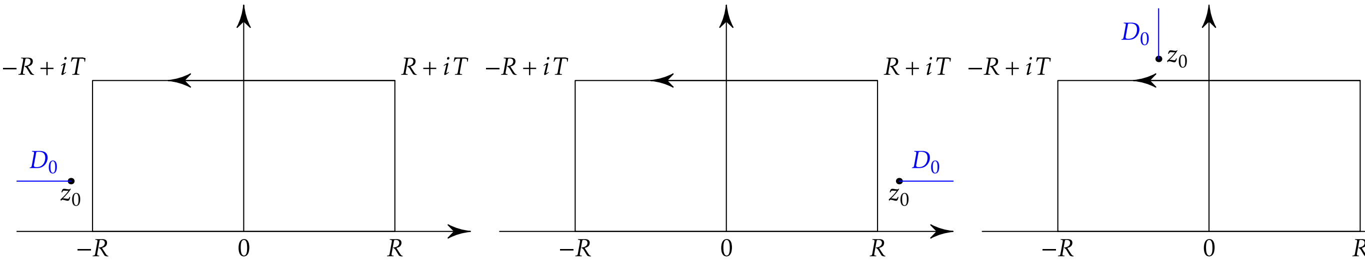
1) Cas où $z_0 \in \mathscr{E}$ - Notons D_0 la demi-droite (voir la figure 10 page suivante) définie par

   i) $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} z_0,\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0\}$ si $\operatorname{Re} z_0 \leq -R$;
   ii) $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0,\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0\}$ si $\operatorname{Re} z_0 \geq R$;
   iii) $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0,\ \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Im} z_0\}$ si $|\operatorname{Re} z_0| < R$ et $\operatorname{Im} z_0 \geq T$;
   iv) $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0,\ \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} z_0\}$ si $|\operatorname{Re} z_0| < R$ et $\operatorname{Im} z_0 \leq 0$.

   On note $U_0 = \mathbb{C} - D_0$. La fonction $z \mapsto 1/(z - z_0)$ est holomorphe sur l'ouvert étoilé U_0. Elle y admet donc une primitive. Puisque γ est inclus dans U_0 et fermé, on a

   $$\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 0.$$

   Ainsi, a-t-on $\mathscr{E} \subset \operatorname{Ext}(\gamma)$.



(a) $\operatorname{Re} z_0 \leq -R$ (b) $\operatorname{Re} z_0 \geq R$ (c) $|\operatorname{Re} z_0| < R$ et $\operatorname{Im} z_0 \geq T$

FIGURE 10 - Choix de D_0 lorsque $z_0 \in \mathscr{E}$

2) Cas où $z_0 \in \mathscr{I}$ - On note D_0^- la demi-droite d'origine z_0, perpendiculaire à $[-R, R]$ et coupant ce segment (voir la figure 11 page suivante). On fixe $z_0^- \neq z_0$ sur D_0^-. On note D_0^+ la demi-droite d'origine z_0, perpendiculaire à $[-R, R]$ et ne coupant pas ce segment. On fixe $z_0^+ \neq z_0$ sur D_0^+ de façon que z_0 soit le milieu de $[z_0^-, z_0^+]$.
La fonction $z \mapsto 1/(z - z_0)$ est holomorphe sur l'ouvert étoilé $U_0^- = \mathbb{C} - D_0^-$. Une primitive est la fonction $\log_{D_0^-, z_0^+}$ étudiée § 11. Comme $[R, R + iT] \oplus [R + iT, -R + iT] \oplus [-R + iT, -R]$ est un contour dans U_0^-, on a

$$\int_{[R,R+iT]} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_{[R+iT,-R+iT]} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_{[-R+iT,-R]} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \log_{D_0^-, z_0^+}(-R) - \log_{D_0^-, z_0^+}(R).$$

La fonction $z \mapsto 1/(z - z_0)$ est holomorphe sur l'ouvert étoilé $U_0^+ = \mathbb{C} - D_0^+$. Une primitive est la fonction $\log_{D_0^+, z_0^-}$. Le contour $[-R, R]$ est inclus dans U_0^+ et

$$\int_{[-R,R]} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \log_{D_0^+, z_0^-}(R) - \log_{D_0^+, z_0^-}(-R).$$

On a donc

$$2i\pi \operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = [\log_{D_0^-, z_0^+}(-R) - \log_{D_0^+, z_0^-}(-R)] - [\log_{D_0^-, z_0^+}(R) - \log_{D_0^+, z_0^-}(R)].$$

Grâce à la proposition 94, on trouve

$$2i\pi \operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = i\pi - (-i\pi)$$

et donc $\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = 1$. Ainsi, a-t-on $\mathscr{I} \subset \operatorname{Int}(\gamma)$.

Puisque $\operatorname{Int}(\gamma) \cup \operatorname{Ext}(\gamma) = \mathbb{C} - \gamma$, on trouve, conformément à l'intuition

$$\operatorname{Int}(\gamma) = \mathscr{I}, \quad \operatorname{Ext}(\gamma) = \mathscr{E}$$

et, $\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = 1$ pour tout complexe à l'intérieur de γ.

De façon similaire au rectangle, on détermine l'intérieur et l'extérieur d'un secteur. Si X et Y sont deux points équidistants de O, on note $S(O; X, Y)$ le contour obtenu par somme

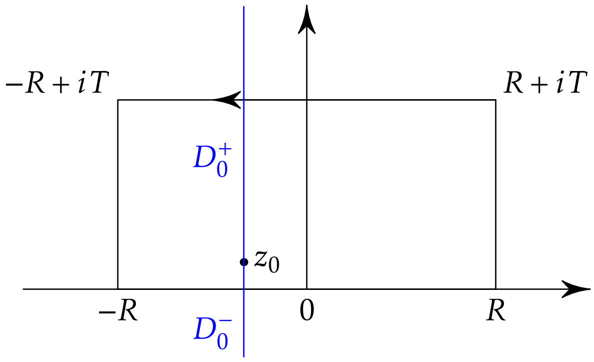
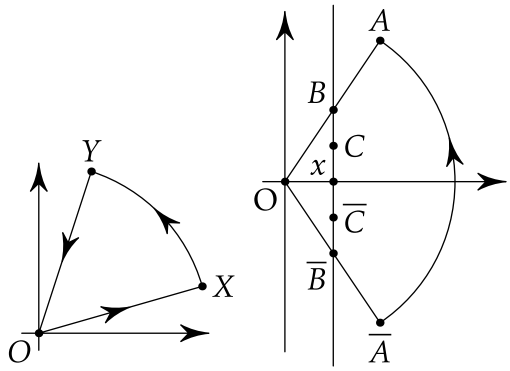


FIGURE 11 - Choix de D_0^- lorsque $z_0 \in \mathscr{I}$



(a) Le contour $S(O;X,Y)$

i) du segment $[O,X]$ parcouru une fois de O vers X ;

ii) de l'arc de cercle de centre O, contenant X et Y et parcouru une fois de X à Y dans le sens trigonométrique ;

iii) du segment $[Y,O]$ parcouru une fois de Y vers O.

Ce contour est représenté figure 12a.

Soit $R > 0$, $\varphi \in]0,\pi/2[$, on pose $A = Re^{i\varphi}$. Si $z_0 \in \mathbb{C} - S(O,\overline{A},A)$, on calcule l'indice de $S(O,\overline{A},A)$ par rapport à z_0. On note

$$\mathscr{I} = \{\rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \colon 0 < \rho < R \text{ et } -\varphi < \theta < \varphi\},$$

et

$$\mathscr{E} = \left\{\rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \colon (\rho,\theta) \in \mathbb{R}^* \times [-\pi,\pi] \text{ et } \big(\rho > R \text{ si } -\varphi \le \theta \le \varphi\big)\right\}.$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est connexe par arc. Il contient -1. Le contour $S(O,\overline{A},A)$ a donc même indice par rapport à -1 que par rapport à tout point de $\mathscr{E}$. La fonction $z \mapsto 1/(z+1)$ est holomorphe sur l'ouvert étoilé $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \le -1 \text{ et } \operatorname{Im} z = 0\}$. Elle admet donc une primitive sur cet ouvert étoilé qui contient $S(O,\overline{A},A)$. On en déduit que

Ind $\left(S(O,\overline{A},A),-1\right)=0$. Ainsi,

$$\mathscr{E}\subset\text{Ext}\left(S(O,\overline{A},A)\right).$$

L'ensemble $\mathscr{I}$ est aussi connexe par arc. Le contour $S(O,\overline{A},A)$ a donc même indice par rapport à chacun de des points de $\mathscr{I}$. Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $0<x<R\cos\varphi$ et X le point de coordonnée $(x,0)$. Alors $X\in\mathscr{I}$ et la droite verticale passant par X coupe $S(O,\overline{A},A)$ en un point $\overline{B}$ de $[O,\overline{A}]$ et en un point B de $[O,A]$. On note $\overline{C}$ le milieu de $[X,\overline{B}]$ et $\overline{\mathscr{D}}$ la demi-droite d'origine $\overline{C}$ contenant $\overline{B}$. On note C le milieu de $[X,B]$ et $\mathscr{D}$ la demi-droite d'origine C contenant B. (voir la figure 12b page précédente). Notons γ le chemin porté par $S(O,\overline{A},A)$ reliant $\overline{A}$ à O (dans cet ordre, donc en passant par A). Ainsi, $S(O,\overline{A},A)=[O,\overline{A}]\oplus\gamma$. On obtient

$$\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z-x}=\log_{\overline{\mathscr{D}},B}(O)-\log_{\overline{\mathscr{D}},B}(\overline{A})$$

et

$$\int_{[O,\overline{A}]}\frac{\mathrm{d}z}{z-x}=\log_{\mathscr{D},\overline{B}}(\overline{A})-\log_{\mathscr{D},\overline{B}}(O).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}2i\pi\,\text{Ind}\left(S(O,\overline{A},A),x\right)&=\left[\log_{\overline{\mathscr{D}},B}(O)-\log_{\mathscr{D},\overline{B}}(O)\right]-\left[\log_{\overline{\mathscr{D}},B}(\overline{A})-\log_{\mathscr{D},\overline{B}}(\overline{A})\right]\\&=i\pi-(-i\pi)\end{aligned}$$

puis Ind $\left(S(O,\overline{A},A),x\right)=1$. Ainsi,

$$\mathscr{I}\subset\text{Int}\left(S(O,\overline{A},A)\right).$$

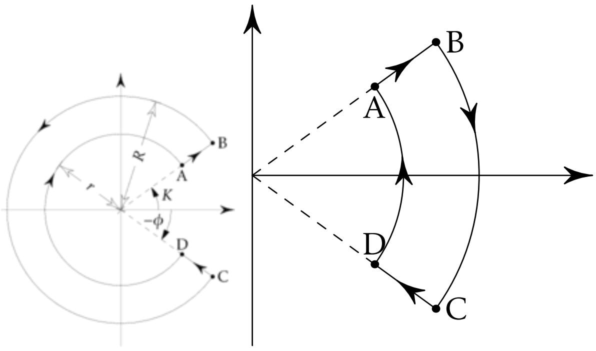
Finalement, $\mathscr{E}=\text{Ext}\left(S(O,\overline{A},A)\right)$ et $\mathscr{I}=\text{Int}\left(S(O,\overline{A},A)\right)$. De plus, l'indice de $S(O,\overline{A},A)$ par rapport à tout point de Int $\left(S(O,\overline{A},A)\right)$ est 1.

On traite un autre exemple en calculant l'indice du contour en lettre lettre C, voir figure 12a page ci-contre. Soit r et R deux réels strictement positifs tels que $r<R$. Soit $\varphi\in]0,\pi/2[$, on considère les points suivants

$$A=re^{i\varphi},\quad B=Re^{i\varphi},\quad C=Re^{-i\varphi},\quad D=re^{-i\varphi}.$$

On note

- γ_1 le segment $[A,B]$ parcouru de A vers B ;
- γ_2 l'arc de cercle de centre O et rayon R délimité par B et C et parcouru dans le sens trigonométrique ;
- γ_3 le segment $[C,D]$ parcouru de C vers D ;
- γ_4 l'arc de cercle de centre O et rayon r délimité par D et A et parcouru dans le sens antitrigonométrique.



(a) Contour «lettre C».(b) Complémentaire de C dans O.

FIGURE 12

Enfin $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$.

Notons $\widetilde{\gamma}$ le complémentaire de la lettre C dans la lettre O (voir la figure 12b) : si

- $\widetilde{\gamma}_2$ est l'arc de cercle de centre O et rayon R délimité par B et C et parcouru dans le sens antitrigonométrique ;
- $\widetilde{\gamma}_4$ est l'arc de cercle de centre O et rayon r délimité par D et A et parcouru dans le sens trigonométrique ;

alors $\widetilde{\gamma} = \gamma_1 \oplus \widetilde{\gamma}_2 \oplus \gamma_3 \oplus \widetilde{\gamma}_4$. Si z_0 n'est ni sur γ ni sur $\widetilde{\gamma}$, alors

$$\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_{\overleftarrow{\gamma}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_{\overleftarrow{C(0,R)}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_{C(0,r)} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$$

d'où

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \mathrm{Ind}\,(\widetilde{\gamma}, z_0) + \mathrm{Ind}\,(C(0,R), z_0) - \mathrm{Ind}\,(C(0,r), z_0)\,.$$

De plus,

$$\mathrm{Ind}\,(\widetilde{\gamma}, z_0) = \mathrm{Ind}\,(S(O,D,A), z_0) - \mathrm{Ind}\,(S(O,C,B), z_0)$$

et

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \mathrm{Ind}\,(S(O,D,A), z_0) - \mathrm{Ind}\,(S(O,C,B), z_0) + \mathrm{Ind}\,(C(0,R), z_0) - \mathrm{Ind}\,(C(0,r), z_0)\,.$$

Puisqu'on a déjà calculé les indices des cercles et des secteurs, il reste à synthétiser les résultats. Soit

$$\mathscr{I} = \{\rho e^{i\theta} \colon r < \rho < R \text{ et } \theta \in [-\pi, \pi[- [-\varphi, \varphi]\}$$

et

$$\mathscr{E} = \{\rho e^{i\theta} \colon \rho > R \text{ ou } \rho < r \text{ ou } \theta \in] -\varphi, \varphi[\}.$$

Ces deux ensembles étant connexes par arcs, la courbe γ est d'indice constant dans chacun de ces ensembles. On a

$$\mathrm{Ind}\left(C(0,R), -\frac{r}{2}\right) = \mathrm{Ind}\left(C(0,r), -\frac{r}{2}\right) = 1$$

et

$$\text{Ind}\left(S(O,D,A),-\frac{r}{2}\right)=\text{Ind}\left(S(O,C,B),-\frac{r}{2}\right)=0.$$

On en déduit $\text{Ind}(\gamma,-r/2)=0$ puis $\mathscr{E}\subset\text{Ext}(\gamma)$. On a

$$\text{Ind}\left(C(0,R),-\frac{R+r}{2}\right)=1 \quad \text{et} \quad \text{Ind}\left(C(0,r),-\frac{R+r}{2}\right)=0$$

puis

$$\text{Ind}\left(S(O,D,A),-\frac{R+r}{2}\right)=\text{Ind}\left(S(O,C,B),-\frac{R+r}{2}\right)=0.$$

On en déduit $\text{Ind}(\gamma,-(R+r)/2)=1$ puis $\mathscr{I}\subset\text{Ext}(\gamma)$. En conclusion

$$\text{Ext}(\gamma)=\{\rho e^{i\theta}\colon \rho>R \text{ ou } \rho<r \text{ ou } \theta\in]-\varphi,\varphi[\}$$

et

$$\text{Int}(\gamma)=\{\rho e^{i\theta}\colon r\le\rho<R \text{ et } \theta\in[-\pi,\pi[-[-\varphi,\varphi]\}.$$

De plus, le contour γ est d'indice 1 par rapport à tout point de son intérieur.

Exercice 145–
Cet exercice fait suite à l'exercice 141 et a pour but la détermination rigoureuse de l'intérieur du contour γ. On note

$$\mathscr{I}=\{z\in\mathbb{C}\colon |\text{Re}\, z|<R,\ \text{Im}\, z>0,\ |z|<R\}$$

et

$$\mathscr{E}=\{z\in\mathbb{C}\colon |\text{Re}\, z|>R \text{ ou } \text{Im}\, z<0 \text{ ou } |z|>R\}.$$

1) a) Montrer que $\mathscr{I}$ est connexe par arcs.
   b) En déduire la valeur de $\text{Ind}(\gamma,z)$ pour tout $z\in\mathscr{I}$.
   c) En déduire que $\mathscr{I}$ est inclus dans l'intérieur de γ.
2) a) Montrer que $\mathscr{E}$ est connexe par arcs.
   b) Calculer $\text{Ind}(\gamma,-i)$.
   c) En déduire que $\mathscr{E}$ est inclus dans l'extérieur de γ.
3) Conclure.

L'exercice suivant montre que si un contour fermé γ est transformé en un contour fermé γ' par une similitude (directe ou indirecte), et si le complexe z_0 est transformé en z_0' par cette similitude, alors $\text{Ind}(\gamma,z_0)=\text{Ind}(\gamma',z_0')$.

Exercice 146–
On considère un contour fermé γ paramétré par le chemin $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{C}$.

i) Soit u et v deux nombres complexes. On suppose $u \neq 0$. On note γ' le contour fermé paramétré par le chemin $u\alpha + v$. Soit $z_0 \in \mathbb{C} - \operatorname{Im}\alpha$. Montrer que

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = \operatorname{Ind}(\gamma', uz_0 + v).$$

ii) En déduire le comportement de l'intérieur et l'extérieur d'un contour lorsque ce contour est transformé par une translation, une rotation ou une homothétie.

iii) On note $\overline{\gamma}$ le contour paramétré par

$$\begin{array}{rcccc} \overline{\alpha} & : & [a,b] & \to & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & \overline{\alpha(t)}. \end{array}$$

Montrer que

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = \operatorname{Ind}\left(\overline{\gamma}, \overline{z_0}\right).$$

iv) En déduire le comportement de l'intérieur et l'extérieur d'un contour lorsque ce contour est transformé par une réflexion.

5.3) Formule des résidus sur un ouvert étoilé

***Proposition* 147** (Théorème des résidus pour les ouverts étoilés)- *On suppose que Ω est un ouvert étoilé. Soit P une partie finie de Ω. Soit f une fonction méromorphe sur Ω de pôles les éléments de P. Soit γ un contour fermé et à valeurs dans $\Omega - P$. Alors,*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{p\in P} \operatorname{Ind}(\gamma, p) \operatorname*{Res}_p f.$$

Démonstration. Soit p un pôle de f et $n_p > 0$ son ordre. Le développement de Laurent de f autour de p est

$$f(z) = \sum_{k=-n_p}^{+\infty} a_k(p)(z-p)^k = h_p\left(\frac{1}{z-p}\right) + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(p)(z-p)^k \tag{19}$$

où h_p est le polynôme défini par

$$h_p(X) = \sum_{k=1}^{n_p} a_{-k}(p)X^k.$$

La partie principale $h_p\left((z-p)^{-1}\right)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{p\}$. Le développement (19) montre que $z \mapsto f(z) - h_p\left((z-p)^{-1}\right)$ a une singularité illusoire en p. Les pôles de cette fonction sont donc $P - \{p\}$. On en déduit que la fonction g définie par

$$g(z) = f(z) - \sum_{p \in P} h_p\left(\frac{1}{z-p}\right)$$

pour tout $z \in \Omega - P$ admet un prolongement en fonction holomorphe sur Ω que l'on continue de noter g. Grâce au théorème de Caucy pour les ouverts étoilés, on a

$$\int_\gamma g = 0. \tag{20}$$

Mais

$$\int_\gamma g = \int_\gamma f - \sum_{p \in P} \int_\gamma h_p\left(\frac{1}{z-p}\right) \mathrm{d}z = \int_\gamma f - \sum_{p \in P} \sum_{k=1}^{n_p} a_{-k}(p) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-p)^k}.$$

Pour tout $p \in P$ et tout $k \geq 2$, on a

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-p)^k} = 0$$

car $z \mapsto (z-p)^{-k}$ admet une primitive sur l'ouvert $\Omega - \{p\}$ et γ est un contour fermé de $\Omega - \{p\}$. On a donc

$$\int_\gamma g = \int_\gamma f - \sum_{p \in P} a_{-1}(p) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-p)}.$$

Par définition du résidu et de l'indice, et grâce à (20), on a donc

$$\int_\gamma f = 2i\pi \sum_{p \in P} \underset{p}{Res}(f)\, \mathrm{Ind}(\gamma, p).$$

□

Remarque 148— Par définition de l'intérieur du contour fermé γ, la formule des résidus se réécrit

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f = \sum_{\substack{p \in P \\ p \in \mathrm{Int}(\gamma, p)}} \mathrm{Ind}(\gamma, p) \underset{p}{Res}(f).$$

Remarque 149— Il faut noter que nous avons démontré la formule des résidus pour tout ouvert sur lequel le théorème de Cauchy est valable, c'est-à-dire tout ouvert élémentaire (voir la remarque 90).

On donne quelques exemples d'application du théorème des résidus au calcul intégral [k]. Soit P et Q deux fonctions polynômes à coefficients complexes de deux variables. On suppose que $Q(x, y) \neq 0$ si x et y sont des réels tels que $x^2 + y^2 = 1$.

k. Il est conseillé de retenir la méthode plutôt que la conclusion du calcul...

On suppose aussi qu'il existe un ouvert étoilé Ω contenant $\overline{D(0,1)}$ tel que que la fonction

$$z \mapsto Q\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$$

ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur Ω. Le but est de calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant le formules d'Euler, on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^t} \frac{P\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)}{Q\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)} ie^t\,\mathrm{d}t. \tag{21}$$

On introduit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{P\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}{Q\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}.$$

Grâce aux hypothèses sur Q elle est méromorphe sur Ω et le cercle unité $C(0,1)$ ne contient aucun de ses pôles. L'égalité (21) devient

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}\,\mathrm{d}t = \int_{C(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Le théorème des résidus implique alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}\,\mathrm{d}t = 2i\pi \sum_{a\in D(0,1)} \underset{z=a}{Res}\, f(z).$$

Exercice 150–

1) Soit $a \in D(0,1)$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{|1-ae^{i\theta}|^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

2) Soit a et b deux réels tels que $a > b > 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}.$$

Pour l'exemple suivant on suppose que f est une fonction méromorphe sur un ouvert étoilé Ω contenant $\overline{\mathscr{H}}$ où

$$\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

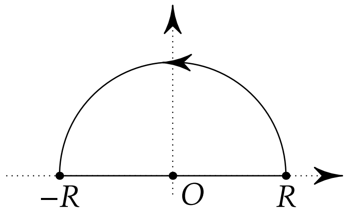


FIGURE 13 - Le contour $[-R, R] \oplus c_R$

On note $P_{\mathscr{H}}$ l'ensemble des pôles de f dans $\mathscr{H}$. On suppose que $P_{\mathscr{H}}$ est fini. On suppose aussi que f n'a pas de pôles réels. Enfin, on suppose que la limite

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f$$

existe et est finie [l]. On note vp $\int_{\mathbb{R}} f$ cette limite. Si $R > \max_{a\in P_{\mathscr{H}}} |a|$, on note c_R le contour obtenu en parcourant une fois dans le sens trigonométrique le demi-cercle de centre O, joignant R à $-R$ en passant dans $\mathscr{H}$. On considère alors le contour $[-R, R] \oplus c_R$. (voir la figure 13).

Le théorème des résidus implique

$$\int_{[-R,R]} f + \int_{c_R} f = 2i\pi \sum_{a\in P_{\mathscr{H}}} \underset{z=a}{Res}\, f(z).$$

Sous l'hypothèse supplémentaire

$$\lim_{R\to+\infty} R \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta = 0 \tag{22}$$

on obtient alors

$$\text{vp} \int_{\mathbb{R}} f = 2i\pi \sum_{a\in P_{\mathscr{H}}} \underset{z=a}{Res}\, f(z).$$

L'hypothèse supplémentaire (22) est impliquée par le résultat suivant.

---

l. Dans ce cas, cette limite s'appelle la *valeur principale de Cauchy* de l'intégrale impropre $\int_{\mathbb{R}} f$. Si l'intégrale impropre converge, c'est-à-dire si les deux limites

$$\lim_{X\to-\infty} \int_X^0 f \quad \text{et} \quad \lim_{Y\to+\infty} \int_0^Y f$$

existent et sont finies, alors la valeur principale de Cauchy existe et est égale à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{X\to-\infty} \int_X^0 f + \lim_{Y\to+\infty} \int_0^Y f.$$

Cependant la valeur principale de Cauchy peut exister alors que l'intégrale impropre diverge. Penser à la fonction $x \mapsto x^3$.

***Lemme* 151-** *Soit $r_0 > 0$ et $\theta_2 \geq \theta_1$ des réels. Soit f une fonction continue sur le secteur*

$$\{re^{i\theta} \in \mathbb{C} \colon r \geq r_0,\, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}.$$

On suppose que

$$\lim_{|z| \to +\infty} zf(z) = 0.$$

Alors,

$$\lim_{R \to +\infty} R \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta = 0.$$

Démonstration. La fonction f est continue sur le compact

$$\{Re^{i\theta} \colon \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}.$$

Elle y admet donc un maximum, atteint en z_R. On en tire

$$R \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta \right| \leq R|f(z_R)|(\theta_2 - \theta_1).$$

Si R tend vers $+\infty$, alors $|z_R| = R$ tend aussi vers $+\infty$. Ainsi, $R|f(z_R)| = |z_R f(z_R)|$ tend vers 0. □

Remarque 152— Notre calcul montre qu'il n'est pas nécessaire que $P_{\mathcal{H}}$ soit fini. Il suffit que la somme

$$\sum_{\substack{a \in P_{\mathcal{H}} \\ |a| < R}} \underset{z=a}{Res} f(z)$$

admette une limite finie lorsque R tend vers $+\infty$.

Exercice 153–

1) Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. On suppose que $\deg Q \geq \deg P + 2$ et que Q n'a pas de zéro réel. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P}{Q} = 2i\pi \sum_{\substack{a\in\mathcal{H} \\ Q(a)=0}} \underset{z=a}{Res} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

2) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{\pi}{2^{2n-2}} \cdot \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}.$$

3) Soit k et n deux entiers naturels tels que $n > k$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{1+t^{2n}} = \frac{\pi}{n \sin \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}}.$$

L'exemple suivant traite de l'intégrale du produit d'une fraction rationnelle par une exponentielle. On commence par un lemme utile.

Lemme 154- *Soit $r_0 > 0$ et $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$ des réels. Soit f une fonction continue sur le secteur*

$$\{re^{i\theta} \in \mathbb{C} \colon r \geq r_0,\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}.$$

On suppose que

$$\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0.$$

Alors,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C(0,R;\theta_1,\theta_2)} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z = 0$$

où $C(0,R;\theta_1,\theta_2)$ est le contour en arc de cercle paramétré par

$$\begin{array}{ccc} [\theta_1,\theta_2] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & Re^{it}. \end{array}$$

Démonstration. Sur le compact $C(0,R)$, la fonction continue $|f|$ admet un maximum $|f(z_R)|$. On a alors

$$\left|\int_{C(0,R;\theta_1,\theta_2)} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z\right| = \left|R\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(Re^{i\theta})e^{-R\sin\theta+iR\cos\theta}e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leq R|f(z_R)|\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

On a

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Si $\theta \in [0, \pi/2]$, alors
$$\frac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta$$
d'où
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}) \leq \frac{\pi}{R}.$$
On en tire
$$\left|\int_{C(0,R;\theta_1,\theta_2)} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z\right| \leq \pi|f(z_R)|.$$
Le membre de droite tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$ car alors $|z_R| = R$ tend vers $+\infty$. □

Considérons alors une fonction méromorphe sur un ouvert étoilé Ω contenant $\overline{\mathscr{H}}$. On suppose que l'ensemble $P_{\mathscr{H}}$ des pôles de f dans $\mathscr{H}$ est fini et que f n'a pas de pôles réels. On suppose enfin que $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$. Si $R > \max_{a\in P_{\mathscr{H}}}|a|$, on note c_R le contour obtenu en parcourant une fois dans le sens trigonométrique le demi-cercle de centre O, joignant R à $-R$ en passant dans $\mathscr{H}$. On considère alors le contour $[-R,R] \oplus c_R$ (voir la figure 13 page 82). Le théorème des résidus implique
$$\int_{[-R,R]} f(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x + \int_{c_R} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{a\in P_{\mathscr{H}}} e^{ia} \underset{z=a}{Res}\, f(z).$$
Grâce au lemme 154, l'intégrale sur c_R tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$. On en déduit que l'intégrale sur $[-R,R]$ admet une limite lorsque R tend vers $+\infty$ puis que
$$\mathrm{vp}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x = 2i\pi \sum_{a\in P_{\mathscr{H}}} e^{ia} \underset{z=a}{Res}\, f(z).$$

Exercice 155–
Soit $a > 0$.

1. Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$
2. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2a}e^{-a}.$$

Pour l'exemple suivant , on fixe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et on considère deux polynômes P et Q tels que $\deg Q > \lambda + \deg P$. On pose $F = P/Q$ et on suppose que $F(0) \neq 0$ et que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$. Notre but est d'évaluer
$$\int_0^{+\infty} x^\lambda F(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

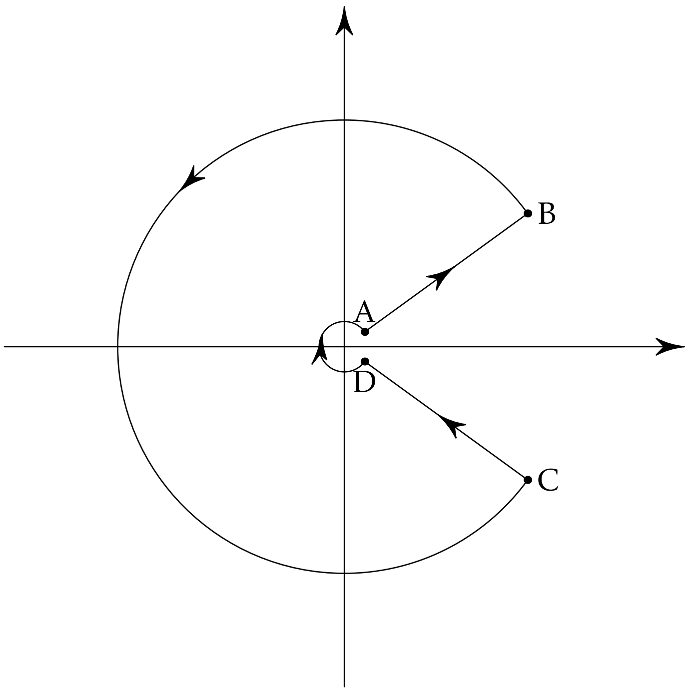


FIGURE 14

Considérons la fonction f définie par

$$f(z) = (-z)^{\lambda-1}F(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^{+}$. Elle est méromorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}^{+}$ où elle n'a qu'un nombre fini de pôles. On note $\mathscr{P}(f)$ l'ensemble des pôles de f. Pour $R > 1$ et $\varphi \in]0, \pi/4[$, on considère les points suivants

$$A = \frac{1}{R}e^{i\varphi}, \quad B = Re^{i\varphi}, \quad C = Re^{-i\varphi}, \quad D = \frac{1}{R}e^{-i\varphi}.$$

On note
- γ_1 le segment $[A, B]$ parcouru de A vers B ;
- γ_2 l'arc de cercle de centre O et rayon R délimité par B et C et parcouru dans le sens trigonométrique ;
- γ_3 le segment $[C, D]$ parcouru de C vers D ;
- γ_4 l'arc de cercle de centre O et rayon $1/R$ délimité par D et A et parcouru dans le sens antitrigonométrique.

Le contour $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$ obtenu est représenté figure 14. On a déjà calculé l'intérieur et l'extérieur de contour ainsi que l'indice en son intérieur. Le théorème des résidus sur l'ouvert étoilé $\mathbb{C} - \mathbb{R}^{+}$ donne donc

$$\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_4} f = 2i\pi \sum_{a \in \mathrm{Int}(\gamma)} \underset{z=a}{Res} f(z). \tag{23}$$

L'intégrale de f le long de γ_1 vaut

$$\left(R-\frac{1}{R}\right)e^{i\varphi}\int_0^1 e^{(\lambda-1)\ln\left(-\frac{e^{i\varphi}}{R}-t\left(R-\frac{1}{R}\right)e^{i\varphi}\right)}F\left(\frac{e^{i\varphi}}{R}+t\left(R-\frac{1}{R}\right)e^{i\varphi}\right)\mathrm{d}t.$$

Si $\varphi\in]0,\pi/4[$ alors

$$\begin{aligned}\ln\left(-\frac{e^{i\varphi}}{R}-t\left(R-\frac{1}{R}\right)e^{i\varphi}\right)&=\ln\left(\left(\frac{1}{R}+t\left(R-\frac{1}{R}\right)\right)e^{i(\varphi-\pi)}\right)\\&=\ln\left(\frac{1}{R}+t\left(R-\frac{1}{R}\right)\right)-i\pi\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque φ tend vers 0 par valeurs positives, on a

$$\lim_{\varphi\to 0^+}\ln\left(-\frac{e^{i\varphi}}{R}-t\left(R-\frac{1}{R}\right)e^{i\varphi}\right)=\ln\left(\frac{1}{R}+t\left(R-\frac{1}{R}\right)\right)-i\pi$$

puis,

$$\lim_{\varphi\to 0^+}\int_{\gamma_1}f=e^{-i\pi(\lambda-1)}\int_{1/R}^{R}u^{\lambda}F(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

De la même façon,

$$\lim_{\varphi\to 0^+}\int_{\gamma_3}f=-e^{i\pi(\lambda-1)}\int_{1/R}^{R}u^{\lambda}F(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

de sorte que

$$\lim_{\varphi\to 0}\left(\int_{\gamma_1}f+\int_{\gamma_3}f\right)=2i\sin(\pi\lambda)\int_{1/R}^{R}u^{\lambda}F(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}. \tag{24}$$

Ensuite, comme f n'a qu'un nombre fini de pôles, si φ est assez petit, l'ensemble des pôles de f dans $D(0,R)-[0,R]$ et l'ensemble des pôles de f dans $\mathrm{Int}(\gamma)$ coïncident. Autrement, dit

$$\lim_{\varphi\to 0}\sum_{a\in\mathrm{Int}(\gamma)}\underset{z=a}{Res}\,f(z)=\sum_{a\in D(0,R)-[0,R]}\underset{z=a}{Res}\,f(z). \tag{25}$$

De (23), (24) et (25), on déduit que

$$\int_{\gamma_2}f+\int_{\gamma_4}f$$

admet une limite lorsque φ tend vers 0. Notons $L(R)$ cette limite, on obtient

$$2i\sin(\pi\lambda)\int_{1/R}^{R}u^{\lambda}F(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}+L(R)=2i\pi\sum_{a\in D(0,R)-[0,R]}\underset{z=a}{Res}\,f(z). \tag{26}$$

On a

$$\int_{\gamma_2}(-z)^{\lambda-1}F(z)\,\mathrm{d}z=-i\int_{\varphi}^{2\pi-\varphi}(-Re^{it})^{\lambda}F(Re^{it})\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant

$$|\ln(z)| = |\ln|z| + i\arg(z)| \leq |\ln|z|| + \pi$$

on trouve donc

$$\left|\int_{\gamma_2} (-z)^{\lambda-1} F(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq R^\lambda e^{\pi\lambda} \int_0^{2\pi} |F(Re^{it})|\,\mathrm{d}t.$$

En appliquant le même développement à γ_4, on obtient finalement

$$\left|\int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_4} f\right| \leq R^\lambda e^{\pi\lambda} \int_0^{2\pi} |F(Re^{it})|\,\mathrm{d}t + \left(\frac{1}{R}\right)^\lambda e^{\pi\lambda} \int_0^{2\pi} \left|F\left(\frac{e^{it}}{R}\right)\right| \mathrm{d}t$$

et donc

$$|L(R)| \leq R^\lambda e^{\pi\lambda} \int_0^{2\pi} |F(Re^{it})|\,\mathrm{d}t + \left(\frac{1}{R}\right)^\lambda e^{\pi\lambda} \int_0^{2\pi} \left|F\left(\frac{e^{it}}{R}\right)\right| \mathrm{d}t.$$

Le premier terme du membre de droite tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$ car $\deg Q > \lambda + \deg P$. Le second terme tend aussi vers 0 car $Q(0) \neq 0$. On en déduit que

$$\lim_{R\to+\infty} L(R) = 0.$$

La fonction f n'ayant qu'un nombre fini de pôles, si R est assez grand, l'ensemble des pôles de f dans $D(0,R) - [0,R]$ et l'ensemble $\mathscr{P}(f)$ de tous ses pôles coïncident. On en déduit que

$$\lim_{R\to+\infty} \sum_{a\in D(0,R)-[0,R]} \underset{z=a}{Res}\, f(z) = \sum_{a\in\mathscr{P}(f)} \underset{z=a}{Res}\, f(z).$$

Finalement, (26) devient

$$\int_0^{+\infty} u^\lambda F(u) \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} \sum_{a\in\mathscr{P}(f)} \underset{z=a}{Res}\, f(z).$$

Exercice 156–

i) Montrer que pour tout $\lambda \in]0,1[$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\lambda-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}.$$

ii) En déduire que la fonction

$$\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^{\lambda-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

admet un prolongement en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Donner les pôles de cette fonction.

iii) Soit $a \in]0,1[$. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 157–

Soit ξ un nombre réel. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi x\xi}}{\cosh(\pi x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}.$$

Pour cela, on introduit la fonction

$$f\colon z \mapsto \frac{e^{-2i\pi z\xi}}{\cosh(\pi z)}.$$

On note γ_R le contour obtenu en parcourant une fois le rectangle obtenu en reliant les points

$$R, \quad R+2i, \quad -R+2i \quad \text{et} \quad -R$$

dans cet ordre.

i) Que donne le théorème des résidus appliqué à f sur γ_R ?

ii) Montrer que, lorsque R tend vers $+\infty$, la somme des intégrales sur les côtés verticaux tend vers 0.

iii) Montrer que la somme des intégrales sur les côtés horizontaux admet une limite lorsque R tend vers $+\infty$. Exprimer cette limite en fonction de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi x\xi}}{\cosh(\pi x)}\,\mathrm{d}x.$$

5.4) Théorème de l'argument

Soit f une fonction holomorphe au voisinage V de z_0. On suppose que z_0 est un zéro de f d'ordre ν. Il existe alors une fonction g holomorphe et non nulle au voisinage $V' \subset V$ de z_0 telle que $f(z) = (z - z_0)^\nu g(z)$ pour tout $z \in V$. On en déduit que

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{\nu}{z - z_0} + \frac{g'}{g}(z)$$

pour tout $z \in V'$. La fonction g'/g étant holomorphe sur V', la fonction f'/f admet un pôle simple de résidu ν en z_0.

Soit f une fonction méromorphe au voisinage V de z_0. On suppose que z_0 est le seul pôle de f dans V et que l'ordre de ce pôle est ν. Il existe alors une fonction g holomorphe et non nulle au voisinage $V' \subset V$ de z_0 telle que $f(z) = (z - z_0)^{-\nu} g(z)$ pour tout $z \in V$. On en déduit que

$$\frac{f'}{f}(z) = -\frac{\nu}{z - z_0} + \frac{g'}{g}(z)$$

pour tout $z \in V'$. La fonction g'/g étant holomorphe sur V', la fonction f'/f admet un pôle simple de résidu $-\nu$ en z_0.

Soit γ un contour fermé dans un ouvert étoilé Ω. Soit f une fonction méromorphe sur Ω. On note $Z(f,\gamma)$ le nombre de zéros de f dans $\mathrm{Int}(\gamma)$ comptés avec multiplicité [m]. On note $P(f,\gamma)$ le nombre de pôles de f dans $\mathrm{Int}(\gamma)$ comptés avec multiplicité [n]. Le théorème des résidus appliqué à la fonction f'/f conduit au théorème de l'argument.

***Théorème* 158** (Théorème de l'argument)- *Soit γ un contour fermé dans un ouvert étoilé Ω. On suppose que l'indice de γ par rapport à tout point de son intérieur est 1. Soit f une fonction méromorphe sur Ω. On suppose que f n'a ni zéros ni pôles sur γ. Alors,*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f} = Z(f,\gamma) - P(f,\gamma).$$

Exercice 159–

On garde les notations du théorème 158 : on suppose de plus f holomorphe. On note $\mathcal{Z}(f)$ l'ensemble des zéros de f. Si $a \in \mathcal{Z}(f)$, on note $\nu_a(f)$ son ordre. Soit g une fonction holomorphe sur Ω et ne s'annulant pas sur γ, montrer que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f} g = \sum_{a \in \mathcal{Z}(f)} \nu_a(f) g(a).$$

Le théorème de l'argument admet aussi l'importante conséquence suivante.

m. Autrement dit,si $\nu_z(f)$ est l'ordre du zéro z de f alors $Z(f,\gamma) = \sum_{a\in \mathrm{Int}(\gamma)} \nu_a(f)$.
n. Autrement dit,si $n_z(f)$ est l'ordre du pôle z de f alors $P(f,\gamma) = \sum_{a\in \mathrm{Int}(\gamma)} n_a(f)$.

***Théorème* 160** (Théorème de Rouché)- *Soit f et g deux fonctions holomorphes sur l'ouvert étoilé Ω. Soit γ un contour fermé dans Ω. On suppose que l'indice de γ par rapport à tout point de son intérieur est 1. Si*

$$|f(z)| > |g(z)|$$

pour tout $z \in \gamma$, alors f et $f+g$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de γ.

Démonstration. Pour tout $t \in [0,1]$ on définit la fonction h_t par

$$h_t(z) = f(z) + tg(z)$$

pour tout $z \in \Omega$. On note $n(t)$ le nombre de zéros de h_t à l'intérieur de γ. Si h_t s'annulait en un point a de γ, on aurait

$$|f(a)| = |tg(a)| \leq |g(a)|$$

ce qui contredit l'hypothèse. On peut donc appliquer le théorème de l'argument pour obtenir

$$n(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h_t'}{h_t}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h_t'}{h_t}$ est continue sur $[0,1]$. Il en est donc de même pour la fonction $t \mapsto n(t)$. Cette fonction étant à valeurs entières, elle est constante. Le résultat découle du fait que $h_0 = f$ et $h_1 = g$. □

Exercice 161–
On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 6X + 3$.

i) En écrivant $P = f + g$ avec $f(z) = z^4$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer que P a quatre racines dans le disque $D(0,2)$.
ii) En écrivant $P = f_1 + g_1$ avec $f_1(z) = 6z$ pour rour $z \in \mathbb{C}$, montrer que P a une seule racine dans le disque $D(0,1)$.
iii) Soit a la racine de P dans $D(0,1)$, montrer que

$$a = \int_{C(0,1)} \frac{4z^3+6}{z^4+6z+3} z \, \mathrm{d}z.$$

5.5) Applications conformes

Étant donné une fonction f holomorphe sur l'ouvert étoilé Ω. Si f est injective, la fonction $f\colon \Omega \to f(\Omega)$ est bijective. Nous allons montrer que son inverse $f^{-1}\colon f(\Omega) \to \mathbb{C}$ est holomorphe. La première étape est de montrer que $f(\Omega)$ est un ouvert. C'est le théorème de l'application ouverte.

***Théorème* 162** (Théorème de l'application ouverte)- *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe et non constante sur Ω alors $f(\Omega)$ est ouvert.*

Démonstration. Soit $w_0 \in f(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$ tel que $w_0 = f(z_0)$. La fonction $f - w_0$ n'est pas constamment nulle au voisinage de z_0. Dans le cas contraire, puisque Ω est connexe, l'application du principe de prolongement analytique impliquerait que $f - w_0$ serait nulle sur Ω. Or f n'est pas constante. Grâce au principe des zéros isolés, il existe $\rho > 0$ tel que sur $\overline{D(z_0, \rho)}$, la fonction $f - w_0$ ne s'annule qu'en z_0. Quitte à prendre ρ plus petit, on peut même supposer $D(z_0, 2\rho) \subset \Omega$. Posant

$$\epsilon = \min_{z \in C(z_0,\rho)} |f(z) - w_0|,$$

on a $\epsilon > 0$. Soit $w \in D(w_0, \epsilon)$. Pour tout $z \in C(z_0, \rho)$, on a

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon > |w - w_0|.$$

En appliquant le théorème de Rouché aux fonctions holomorphes

$$F : \begin{array}{ccc} B(z_0, 2\rho) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) - w_0 \end{array} \quad \text{et} \quad G : \begin{array}{ccc} B(z_0, 2\rho) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & w_0 - w \end{array}$$

on trouve que la fonction $z \mapsto f(z) - w$ a autant de zéros dans $D(z_0, \rho)$ que F. Il existe donc $z \in D(z_0, \rho)$ tel que $w = f(z)$. Ainsi, $D(w_0, \epsilon) \subset f(\Omega)$. Chaque point de $f(\Omega)$ a un voisinage ouvert contenu dans $f(\Omega)$. L'ensemble $f(\Omega)$ est donc un ouvert. □

Si l'on sait que la fonction f est injective, une très légère variation de la preuve permet de ne pas avoir besoin de l'hypothèse de connexité de Ω.

***Proposition* 163** (Théorème de l'application ouverte pour les fonctions injectives)- *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe et injective sur Ω alors $f(\Omega)$ est ouvert.*

Démonstration. Soit $w_0 \in f(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$ tel que $w_0 = f(z_0)$. La fonction $f - w_0$ ne s'annule qu'en z_0 puisque f est injective. Soit $\rho > 0$ tel que $D(z_0, 2\rho) \subset \Omega$. Posant

$$\epsilon = \min_{z \in C(z_0,\rho)} |f(z) - w_0|,$$

on a $\epsilon > 0$. Soit $w \in D(w_0, \epsilon)$. Pour tout $z \in C(z_0, \rho)$, on a

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon > |w - w_0|.$$

En appliquant le théorème de Rouché aux fonctions holomorphes

$$F : \begin{array}{ccc} B(z_0, 2\rho) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) - w_0 \end{array} \quad \text{et} \quad G : \begin{array}{ccc} B(z_0, 2\rho) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & w_0 - w \end{array}$$

on trouve que la fonction $z \mapsto f(z) - w$ a autant de zéros dans $D(z_0, \rho)$ que F. Il existe donc $z \in D(z_0, \rho)$ tel que $w = f(z)$. Ainsi, $D(w_0, \epsilon) \subset f(\Omega)$. Chaque point de $f(\Omega)$ a un voisinage ouvert contenu dans $f(\Omega)$. L'ensemble $f(\Omega)$ est donc un ouvert. □

Remarque 164— Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective. Elle admet donc une fonction réciproque $g\colon f(\Omega) \to \mathbb{C}$. Si $\mathcal{O} \subset \Omega$ est un ouvert, alors $g^{-1}(\mathcal{O}) = f(\mathcal{O})$ est un ouvert d'après le théorème de l'application ouverte pour les fonctions injectives. L'image réciproque par g de tout ouvert étant un ouvert, on en déduit que la fonction réciproque g de f est continue sur $f(\Omega)$.

Le lemme technique suivant est utile à la démonstration de l'holomorphie de l'inverse d'une fonction holomorphe.

***Lemme* 165-** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe et injective alors f' ne s'annule pas sur Ω.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence de $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) = 0$. On note k l'ordre d'annulation de $g = f - f(z_0)$ en z_0. Comme $g'(z_0) = f'(z_0) = 0$, on a $k \geq 2$. Puisque f est injective, la fonction g n'est pas constamment nulle au voisinage de z_0. Si f' était constamment nulle sur un voisinage de z_0, alors f serait constante sur une boule ouverte centrée en z_0. Cela contredirait l'injectivité de f. Grâce au principe des zéros isolés, il existe donc $\delta > 0$ tel que $f - f(z_0)$ et f' ne s'annulent pas sur $\overline{D(z_0, \delta)} - \{z_0\}$. Posons

$$\epsilon = \min_{z \in C(z_0, \delta)} |f(z) - f(z_0)|.$$

On a $\epsilon > 0$. Soit $w \neq 0$ tel que $|w| < \epsilon$, alors

$$|(f(z) - f(z_0)) - (f(z) - f(z_0) - w)| < \epsilon \leq |f(z) - f(z_0)|$$

pour tout $z \in C(z_0, \delta)$. Grâce au théorème de Rouché, les fonctions $f - f(z_0)$ et $f - f(z_0) - w$ ont le même nombre de zéros, k, dans $D(z_0, \delta)$. Si ξ est un zéro de $f - f(z_0) - w$ d'ordre au moins 2, alors $f'(\xi) = 0$ et $\xi \neq z_0$ car $w \neq 0$. Cela contredit le choix de δ. La fonction $f - f(z_0) - w$ admet donc au moins deux zéros distincts. Cela contredit l'injectivité de f. □

***Théorème* 166-** *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et injective. Alors son application réciproque $f^{-1}\colon f(\Omega) \to \mathbb{C}$ est holomorphe. De plus, la dérivée de f^{-1} vérifie*

$$f^{-1\prime} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration. Notons $g = f^{-1}$ la fonction réciproque de f. D'après la remarque 164, elle est continue sur $f(\Omega)$. Soit $z_0 \in f(\Omega)$. Pour tout $z \in f(\Omega)$, si $z \neq z_0$, alors $g(z) \neq g(z_0)$ et

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \left(\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)}\right)^{-1}.$$

Comme g est continue en z_0, alors $g(z)$ tend vers $g(z_0)$ si z tend vers z_0. Comme f est dérivable en $g(z_0)$ on en déduit que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} = f'(g(z_0)).$$

Enfin, f' ne s'annule pas donc

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(g(z_0))}.$$

On a prouvé le théorème. □

Une fonction holomorphe bijective est dite *biholomorphe* ou *conforme*.

Exercice 167–
On note $\mathscr{H}$ le demi-plan de Poincaré

$$\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Soit F la fonction définie par

$$F(z) = \frac{i - z}{i + z}$$

pour tout $z \in \mathscr{H}$.

i) Montrer que $F(\mathscr{H}) = D(0, 1)$.
ii) Montrer que F est bijective sur $D(0, 1)$ et calculer sa fonction réciproque.

Exercice 168–
Soit

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & z^2. \end{array}$$

1. Quelle est l'image de φ ?
2. Montrer que φ définit une bijection de $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ dans son image.
3. On appelle *détermination principale de la racine carrée* la réciproque de φ. Montrer que cette réciproque est $z \mapsto z^{1/2}$.

Exercice 169–
Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \{z \in \mathbb{C} \colon |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\pi}{2}\} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \sin z. \end{array}$$

1. Montrer que l'image de φ est
$$A = \mathbb{C} - (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[) .$$
2. Montrer que φ définit une bijection de $\{z \in \mathbb{C} \colon |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\pi}{2}\}$ dans son image.
3. On appelle *arcsinus* et on note arcsin la réciproque de φ. Montrer que
$$\arcsin(z) = -i \ln\left(iz + (1 - z^2)^{1/2}\right).$$
pour tout $z \in A$.
4. Donner une primitive de
$$z \mapsto \frac{1}{(1 + z^2)^{1/2}}$$
sur A.

Exercice 170–
Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \{z \in \mathbb{C} \colon |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\pi}{2}\} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \tan z. \end{array}$$

1. Montrer que l'image de φ est
$$A = \mathbb{C} - i\,(]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[) .$$
2. Montrer que φ définit une bijection de $\{z \in \mathbb{C} \colon |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\pi}{2}\}$ dans son image.
3. On appelle *arctan* et on note arctan la réciproque de φ. Montrer que
$$\arctan(z) = \frac{i}{2} \left(\ln(1 - iz) - \ln(1 + iz)\right).$$
pour tout $z \in A$.
4. Donner une primitive de
$$z \mapsto \frac{1}{1 + z^2}$$
sur A.

Références

[FB09] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Complex analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2009.

[God98] Roger Godement. *Analyse mathématique. I*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Convergence, fonctions élémentaires. [Convergence, elementary functions].

[God02] Roger Godement. *Analyse mathématique. III*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann. [Analytic functions, differentials and manifolds, Riemann surfaces].

[God03] Roger Godement. *Analyse mathématique. II*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003. Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes. [Differential and integral calculus, Fourier series, holomorphic functions].

[Lau05] François Laudenbach. *Calcul différentiel et intégral*. Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2005.

[SS03] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis*. Princeton Lectures in Analysis, II. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.