Document disponible à http://www.univ-montp3.fr/miap/ens/AES/XA100M/index.html.

Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

XA100M - mathématiques
Année 2003–2004

Fiche d'exercices 5 : fonctions de 2 et 3 variables

— EXERCICES —

Les exercices I à IV sont des révisions de méthodologie.

I) Soit $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $q \mapsto \dfrac{4}{q} + 0,8q$. Sur l'intervalle $]0,10]$, pour quelle valeur de q la valeur $C(q)$ est–elle minimale ? Tracer le graphe de C et donner les tangentes en les points d'abscisse 1 et $\sqrt{5}$.

II) Dans une usine, on étudie le coût total[1] $C(q)$ de la production de q unités produites. Ce coût est estimé à $C(q) = q^3 - 12q^2 + 48q$ et on suppose que q varie dans $]0,8]$ (une unité produite peut ne pas être un nombre entier : si une unité représente 1000 trombones, alors $2,37$ unités représentent 2370 trombones). On appelle coût marginal la fonction C_m dérivée de C par rapport à q et coût moyen la fonction $C_M(q) = C(q)/q$. Le coût induit par la fabrication d'une pièce de plus lorsqu'on en produit déjà q est $S(q) = C(q+1) - C(q)$. **1)** Étudier les variations de C_M, C_m et S. **2)** Tracer sur un même dessin les graphes de C_M, C_m et S. **3)** Pour quelle quantité q_0 le coût moyen est–il minimum ? **4)** On suppose que le prix d'une unité est $P = 27$. Pour quelle quantité produite le bénéfice du producteur est–il maximal ?

III) Étudier sur l'intervalle $]0,10]$ la fonction $f(x) = \dfrac{3}{x}$. Tracer le graphe $\mathfrak{G}$ de f. Déterminer l'intersection de $\mathfrak{G}$ avec la droite $\mathfrak{D}$ d'équation $3x + 4y = 12$. Montrer que $\mathfrak{D}$ est tangente à $\mathfrak{G}$ au point d'abscisse 2. Soit $\mathfrak{D}_k$ d'équation $3x + 4y = k$ avec $k > 0$. Déterminer, en fonction de k, le nombre de points d'intersections de $\mathfrak{D}_k$ et $\mathfrak{G}$.

IV) On considère deux fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = -\dfrac{2}{x}$. **1)** Étudier les variations de f et g et tracer sur un même dessin les graphes de ces deux fonctions. **2)** Déterminer les points d'intersection des deux graphes.

V) Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes. $a(x,y) = x^5y^2 - x^2y^{10} - x + y - 10$, $b(x,y) = \dfrac{x^2-1}{3+xy}$, $c(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{1-x^2-y^2}$, $d(x,y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$, $e(x,y,z) = \sqrt{xyz}$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{xyz}$, $g(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

VI) Déterminer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes. $a(x,y) = x^3y^2 - x^2 + y^3 + 2x + 3$, $b(x,y) = \sqrt{x+y^2}$, $c(x,y) = x^3y^4$, $d(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $e(x,y,z) = xyz$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{xyz}$, $g(x,y,z) =$

[1] Il ne faut pas se laisser abuser par le vocabulaire : ce terme signifie coût total *pour le producteur*.

$\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ $h(x,y,z)=\dfrac{1}{2x+z}$.

VII) Soit $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x$. **1)** Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f. **2)** Déterminer les couples (x,y) qui annulent simultanément les dérivées partielles premières. Répondre aux mêmes questions avec $g(x,y)=xy^3+x^3y$.

VIII) Soit f la fonction définie pour $x>0$ et $y>0$ par $f(x,y)=xy-2x$. **1)** Calculer les dérivées partielles de f. **2)** On considère une contrainte linéaire de la forme $3x+4y=20$. Exprimer y en fonction de x. **3)** Que devient l'expression de f sous cette contrainte ? **4)** Déterminer alors l'extremum de f sous cette contrainte.

IX) Soit $g(x)=\dfrac{72}{x^2}-1$ pour $x\in[3,9]$. Tracer le graphe $\mathfrak{C}$ de cette courbe. Déterminer l'équation de la tangente $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{C}$ au points d'abscisse 6. **1)** Pour $x>0$ et $y>0$, on définit $u(x,y)=x^2y+x^2$. Calculer les dérivées partielles premières de u. **2)** On veut calculer l'extremum de u sous la contrainte linéaire $2x+3y=15$. Donner y en fonction de x. Que devient u ? Déterminer l'extremum de cette nouvelle fonction. **3)** Montrer que la ligne de niveau correspondant à cet extremum est $\mathfrak{C}$. Que représente la droite de contrainte pour cet extremum ? Est–ce un minimum ou un maximum ?

X) On considère $f(x,y)=x\sqrt{y}$ et $c(x,y)=3x+2y-9$. **1)** Calculer les dérivées partielles premières de f. **2)** Pour quelle(s) valeur(s) de (x,y) la fonction f est–elle extrémale sous la contrainte $c(x)=0$? Est–ce un minimum ou un maximum ?

XI) **1)** Tracer le graphe $\mathfrak{C}$ de $f(x)=\dfrac{9}{x}$ pour $x\in]0,9]$. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 3. **2)** Soit $u(x,y)=4\sqrt{xy}$ pour $x>0$ et $y>0$. Calculer les dérivées premières de u. **3)** Déterminer l'extremum de u sous la contrainte linéaire $x+y=6$. Montrer que la ligne de niveau correspondant à cet extremum est $\mathfrak{C}$. Que représente la droite de contrainte pour cet extremum ?

XII) Soit u la fonction $u(x,y)=xy$ avec $x>0$ et $y>0$ et $c(x)=x^2+y^2-4$. Déterminer le ou les points candidats à être extremum de u sous la contrainte $c(x)=0$. Dire si l'on obtient des minimums ou des maximums ?