



Fonction de distribution cumulative

Administration Économique et Sociale

Mathématiques

XA100M



Dans le chapitre précédent, les résultats ont tous été donnés en effectifs.

Cela n'est pas pertinent si l'on veut comparer des études dont les populations ont des tailles différentes.

Pour ce type de comparaisons, on introduit la notion de fréquence.

1. FRÉQUENCES

On considère la situation statistique suivante

Modalités	m_1	m_2	\cdots	m_p
Effectifs	n_1	n_2	\cdots	n_p

L'effectif total est

$$n = \sum_{i=1}^p n_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_p.$$

La **fréquence** de la modalité m_i est le rapport de l'effectif de la modalité sur l'effectif total :

$$f_i = \frac{n_i}{n}.$$

Comme tous les nombres, les fréquences peuvent être exprimées en pourcentage.

On peut donner les résultats d'une étude statistique en fréquences plutôt qu'en effectifs.

Modalités	m_1	m_2	\cdots	m_p
Fréquences	f_1	f_2	\cdots	f_p

La somme des fréquences est égale à $1 = 100\%$:

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \cdots + \frac{n_p}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$



Les fréquences sont proportionnelles aux effectifs : pour chacune des modalités m_i , on a

$$f_i = \frac{1}{n} n_i.$$

En conséquence, dans les graphiques, les grandeurs proportionnelles aux effectifs sont aussi proportionnelles aux fréquences.

Dans le chapitre précédent, on peut refaire les graphiques en remplaçant les effectifs par les fréquences.

Exemple

- Population : 60 personnes ;
- Individus : chaque personne ;
- Variable : taille ;
- Modalités : les nombres positifs ;
- Quantitatif ;
- Continu ;
- Ordinal.

Modalités (en m)	moins de 1,60	1,60 à 1,65	1,65 à 1,70	1,70 à 1,75	plus de 1,75
Effectifs	1	5	21	29	4
Fréquences	$\frac{1}{60}$ = 1,67%	$\frac{5}{60}$ = 8,33%	$\frac{21}{60}$ = 35%	$\frac{29}{60}$ = 48,33%	$\frac{4}{60}$ = 6,67%

2. FONCTION DE DISTRIBUTION CUMULATIVE

On considère un caractère **quantitatif**.

Modalités	m_1	m_2	\cdots	m_p
Effectifs	n_1	n_2	\cdots	n_p

◀◀ On a $m_1 < m_2 < \dots < m_p$.

◀◀ L'effectif n_i de la modalité m_i est le nombre d'individus ayant m_i pour modalité.

L'**effectif cumulé** de la modalité m_i est le nombre d'individus ayant **au moins** m_i pour modalité, c'est-à-dire ayant soit m_1 , soit m_2 , soit m_3 , *etc.* soit m_i pour modalité.

L'effectif cumulé de la modalité m_i est donc

$$\text{☞} \quad \sum_{k=1}^i n_k = n_1 + n_2 + \cdots + n_i.$$

La **fréquence cumulée** de la modalité m_i est le rapport de l'effectif cumulé de la modalité m_i par l'effectif total n , c'est donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^i n_k = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_i}{n}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_i}{n} &= \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \cdots + \frac{n_i}{n} \\ &= f_1 + f_2 + \cdots + f_i, \end{aligned}$$

la fréquence cumulée de la modalité m_i est aussi la somme des fréquences des modalités m_1, m_2, \dots, m_i , c'est-à-dire

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^i f_k = f_1 + f_2 + \cdots + f_i.$$

Exemple

Même cadre que l'exemple précédent.

Modalités (en m)	moins de 1,60	1,60 à 1,65	1,65 à 1,70	1,70 à 1,75	plus de 1,75
Effectifs	1	5	21	29	4
Effectifs cumulés	1	$1 + 5 = 6$	$1 + 5 + 21 = 27$	$1 + 5 + 21 + 29 = 56$	60
Fréquences cumulées	$\frac{1}{60} = 1,67\%$	$\frac{6}{60} = 10\%$	$\frac{27}{60} = 45\%$	$\frac{56}{60} = 93,33\%$	100%



La **fonction de distribution cumulative en effectifs** est la fonction qui à chaque modalité associe son effectif cumulé.

La **fonction de distribution cumulative en fréquences** est la fonction qui à chaque modalité associe sa fréquence cumulée.

Représentation graphique : cas de la variable discrète

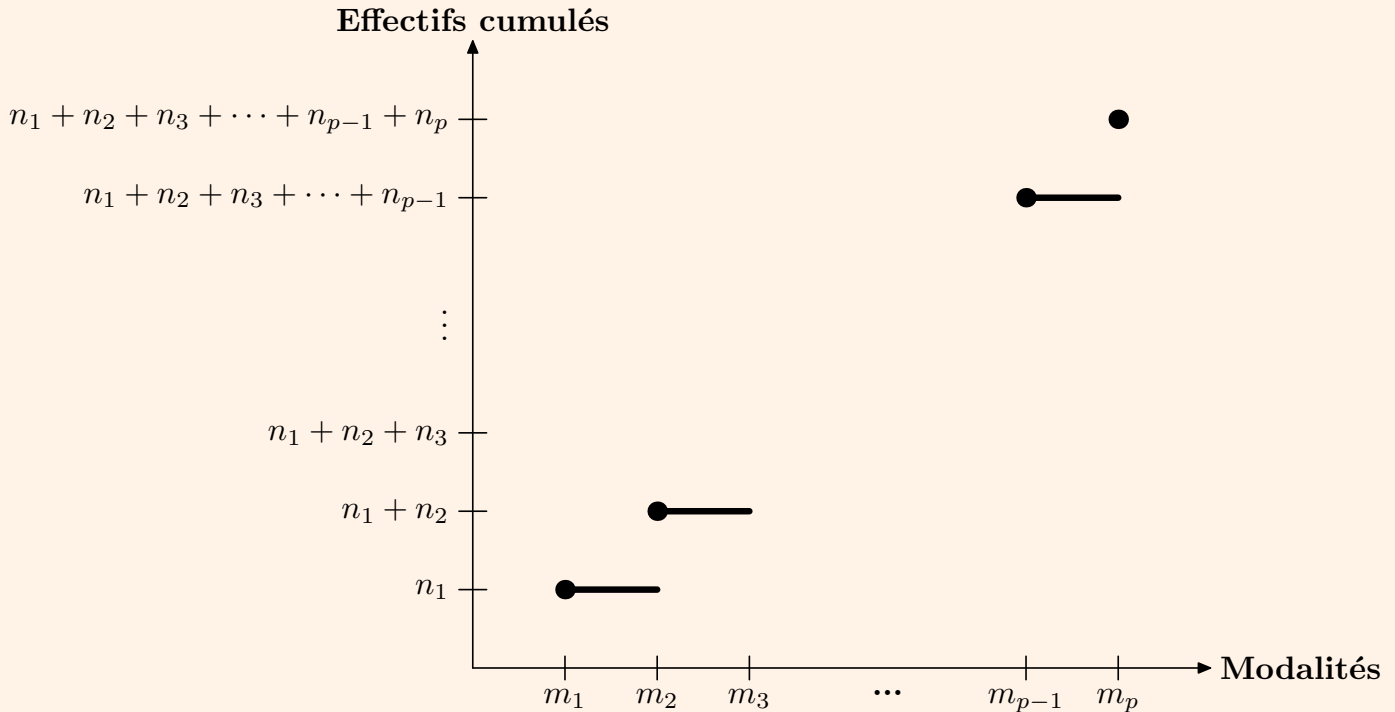
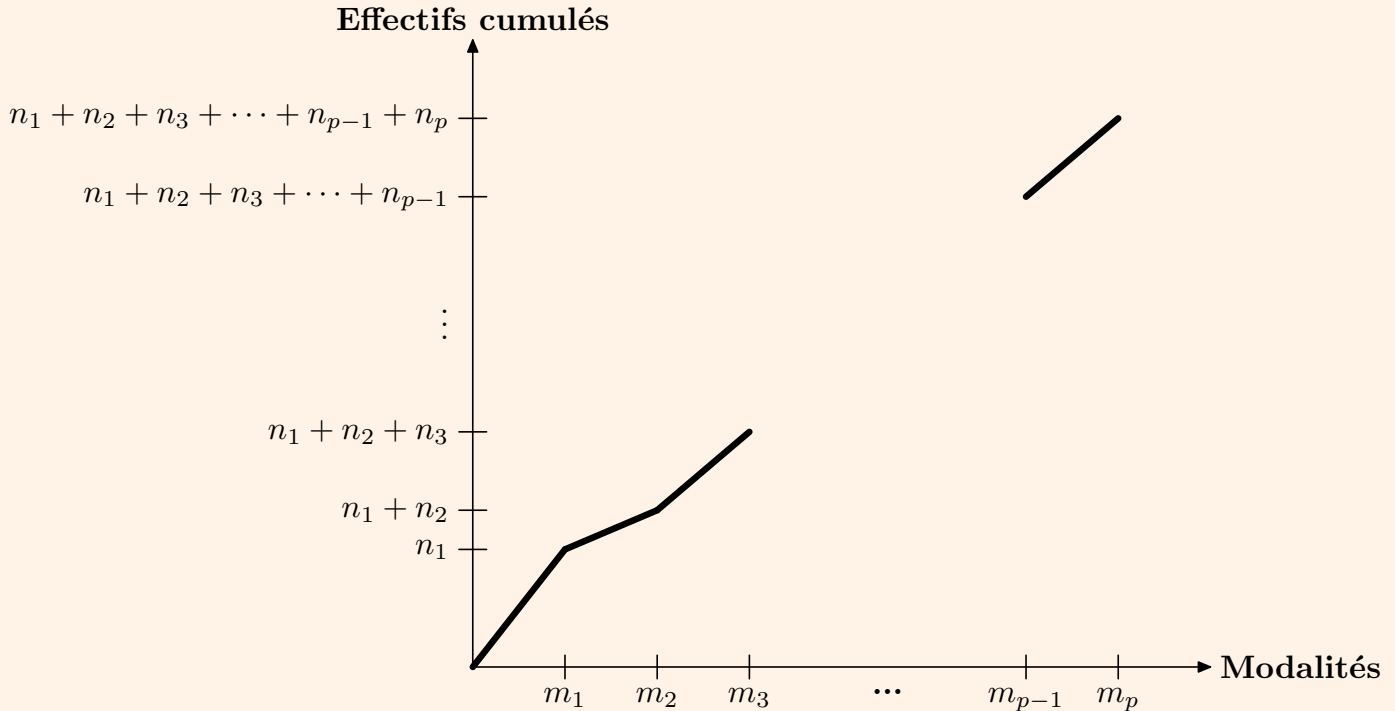


Diagramme en escalier.

P

Q

Représentation graphique : cas de la variable discrète



Entre les modalités m_i et m_{i+1} la courbe est un segment de droite.